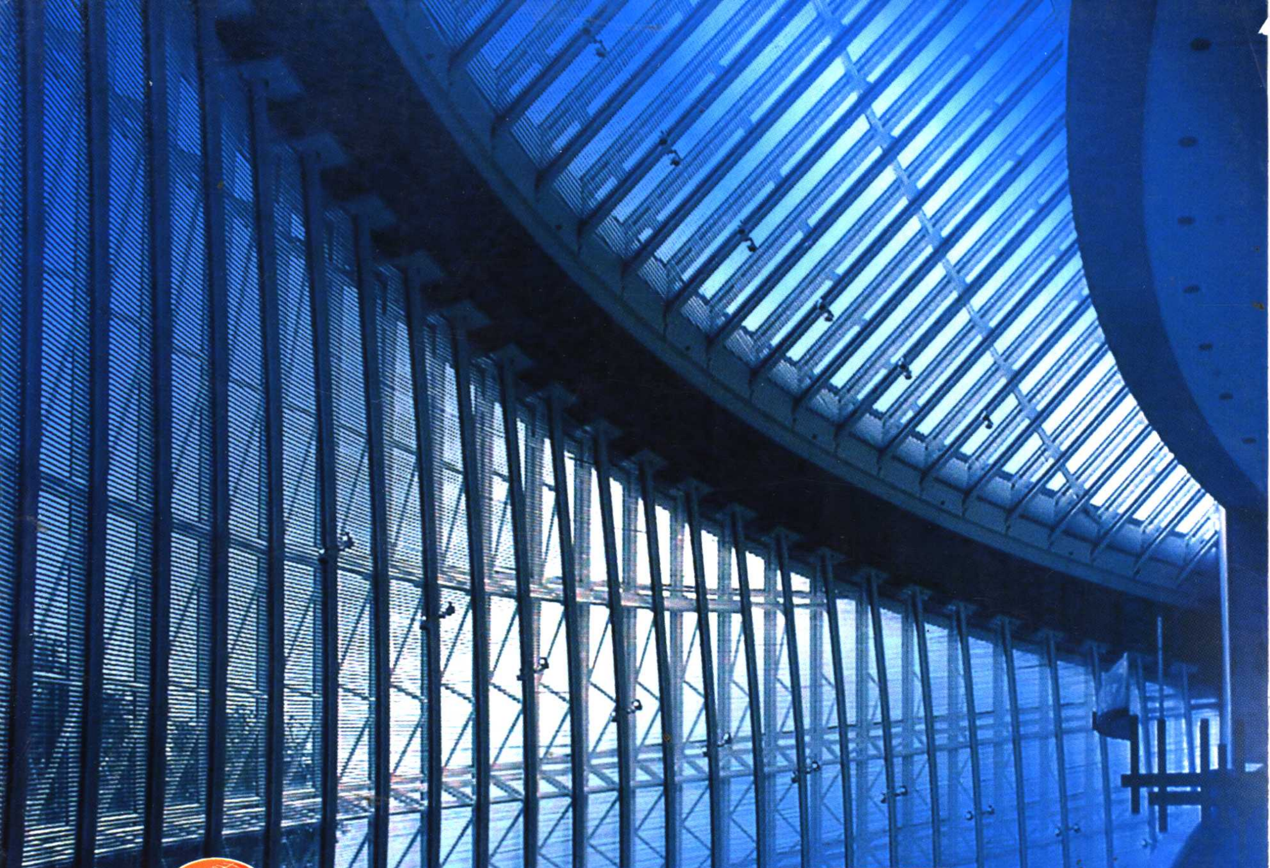

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

应用数学基础——线性代数

主　编　曹贤通
副主编　李海峰　任开隆　周　伦
张忠志　江世璟　席小忠

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学"十五"国家规划课题研究成果

应用数学基础
——线性代数

主　编　曹贤通
副主编　李海峰　任开隆　周　伦
　　　　张忠志　江世璟　席小忠

高等教育出版社

内容提要

本书是根据高校工科线性代数课程教学基本要求的精神，结合工程技术中对线性代数的需要，作为教育科学“十五”国家规划课题研究成果和应用数学基础系列丛书之一而编写的高等学校教材。

全书以矩阵为主线，对传统的体系与内容进行了实质性的改革，主要有矩阵与行列式、向量组和向量空间、线性方程组、二次型以及 Maple 在线性代数中的应用等五章。本书从应用数学的角度重新处理了线性代数的基本理论和基本方法，注意到这门数学基础课程的基本概念、理论和方法的逻辑性、抽象性和广泛的应用性，对不少理论、概念和方法的推证着力用全新的观点重新处理，并且在保证理论证明严谨性的同时，尽量给以适当的直观解释，便于读者理解和接受。本书内容集中，例题充实，习题按节配置，每章后有本章小结和作为综合训练的复习题，书末附有习题参考答案。

本书适用于培养应用型人才的高等学校理工类各专业学生选用，也可作为应用线性代数知识的科技与管理人员的自学用书和参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础．线性代数／曹贤通主编．—北京：高等教育出版社，2004.6

ISBN 7－04－014416－6

Ⅰ.应… Ⅱ.曹… Ⅲ.①应用数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 031801 号

策划编辑 张忠月　责任编辑 李艳馥　封面设计 王凌波　责任绘图 杜晓丹
版式设计 王艳红　责任校对 金　辉　责任印制 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 6 月第 1 版
印　　张	11.25	印　　次	2004 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　言

线性代数是高等学校大多数专业必修的一门重要基础理论课，作为数学教学主要基础之一的线性代数，由其自身的内容与特点所确定，具有无可替代的极其重要的地位。以极其抽象的形式与极其严密的逻辑统率的、以研究线性问题为主要对象的代数体系，具有广泛的应用性，特别是对新的数字化时代的前进起到重要的推动作用。它将数学的抽象性与严密性等特点高度集中地浓缩于一身，使任何人通过对线性代数的学习，得到良好的逻辑思维能力、运算能力、抽象及分析能力、综合与推理能力的严格训练，对用新的方法处理离散型对象的线性问题有一个初步但却至关重要的深刻了解；甚至可以说，这种思维方式和思想方法对一个人能力的培养与灵魂的塑造，比学习代数知识本身更具有时效性、拓展性和实用性，因而可以影响一个人的一生。历史的经验和长期的教学实践告诉我们，学好线性代数又是一件十分不易（甚至比学习微积分更难）的事情。如何通过教学改革尤其是创造性的教材建设，使得这门课程既保持严谨的风格又直观生动，易学易懂并且吸引学生，已经成为多年来数学教育特别是代数教学的重要课题。本书就是在这方面经过长期实践和研究，对传统教材进行改进与完善的一个新的尝试。

本书在线性代数知识的编排上，围绕教学大纲，以适应教学、联系实际和确保严密为原则，从几个主要方面对传统教材的体系进行了大胆的改革，主要有以下几个显著特点：

1. 以“投入产出模型”的建立为切入点，引出矩阵这一现代数学中的重要概念，并且以矩阵为主线，统领全书。

2. 以矩阵理论贯穿全书，在使线性代数的体系产生较大变化的基础上，将有关概念与方法的处理加以调整，对行列式、矩阵的秩、向量组与向量空间、线性方程组的解法及二次型等理论与计算均以全新的观点处理，尤其注意到尽量给出理论证明，确保基础的稳固和改革的成功。

3. 引入概念时注重强调其实际背景，使读者便于接受，易于理解。通过精选例题，尽量地按学时编排习题，每章后附有小结和复习题，基本满足理论教学与习题的需要。

4. 叙述通俗易懂，语言简单明快，注意前后联系，恰当掌握深度和广度，使知识结构从逻辑上严密自然，适于各专业、各层次教学使用。

5. 在最后一章专门介绍了软件 Maple 的使用方法及其在线性代数中的应用与实践。

本书将可以不在课堂上讲解，供学生课外阅读自学的内容用小号字体排印。

本书综合了几所院校在线性代数课程教学改革与实践中的经验，由中原工学院曹贤通教授组织编写并统稿（任主编），其他各位副主编参加了各章的编写，具体安排如下：

第一章　矩阵与行列式，由中原工学院李海峰教授编写；

第二章　向量组和向量空间，由北京联合大学任开隆教授负责，王朝旺老师编写；

第三章　线性方程组，由许昌学院周伦教授编写，廖靖宇、牛裕琪老师做了有关工作；

第四章　二次型，由湖南城市学院张忠志教授编写；

第五章　Maple 在线性代数中的应用，由中原工学院江世璟副教授编写；

全书的习题及其计算，由江西宜春学院席小忠教授负责。

本书参阅了许多专家学者的论著，并引用了部分文献中的信息，恕不一一指明出处，在此向他们表示诚挚的谢意！

本书在编写过程中得到了全国高等学校教学研究中心、高等教育出版社以及各有关院校的大力支持，在此对他们也表示衷心感谢！

限于水平及时间，疏漏之处在所难免，敬请读者与专家批评指正。

编者

2003.12.30

目　　录

第一章

矩阵与行列式

矩阵与行列式是研究社会及自然现象中各种线性问题的重要数学工具，是近代数学联系实际的一个重要桥梁.本章中首先用经济数学建模方法引入矩阵，然后讨论在实际应用中常用到的矩阵的运算、求逆、秩及分块的有关知识，并介绍行列式的计算方法及克拉默法则，为解一般的线性方程组及其它应用作准备.

§1.1　矩阵的概念及线性运算

一、矩阵的概念

为了说明矩阵来源于各种理论问题和实际问题，我们举一个经济数学中“投入产出”的例子.

投入产出模型是研究经济体系（部门经济、地区经济或企业经济等）各部门之间的投入与产出的相互依存关系的一种数学模型.

把国民经济分为若干个部门，任何一个部门都起着生产和消费的双重作用.分配的产品包括留用与提供给其它部门的中间产品及供消费和贮备的最终产品，其总和为该部门的总产品的数量.

设有 4 个部门（如，1. 农业；2. 能源；3. 重工业；4. 轻工业）参与生产与消耗，表 1.1 就是一个简化的投入产出表的结构，其中数 x_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$ 表示部门 i 分配给部门 j 的产品的数量，或部门 j 消耗部门 i 产品的数量（称为部门间的流量，即中间产品的数量），Y_i 为部门 i 的产品作最终使用的数量；X_i 为部门 i 产品的总产量.

表 1.1

部门间的流量（中间产品） 产出 / 投入		消耗部门 1	2	3	4	最终产品	总产品
生产部门	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	Y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	Y_2	X_2
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	Y_3	X_3
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	Y_4	X_4

表中的 4×4 个数 $x_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 可以排成一个数表

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{matrix} \tag{1.1}$$

整个投入产出表从横行看，反映了各部门产品的分配使用情况. 用公式表示即

总产品的数量＝中间产品的数量＋最终产品的数量，

或
$$X_i=\sum_{j=1}^{4} x_{ij}+Y_i, i=1,2,3,4.$$

它也可以写成下面方程组的形式

$$\begin{cases} X_1=x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+Y_1, \\ X_2=x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+Y_2, \\ X_3=x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+Y_3, \\ X_4=x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+Y_4. \end{cases} \tag{1.2}$$

考虑消耗系数（生产单位产品 j 所消耗的产品 i 的数量）a_{ij} 的类似问题，可以得到下面的分配平衡方程组（这里不再细述）：

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}X_j+Y_i=X_i, i=1,2,3,4,$$

即

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4+Y_1=X_1, \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+a_{24}X_4+Y_2=X_2, \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+a_{34}X_4+Y_3=X_3, \\ a_{41}X_1+a_{42}X_2+a_{43}X_3+a_{44}X_4+Y_4=X_4, \end{cases} \tag{1.3}$$

或

$$\begin{cases}(a_{11}-1)X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4=-Y_1,\\ a_{21}X_1+(a_{22}-1)X_2+a_{23}X_3+a_{24}X_4=-Y_2,\\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+(a_{33}-1)X_3+a_{34}X_4=-Y_3,\\ a_{41}X_1+a_{42}X_2+a_{43}X_3+(a_{44}-1)X_4=-Y_4.\end{cases}\tag{1.4}$$

在许多实际问题中,我们还经常遇到下述一般的线性(即一次)方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\ +\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\ +\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{1.5}$$

其系数可以排成一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{matrix}\tag{1.6}$$

工程技术与数学计算中有时要把一组变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 用另一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经过乘数与加减运算得到的线性式子来表示,这种关系式在数学上称为从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**:

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n,\end{cases}\tag{1.7}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为常数. 这个线性变换的系数 a_{ij} 也排成了形如(1.6)那样一个矩形数表.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的数表,叫做一个 **m 行 n 列矩阵**,简称 **$m\times n$ 矩阵**,记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\tag{1.8}$$

这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的**元素**,简称**元**,a_{ij} 叫做**矩阵的第 i 行第 j 列元**.

本书主要研究元素都是实数的矩阵(**实矩阵**),通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵. (1.8)也可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$;为了更清楚地表明矩阵的行、列数,有时也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 如果两个矩阵的行数、列数分别相等,则称它们为**同型矩阵**. 当 $m=n$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$称为 **$n$ 阶方阵**,n 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**阶数**.

方阵中从左上角元素到右下角元素的元素族称为**主对角线**. 主对角线以外的元素都是零的方阵称为**对角矩阵**,简称**对角阵**.

对角阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可简记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. 主对角线上的元素全是 1 的对角方阵称为**单位矩阵**,简称**单位阵**,记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$. 关于主对角线对称的元素都分别相等的方阵,即满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$的方阵称为**对称矩阵**,简称**对称阵**. 关于主对角线对称的元素都分别互为相反数的方阵,即满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$的方阵称为**反称矩阵**.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_1\ a_2 \cdots\ a_n)$叫做**行矩阵**;只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 叫做**列矩阵**;元素全为零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$,不致混淆时简记作 $\boldsymbol{O}$. 必须注意,不同型的零矩阵是不同的.

例 1 线性变换

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

称为**恒等变换**,其系数 $a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j, \\ 0, i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成一个 n 阶单位阵

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

定义 2 如果同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$的所有对应元素都分别相等,即有 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，称元素为 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由定义 3 可知，不同型的矩阵不能相加.

矩阵的加法满足下列运算规律（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$（零矩阵的特性）；

记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，则有

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$（负矩阵的特性）.

证(1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}，则$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

其它规律可同样证明（略）.

有了负矩阵的概念，我们可以定义 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，称为**矩阵的减法运算**.

例 2 设某地三个商店在上半年与下半年的主要商品销售额（单位：万元）如表 1.2 所示：

表 1.2

商店 \ 时间 \ 品种	小百货		五金		服装	
	上半年	下半年	上半年	下半年	上半年	下半年
东方	10	15	35	45	50	55
华联	15	20	30	40	50	60
巨龙	15	25	40	50	55	70

试将三个商店在上半年及下半年的主要商品销售额分别写成两个矩阵,并用矩阵的加法求三个商店全年的主要商品销售额(用矩阵表示).

解 三个商店上半年主要商品的销售额可写成下面的矩阵 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & 35 & 50\\15 & 30 & 50\\15 & 40 & 55\end{pmatrix},$$

其中各行分别表示东方、华联、巨龙三个商店上半年销售的小百货、五金、服装三种商品的销售额.

下半年主要商品的销售额可写成下面的矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}15 & 45 & 55\\20 & 40 & 60\\25 & 50 & 70\end{pmatrix}.$$

三个商店全年的主要商品销售额用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示,则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10+15 & 35+45 & 50+55\\15+20 & 30+40 & 50+60\\15+25 & 40+50 & 55+70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 80 & 105\\35 & 70 & 110\\40 & 90 & 125\end{pmatrix}.$$

2. 数与矩阵相乘

定义 4 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积规定为 λ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素 a_{ij} 所得到的矩阵,记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$,即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\\lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

式(1.9)也可以倒过来应用,即可以从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中提取公因数 λ(理解为 A 的各元素的公因数 λ,可提写在矩阵前面).

数乘矩阵这种运算满足下列运算规律($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ,μ 为数),请读

者自己证明：

(1) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

(3) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法及数与矩阵相乘的运算，统称为**矩阵的线性运算**.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}$.

解

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\times0 & 2\times3 & 2\times3\\ 2\times(-4) & 2\times5 & 2\times6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\times(-1) & 3\times(-2) & 3\times0\\ 3\times4 & 3\times3 & 3\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-0-3 & -1-6-6 & 0-6+0\\ 2-(-8)+12 & 2-10+9 & 3-12+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -13 & -6\\ 22 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

习 题 1.1

1. 写出一个 4 阶对称阵、一个 4 阶反称矩阵与一个 4 阶对角阵.

2. 某工厂动力车间的两台设备 a_1,a_2 和车间内的另三台设备 b_1,b_2,b_3 的管道连接情况如图 1.1 所示，每条线上的数字表示连接两设备的不同管道总数. 由该图提供的管道连接信息可用矩阵形式表示(称之为**连通矩阵**)，以便存贮、计算和利用这些信息. 试用连通矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示 a_i 与 $b_j(i=1,2;j=1,2,3)$ 间的管道数；如果各设备间的管道总数都减少一半，试用连通矩阵 $\boldsymbol{D}$ 表示之.

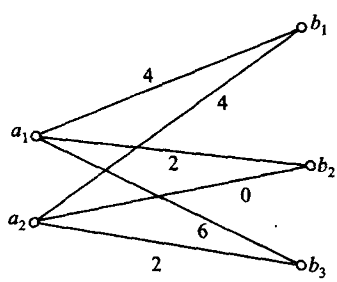

图 1.1

3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix},$$

求 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

4. 求 $\boldsymbol{X}$，使

$$\begin{pmatrix}1-a & b+1 & c\\ b & 2c-1 & 3\\ 1 & a+1 & 3-c\end{pmatrix}+\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a-3 & b-c & 2-c\\ a & 2b+c & 2\\ -1 & 1 & c\end{pmatrix}.$$

第一章 矩阵与行列式