21世纪高等院校教材

WEIJIFEN

微积分

（经管类）

蔡光兴 李德宜 主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书根据高等院校《高等数学课程教学基本要求》及全国硕士研究生入学考试大纲数学三、四（文、经、管类数学）的微积分纲目编写而成. 内容包括：一元函数微分学及其在经济中的应用、一元函数积分学及其应用、微分方程、无穷级数、多元函数微积分.

本书的特色在于：一、保持传统微积分的知识点；二、增加 Mathematic 软件操作内容；三、每章末提供了数学重要概念英文词汇及若干道英文题；四、每章后附有数学家简介，书末附有微积分学简史；五、补充了边际分析、弹性分析等经济应用内容；六、习题分三个部分：选择填空训练题，基本训练题，运用计算机及 Mathematic 软件的习作题.

本书内容充实，体系新颖，选例灵活，且有鲜明的应用特点，既可作为高等院校文、经、管类各专业微积分课程的教材，也可供其他相关专业读者使用，对报考硕士研究生的学生及有关专业教师也具有参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经管类）/蔡光兴，李德宜主编. －北京：科学出版社，2004.8
（21 世纪高等院校教材）
ISBN 7-03-014200-4

Ⅰ.微… Ⅱ.①蔡…②李… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 ②微积分－高等学校－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 084861 号

责任编辑：冯贵层
责任印制：高 嵘／封面设计：李梦佳

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2004 年 8 月第一次印刷 印张：22 3/4
印数：1－8 000 字数：556 000

定价：31.80 元

《微积分（经管类）》编委会

主　编　蔡光兴　李德宜

副主编　余　杨　方　瑛　尹水仿　郑　列

编　委　（以姓氏笔画为序）

王晓芬　付小兰　朱永松　刘　磊　许松林　陈水林

陈　华　张水坤　张凯凡　李子强　李逢高　李家雄

杨策平　周启元　费锡仙　耿　亮　黄　斌　黄　毅

黄　慧　章曙雯　谭　文　熊　苹

前　言

21世纪的今天，随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用，不但现代化产业和经济的组织管理已完全离不开数学所提供的方法和技术，而且在人文和社会科学中也有了它的用武之地. 这一切都使现代数学课程，不仅在大学理工科中占有举足轻重的基础地位，而且在人文、经济、管理等学科中其作用也日重一日. 对于大学的非数学专业而言，现代数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识，为后续课程或其他学科打下基础，提供工具，更重要的是传授数学思路、数学方法，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力、科学计算能力、数学建模及应用数学能力. 新世纪教育“三个面向”——面向世界、面向未来、面向现代化，要求大学数学教育的教学内容与课程体系必须进行改革，教学内容吐故纳新，课程体系严谨实用. 为适应这一形势的需要，我们组织了一批具有丰富大学数学教学经验的教师，共同研讨了经管类微积分课程：如何做到符合国家教育部课程大纲基本要求，又达到文、经、管类专业学生考研对该课程大纲的要求；如何激发学生学习数学的积极性，了解数学发展背景；如何使学生更好地运用数学软件进行科学计算及应用；如何使学生面向世界并与国际接轨，等等. 在研讨的基础上，我们编写了这本教材. 本教材编写特色如下：

1. 保持传统微积分的知识体系，其基本内容是根据高等院校《高等数学课程教学基本要求》及全国硕士研究生入学考试大纲数学三、四（文、经、管类数学）的微积分纲目来编写的，对微积分基本内容的讲解做到了内容精炼、结构严谨、循序渐进、推理简明、通俗易懂.

2. 考虑到计算机技术的迅速发展和普及，教材在第一章简要介绍了 Mathematic 软件，使学生早日接触 Mathematic 这一功能强大、操作方便的数学软件. 在微积分学各章配有运用软件上机操作并计算的题目，以提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件的能力. 本内容供教师灵活选用.

3. 21 世纪教育要面向世界，国际交流与合作更加频繁，为适应双语教学的需要，教材每章后均附有重要概念英文词汇，布置有若干道英文习题，并要求学生用英文求解，以提高学生阅读数学外文资料的能力，并为学生日后用英文撰写学术论文打下基础.

4. 微积分创立是数学史上最辉煌的一页. 为了扩大学生视野，使学生了解微积分创立发展背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后对微积分创立发展过程中做出过伟大贡献的著名数学家如牛顿、莱布尼茨等作了简介，并在书末附有微积分发展简史.

5. 为增强学生经济应用能力，本教材在相关章节都配有经济应用习题. 为突出微分学在经济中的应用，第五章进行了专题讨论，讨论了导数在经济分析中的应用，如边际成本、函数弹性等，讨论了导数极值在经济管理中的应用，如需求分析、库存管理、复利问题、最大利润问题等.

6. 为使学生更好地掌握所学知识，提高应用能力，每章后都配有大量练习题，这些习题分三部分：A 题为选择填空题，主要加强学生对基本概念、基本知识的理解；B 题为基本训练题，包括计算、求解、证明、应用，其中有若干道英文题，要求用英文习作；C 题为运用计算机及 Mathematic 软件针对该章知识点的习作题.

本书由蔡光兴、李德宜主编，余杨、方瑛、尹水仿、郑列任副主编. 全书在编写过程中，由

蔡光兴教授提出编写思路、提纲，由编委会研究讨论确定编写方案. 各章编写人员如下：方瑛（第一章第一、二节、第四章），朱永松（第一章第四节），郑列（第二章），蔡光兴（第三章、第一章第三节），余杨、许松林（第五章、第九章、第十章），李德宜、尹水仿、谭文（第六章、第七章、第八章、第十一章），各章后数学家简介、英文数学题、C题及书末微积分学简史由蔡光兴、郑列、朱永松、许松林、方瑛收集整理，并做了全书的统稿工作，其他编委参与了习题及习题答案的编写，最后由蔡光兴教授定稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时修订.

编者

2004年8月

目　　录

第一章　函数与 Mathematic 入门

在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数关系，而所谓函数关系，就是变量之间的依赖关系. 函数作为各种变量依存关系的一种抽象化的结果，是我们现阶段学习和研究的主要对象.

在本章中，我们将首先引入集合的概念，并在此基础上介绍函数的有关概念以及几种常用的经济函数，最后还要介绍关于 Mathematic 软件的基本知识.

1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念

集合是数学中一个原始的基本概念，它在现代数学中起着非常重要的作用. 所谓集合，就是指具有某种特定属性的事物的总体，或是某些确定对象的总汇. 构成集合的每一事物或对象皆称为该集合的元素. 集合也简称为集.

下面看几个集合的例子.

例 1.1　某学校的全体在校学生.

例 1.2　方程 $x^2-3x-4=0$ 的所有实根.

例 1.3　全体偶数.

例 1.4　圆周 $x^2+y^2=4$ 上所有的点.

由有限个元素构成的集合称为有限集合，如例 1.1、例 1.2；由无限多个元素构成的集合称为无限集合，如例 1.3、例 1.4.

通常我们用大写字母 A、B、C……等表示集合，而用小写字母 a、b、c……等表示集合的元素.如果 a 是集合 A 中的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A.

一个集合一经给定，那么对于任何事物或对象都能够判定它是否属于这个给定的集合.

集合的表示方法有列举法和描述法.

（1）列举法. 是指按任意顺序列出集合中所有元素，并用括号{ }括起来.

例 1.5　由 a、b、c、d 四个元素组成的集合 A 可以表示为

$$A=\{a,b,c,d\}\quad 或\quad A=\{b,c,d,a\}$$

例 1.6　由方程 $x^2-3x-4=0$ 的根构成的集合 A 可以表示为

$$A=\{4,-1\}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不能遗漏和重复.

（2）描述法. 是把集合中元素所具有的共同属性描述出来，用 $A=\{x\mid x\text{具有的共同属性}\}$ 表示.

例 1.7　设 A 为全体偶数的集合，可表示为

$$A=\{x\mid x=2n,\ n\text{为整数}\}$$

例 1.8 设 A 为圆周 $x^2+y^2=4$ 上的点的集合，可表示为

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4 \text{且} x,y \text{为实数}\}$$

例 1.9 设 A 为方程 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合，由于在实数范围内方程无解，所以 A 中不可能有任何元素，这种不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，所以

$$A=\{x\mid x^2+1=0 \text{且} x \text{为实数}\}=\varnothing$$

习惯上，全体自然数的集合记作 N，全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记作 Q，全体实数的集合记作 R.

应该注意的是，空集$\varnothing$不能同仅含有元素"0"的集合$\{0\}$相混淆.

子集概念也是集合常用的.如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，即如果 $a\in A$，则 $a\in B$，那么 A 就是 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

例 1.10 设 N 为全体自然数集，Q 为全体有理数集，R 为全体实数集，那么 $N\subset Q$，$Q\subset R$.

例 1.11 设 $A=\{x\mid 2\leqslant x<100\}$，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 50\}$，$C=\{x\mid x\leqslant 50\}$，显然，$B\subset A$ 且 $B\subset C$，但 A 不是 C 的子集，C 也不是 A 的子集.

特别，若两个集合 A 和 B 同时有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例 1.12 设 $A=\{x\mid x \text{为大于 1 小于 4 的整数}\}$，$B=\{x\mid x \text{为小于 5 的质数}\}$，$C=\{x\mid x^2-5x+6=0 \text{的根}\}$. 因为三个集合 A、B、C 中都只包含 2 和 3 两个数，所以 $A=B=C$.

对于子集还可有以下结论：

（1）$A\subset A$，即集合 A 是其自身的子集.

（2）$\varnothing\subset A$，即空集是任意集合的子集.

（3）若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即集合的包含关系具有传递性.

1.1.2 集合的运算

如同数的各种运算一样，集合之间也有其特定的运算，下面我们将给出集合的并、交、补三种基本运算，并借助于图形直观描述集合之间的关系. 这里，集合用一个平面区域表示，集合内的元素以区域内的点表示. 如图 1-1 表示集合 A 与 B 的关系是 $A\subset B$.

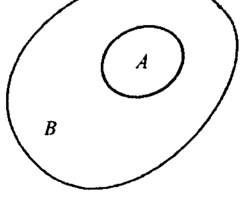

图 1-1

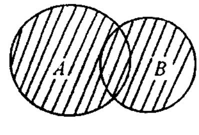

图 1-2

定义 1.1 由集合 A 与 B 中的所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，读作 A 与 B 之并，如图 1-2 阴影所示. 也可表示为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}$$

显然 $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$，并且 $A\cup\varnothing=A$, $A\cup A=A$. 特别，当 $A\subset B$ 时，$A\cup B=B$.

定义 1.2 由集合 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，读作 A 与 B 的交，如图 1-3 阴影所示. 也可表示为

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

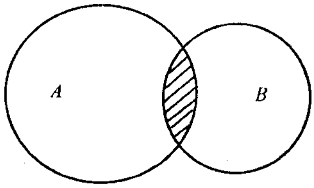

图 1-3

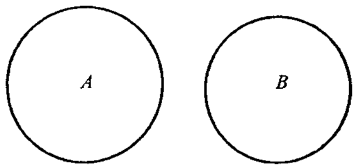

图 1-4

显然 $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$，并且 $A \cap\varnothing=\varnothing$，$A \cap A=A$．特别，当 $A\subset B$ 时，$A \cap B=A$.

例 1.13 设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$，则

$$A\cup B=\{x \mid -1<x \leqslant 3\}, A\cap B=\{x \mid 1 \leqslant x<2\}$$

例 1.14 设 A 为全体正整数集合，B 为全体负整数集合，C 为全体整数集合，则

$$A\cup B=\{x \mid x \text{ 为正整数或负整数}\}$$

$$A\cap B=\varnothing$$

$$A\cup C=C \quad \text{且} \quad B\cap C=B$$

这里 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 是分离的，如图 1-4 所示.

定义 1.3 由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$，如图 1-5 阴影部分，也可表示为

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

例 1.15 若 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，则

$$A-B=\{1, 3\}, \quad B-A=\{6, 8\}$$

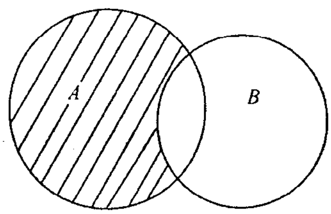

图 1-5

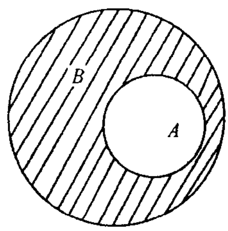

图 1-6

定义 1.4 若集合 A 为集合 B 的子集，则由属于 B 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为集合 A 关于集合 B 的补集，记为 A_B^c，也常简记为 A^c，如图 1-6 阴影部分.也可表示为

$$A_B^c=\{x \mid x\in B \text{ 且 } x \notin A\}$$

显然 $$A\cup A_B^c=B, A\cap A_B^c=\varnothing, A_B^c\subset B$$

特别，由于 $A\subset B$，则 $B-A=A_B^c$.

例 1.16 在例 1.14 中的集合 A, B, C，由 $A\subset C$，$B\subset C$，则

$$A_C^c=B\cup\{0\}, B_C^c=A\cup\{0\}$$

并有 $$C-A=B\cup\{0\}, C-B=A\cup\{0\}$$

即 $$C-A=A_C^c, C-B=B_C^c$$

集合运算有如下性质：

（1）交换律：① $A\cup B=B\cup A$；② $A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：① $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；② $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

（3）分配律：① $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；② $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（4）对偶律：① $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$；② $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

下面证明结合律①和对偶律②，其他结论可以类似证明.

结合律①的证明：

如果 $x\in(A\cup B)\cup C$，则 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$，因而 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cup(B\cup C)$，由此可得

$$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$$

类似可证

$$A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$$

所以

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

对偶律②的证明：

如果 $x\in(A\cap B)^c$，则 $x\notin A\cap B$，故 $x\notin A$ 与 $x\notin B$ 至少有一个成立. 当 $x\notin A$ 时，有 $x\in A^c$；当 $x\notin B$ 时，有 $x\in B^c$. 因此总有 $x\in A^c\cup B^c$，则可得 $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$.

如果 $x\in A^c\cup B^c$，则 $x\in A^c$ 与 $x\in B^c$ 至少有一个成立，即 $x\in A$ 与 $x\in B$ 至少有一个不成立. 故 $x\notin A\cap B$，即 $x\in(A\cap B)^c$，所以 $A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$.

综合以上证明，有 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

例 1.17 设 A 表示某单位会英语的人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么：

A^c 表示该单位不会英语的人的集合；

B^c 表示该单位不会日语的人的集合；

$A-B$ 表示该单位会英语而不会日语的人的集合；

$B-A$ 表示该单位会日语而不会英语的人的集合；

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 表示英语和日语都不会的人的集合；

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ 表示不会英语或不会日语的人的集合.

1.1.3 实数与数轴

人们对于数的认识是逐步深入的，首先是自然数，然后发展到整数、有理数，再进一步发展到无理数.

自然数集 N 关于加法运算是封闭的，即若 $a\in N$，$b\in N$，则必有 $a+b\in N$. 但在 N 中，减法运算却不是封闭的，这样就有了整集 Z.在整数集 Z 中，加法、减法和乘法运算是封闭的，但对除法运算却不封闭，因而引出了有理数集 Q.对于有理数集

$$Q=\{x\mid x=\frac{p}{q},p\in Z,q\in Z,p\text{与}q\text{互质}\}$$

四则运算总是封闭的。有理数除了以分数形式表示，还可以表示为有限小数或无限循环小数形式. 随着科学技术的发展及数学研究的进一步深入，出现了诸如圆周率π的计算及开方运算如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等，无理数因此应运而生.

有理数和无理数统称为实数，所有的实数都可以在一条直线上形象地表示出来. 设有一条水平直线，在直线上取定一点 O 称为原点，规定一个正方向，习惯上规定由原点向右的方向为正方向，再规定一个长度称为单位长度.这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴，如图 1-7 所示.

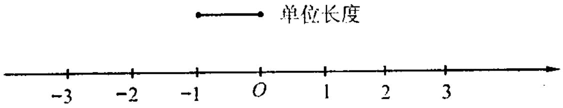

图 1-7

任何一个有理数 p/q，都可以在数轴上找到一个点与之对应，这个点叫做有理点，它是有理数 p/q 的几何表示，而有理数 p/q 则为该有理点的坐标.同时，对于任意两个有理数 a，$b(a<b)$，a 与 b 之间至少可以找到一个有理数 c，使 $a<c<b$，例如 $c=(a+b)/2$；同样，在 a 与 c 之间也至少可以找到一个有理数 d，使 $a<d<c$；依此类推，可以看到 a 与 b 之间总可以找到无穷多个有理数，即有理数具有稠密性.对应地，在数轴上任意两个有理点之间也有无穷多个有理点存在，也就是说，有理点在数轴上是处处稠密的.

尽管有理点在数轴上处处稠密，但是否能充满整个数轴呢？例如，以 1 个单位长度作为边长的正方形，其对角线长度为 $\sqrt{2}$ 个长度单位，可以证明，$\sqrt{2}$ 是无理数，在数轴上可以作出 $\sqrt{2}$ 个长度单位的线段 OB，如图 1-8 所示.

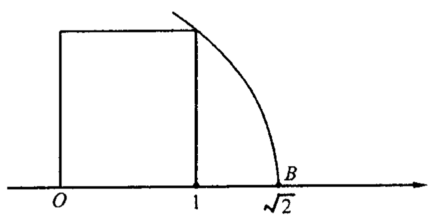

图 1-8

可见，数轴上确实还存在诸如此类的非有理点——无理点，例如 $\sqrt{2}+1$，$\sqrt{3}$，π，…等等对应的点. 所有的无理点填补了有理点之外的“空隙”. 可以证明，实数充满了整个数轴而不再留有“空隙”，也就是说，实数不仅具有稠密性，也具有连续性，这样，数轴上的点与实数之间建起了一一对应的关系，每一个实数必是数轴上某点的坐标；反之，数轴上的每一点的坐标必是一个实数. 所以，在今后的学习中，常将实数与其在数轴上的对应点不加区别地混用，如点 a 和实数 a 是相同的意思.

1.1.4 区间、邻域

区间是用得较多的一类数集，在数学中常用区间表示一个变量的变化范围.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作(a,b)，见图 1-9（a），即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

a 和 b 为开区间的端点，且 $a \notin (a,b), b \notin (a,b)$.

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a,b]$，见图 1-9(b)，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间的端点，这里 $a \in [a,b], b \in [a,b]$. 类似可以给出半开区间，见图 1-9(c)，(d).