刘坤林 总策划

W&W Education 水木艾迪 组编

考研数学应试导引与进阶

微积分 下

◆清华大学考研辅导班指定教材◆

2005

全国硕士研究生入学统一考试

应试导引与进阶丛书（2005版）

谭泽光 刘坤林 莫骄 主编

清华大学出版社

考研数学应试导引与进阶

2005

全国硕士研究生入学统一考试

应试导引与进阶丛书（2005版）

全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书(2005版)

考研数学应试导引与进阶
——微积分(下)

谭泽光　刘坤林　莫　骄　主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是作者根据2005年最新考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成。主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数、重积分、曲线积分、曲面积分、数项级数等，每部分均按照“知识综述与导引”、“问题集粹”、“模拟与自测题”等内容进行编排。

本书主要针对参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，同时可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试导引与进阶——微积分(下)/谭泽光，刘坤林，莫骄主编．—北京：清华大学出版社，2004.7

(全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书：2005版)

ISBN 7-302-08929-9

Ⅰ．考…　Ⅱ．①谭…　②刘…　③莫…　Ⅲ．微积分－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第061428号

出 版 者：清华大学出版社　　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：陈仕云

文稿编辑：崔军英

封面设计：秦　铭

版式设计：郑铁文

印 装 者：北京昌平环球印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×260　**印张**：16　**字数**：351千字

版　　次：2004年7月第1版　2004年7月第1次印刷

书　　号：ISBN 7-302-08929-9/O・373

印　　数：1～5000

定　　价：24.00元

丛书编委会

总策划 刘坤林

编　委 谭泽光　俞正光　刘坤林　葛余博　张慎德
胡天赐　舒　文　孔祥云　许建平

编委会成员简介

刘坤林

清华大学数学科学系教授，清华大学考研辅导班领军人物，全国考研数学辅导资深专家．清华大学考研辅导班主讲，清华大学 MPA 辅导班主讲．先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖．把握教学方向非常准确，教学用题代表性极强，屡屡命中考研真题．主编《大学数学——概念、方法与技巧》、《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等教材．讲课特点：富有启发性，对概念的阐述生动形象，精辟准确，得到同学们的高度评价．

谭泽光

清华大学数学科学系教授，多次获国家及省市级科技进步奖．专注考研数学辅导 10 多年，考研数学辅导资深专家，多次任北京地区考研数学阅卷质量检查专家组组长．任《高校应用数学学报》编委，1997 年开始担任国家工科基础课基地负责人．全国高校一类课程负责人，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，生动精辟．主编《微积分》（清华大学 21 世纪换代公共基础平台课教材），并著有《大学数学——概念、方法与技巧》．学员评价听谭老师的课“是一种享受，收获很大.”

俞正光

清华大学数学科学系教授，北京市一类课程负责人，长期担任清华大学考研辅导班线性代数主讲．对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，考研数学辅导资深专家，主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《全国工程硕士研究生入学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材．讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确．

葛余博

清华大学数学科学系教授．在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率与数理统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量可贵经验．清华大学考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有专门的深入研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活

运用知识，条理规范，重点突出准确，多次命中考研真题，受到同学一致欢迎.

张慎德

清华大学人文学院教授，长期从事马克思主义哲学的教学与研究，多次参加研究生入学政治考试的命题和阅卷工作. 对全国硕士研究生入学考试大纲与考查要求有专门的深入研究. 授课思路清晰、概念明确、条理性强，善于启发和指导学员结合各种类型问题理解基本原理，提高分析和解决实际问题的能力，受到学员一致好评.

舒　文

清华大学人文学院副教授，硕士生导师. 异军突起的考研辅导专家，长期从事毛泽东思想教学与研究，脱俗于乏味政治教学的典范，多次参加政治课辅导教材的编写. 辅导中贯彻少而精的原则，针对大纲的要求，着重培养考生应用基本原理分析解决问题的能力. 讲课幽默风趣，深入浅出，概念准确，重点突出，对考点把握率高，深受同学们的欢迎.

胡天赐

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学的教学与研究，北京地区考研政治阅卷组成员. 多次参加政治课辅导教材的编写，连续主讲研究生入学政治课考试中的政治经济学辅导. 授课深入浅出，条理清晰，概念准确，重点突出，深受同学欢迎.

孔祥云

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学和邓小平理论的教学与研究，多次参加政治课辅导教材的编写，长期进行各类研究生入学政治课考试中的邓小平理论辅导，北京地区考研政治阅卷组成员. 讲课热情投入，富有感召性，重点突出，针对性强，条理清晰，深受同学欢迎.

许建平

清华大学外语系教授，硕士生导师，英语考试命题、阅卷专家，长期从事研究生英语教学，对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，北京地区考研阅卷组质量检查专家组成员. 长期担任清华大学考研辅导班主讲，主编有《清华考研英语应试教程》等教材. 讲课特点：条理清楚，信息量大而准确，重点突出，阐述清晰，普遍受到同学欢迎.

编 者 的 话

全国硕士研究生入学统一考试是一种选拔性考试，不同于等级考试（如英语四级、六级考试）. 命题工作人员的任务是结合对基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的“陷阱”，以求把庞大的考试队伍从能力水平上区分出档次，进而实现国家选拔人才的目的. 作为一名考生的任务则是：在全面准确理解知识系统的前提下，努力提高识破命题陷阱的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态一举成功.

学习数学需要培养悟性，应试考研数学需要一定的数学知识洞察力，就像一个习练气功的学员，需要一个师父带他进入状态，学会套路. 所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握，而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要做到把握其准确性与完整性，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性. 没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性与交叉灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧.

本套《全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书》（以下简称《导引与进阶丛书》）的宗旨是：“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态.”这也就是清华大学考研辅导班一直遵循的教学宗旨.

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性. 在考试中，完全基础性题目一般占 60 分以上（满分 150 分），并且，基本知识点在综合题目中也占有重要的分量，基础性知识点的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误，最后造成的是全局性错误. 以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分，以数学为例，微积分中的所谓基本知识点包括初等函数的初等性质，极限存在的命题形式及命题属性（充分的？必要的？还是充要的?），极限的保序性及运算法则，函数在一点连续的定义，闭区间上连续函数的性质，构造导数定义的标准极限模式及其变形，一阶线性微分方程解的公式，常系数线性微分方程解的结构，多元函数的极限、连续与可微性的定义及其相互关系，各类积分的背景与性质等. 线性代数中的基本知识点包括：行列式、逆矩阵与伴随矩阵的计算及它们之间的相互关系，齐次与非齐次线性微分方程解的结构，矩阵的初等变换与秩的概念，向量组的线性相关与无关，向量组的秩与线性方程组解的结构之间的关系，特征值与特征向量的概念，线性变换、正交变换及二次型的标准化等. 概率统计中的基本知识点包括：随机事件的运算，五个古典概率的基本公式，独立性的概念，分布率，分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系. 复合随机函数的概念，数字特征的定义、背景与基本运算公式，简单随机样本及其数字特征等.

在考试中，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的.

例如，许多学生都会背出一个结论：一个函数的导数大于零时，该函数单调增加，而函数的导数小于零时，该函数单调减少. 但他们却忘记或忽略了这一结论描述的是一个函数的

全局性质，即该结论的前提是在一个区间上考虑问题．事实上只由一点处的导数正负号，不能决定函数的增减性．由函数在一点的导数值正负号只能决定函数的局部性质：函数在该点的值与该点两侧近旁某邻域内的函数值有大小的比较关系结论，即下述性质（可用导数定义与极限的保序性进行证明）：

“设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>(0)$，则存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$，对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)<f(0)$.”

再比如，极限运算法则是所有学过微积分的人所熟悉的内容．考虑命题：

“若在某一趋向下，两个函数都有极限，则这两个函数的和与差都有极限”，

这一命题的属性是：前者是后者的充分条件，当前者不成立时，后者结论不一定没有．在考试中，大量考生在极限运算法则这个频繁考点上犯错误．原因就是他们对这类基本概念与基础知识点的理解不准确或不完整，甚至是对基本知识点的理解有所扭曲．

《导引与进阶丛书》以最简洁的篇幅梳理数学三个学科中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者与考生高效率做到对基本概念与基础知识点理解的准确性、完整性，并逐渐过渡到掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练．对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析，对综合题目中知识点交叉的模式要有具体的了解与熟悉，直到具有敏感性．这样的训练会使你遇到个别难题时容易找到切入点与思路．

本套教材每个章节均按如下格式进行编排：

知识综述与导引　依据国家考研大纲中要求的重点，对知识模块给予简短综述，突出重点，详解难点，指出读者与考生容易忽略的薄弱环节与存在的弱点，必要时给出识破命题陷阱的重要提示．

问题集粹　以学生提问的方式，由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题，配以解答与导引，同时针对此类问题，配合若干典型例题，力图使读者牢固掌握对相应知识点与相关题型的处理能力．

模拟与自测题　每一章后，以典型练习题方式留给读者用以训练发挥的空间，强调教学双向互动过程．在书后给出答案与提示．（做题时请不要先看答案与提示）

书中所有例题与练习题，都是经过编者精心研究与讨论，进而设计与编排所成．这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累，以及对国家考试要求与试题类型深入研究的结果，具有重要的典型性与代表性．对于这些例题与练习题，读者可视自身情况选读或选做，但应注意两点：一是立足于独立思考与亲自动手练习，二是应将每一个题目作为一类问题，以达到触类旁通，以一当十，以不变应万变的目的，相信你自己会造就出属于你自己的居高临下的知识洞察力，在考场上去面对你并不陌生的试卷．

“天行健，君子应自强不息；地行坤，君子以厚德载物”（出自《易经》——中国十三经之一）．国学大师梁启超先生于 1925 年从中摘出“自强不息，厚德载物”八个字作为清华大学校训，一直延续至今．“自强不息”，无需再释．“厚德载物”乃以丰厚道德追求业务精益求精．多年来，清华大学的教师以此作为他（她）们对待工作的行为准则，尤其是对待学生．

参与本书编写的老师，均为清华大学在职教师，他（她）们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体，长期担任清华大学考研辅导班主讲，突出特点是具有双向了解：最了解国家考

试大纲与命题走向，最了解考生的状况与需求，有许多教材与专著出版，广大考生给了他（她）们很高的评价．同时，他（她）们也愿做广大考生和学生的良师益友．基于长期丰富的教学研究与授课经验的积累，通过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究，倾心编写出这套《导引与进阶丛书》，真诚希望这套教材能为广大考生考试成功奉献一份智慧，为在读大学生的学习提供一份帮助．

《导引与进阶丛书》的读者包括参加全国硕士研究生入学统一考试的考生，包括数学试卷一、二、三、四全体应试者以及大学本科在读学生，也可作为成人自考学员的参考书．

应特别指出的是，不少人认为，经济类考生只学经济类高等数学就够了．其实这是误导．试卷三、四的历年题目表明，除个别题目有一点经济术语之外，绝大部分题目的题型与难度都与试卷一、二相当，与试卷一、二共用部分题目，也是历年常有之事．那些少量含有经济术语的题目不会成为答卷障碍，少量涉及一些经济术语的题目，如最大利润、最小成本等，不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已，一个考生如果有较好的理工科数学基础，应答试卷三、四，将不会遇到任何困难．

教学成功的基础是教学双向互动，本教材贯穿了这一宗旨．我们对读者的建议是：在自己归纳已学知识的基础上，有选择地阅读并理解书内各章的“知识综述与导引”，包括例题分析与解答．对每章后的模拟与自测题，要立足于独立思考，动手练习，只在特别需要时，再去参考书后的答案与提示，如果你真正做到了与本教材之间的双向互动，那么成功肯定属于你．

北京水木艾迪教育研究发展有限公司与清华大学出版社的编辑们为本套教材的策划与出版做了大量有益的工作．清华大学数学科学系主管教学的李津教授，以及许多老师对本套教材的编写工作给予了真诚的鼓励与支持，在此向他们真诚致谢．

限于作者水平和时间，书内的疏漏与不当之处，敬请读者批评指正，以便重印和再版时予以改正．

编 者

2004 年 4 月 22 日于清华大学

目　　录

第 9 讲　向量代数与空间解析几何

知识综述与导引

向量代数与空间解析几何在微积分中处于工具性的地位，也就是说，这部分内容为微积分的一些概念与方法提供几何背景与直观理解．从这样的角度来归纳这部分内容：向量代数的重点在于向量的运算及其运算的几何意义；空间解析几何的重点在于几类常用的空间图形，主要是平面、直线、简单两次曲面等的方程．

这里的主要研究方法是“几何直观”与“代数运算”的结合与互动，即利用几何形像来分析关系，通过代数推导来寻求规律．因此向量代量与空间解析几何是“几何形像”与“代数演算”结合的桥梁．

具体的内容要点如下．

9.1　空间向量的表示

（1）定义：空间向量（以后简称向量）是既有大小又有方向的量．其背景是力、速度、位移、角速度、加速度等必须考虑其方向与大小的一些量．因此任何向量都必须有表示大小和方向的两个方面．

（2）向量的几何表示与单位向量：带箭头的直线段是向量的几何表示，通常记成黑体字母 $\boldsymbol{a}$．这里箭头表示方向，线段的长度表示大小，又称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记成 $|\boldsymbol{a}|$．在空间情况下方向的箭头表示只是一种示意，为此引出单位向量的概念．

在某一确定方向上，其模为 1 的向量称为**单位向量**，通常记成 $\boldsymbol{a}_0$，这里 $|\boldsymbol{a}_0|=1$．

任何与单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成：

$$\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0, \text{当 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{a}_0 \text{ 同向平行}, \\ -|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0, \text{当 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{a}_0 \text{ 反向平行}.\end{cases}$$

又当 $\boldsymbol{a}$ 是模不是零的向量时，则该方向上的单位向量可表示成：

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}, \tag{9.1}$$

同时有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0. \tag{9.2}$$

特别指出两点：

其一，两个向量只要方向相同模相等，则就是同一向量，即称为自由向量；

其二，模为零的向量称为**零向量**，这是一个特殊向量，实际上其方向是不确定的．

（3）向量的投影表示：在空间直角坐标系下，用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴和 z 轴正方向的单位向量，则任何一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用投影表示如下：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \tag{9.3}$$

其中 a_x，a_y 及 a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴，y 轴及 z 轴上的投影．这是向量的一种代数表示，这种表示的优点在于便于向量的各种运算，而不足之处是直观性差一些．在向量的投影表示下，向量的模是

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{9.4}$$

该方向的单位向量是

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \tag{9.5}$$

或表示为

$$\boldsymbol{a}_0 = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}, \tag{9.6}$$

其中

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \tag{9.7}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，α，β 和 γ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴和 z 轴正方向的夹角，其值在 0 到 π 之间．

有时空间一点 P 当坐标为 (x,y,z) 时，常用一个起点为原点，终点为 P 的固定向量

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{9.8}$$

表示，称之为**矢径**，或称位置向量．

另外，起点为 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，终点为 $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 可以表示成：

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{9.9}$$

如果将 A，B 点用矢径表示成：

$$\boldsymbol{r}_A = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_B = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}_2,$$

则线段 AB 上任一点 C（x，y，z）可以用参数 λ 表示成：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_C &= \boldsymbol{r}_A + \lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{r}_A + \lambda\boldsymbol{r}_B.\end{aligned} \tag{9.10}$$

9.2 向量的运算

向量有五种运算，分别是：加、减、数乘、点积、叉积和混合积．每种运算都有其几何意义、运算性质及在向量投影表示下的计算公式．

（1）向量的加减法

在几何上向量的加减法表示为平行四边形的对角线或三角形的另一边．若用投影表示两向量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则向量加减就与数量的加减联系起来了：

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}. \tag{9.11}$$

（2）向量的数乘（$\lambda\boldsymbol{a}$）

在几何上表示向量在同一方向上的伸缩，具体是：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向平行，$|\lambda\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向平行，$|\lambda \boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 就是零向量.

在代数上
$$\lambda \boldsymbol{a}=\lambda(a_x \boldsymbol{i}+a_y \boldsymbol{j}+a_z \boldsymbol{k})=\lambda a_x \boldsymbol{i}+\lambda a_y \boldsymbol{j}+\lambda a_z \boldsymbol{k}. \tag{9.12}$$

(3) 向量的点(内)积($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$)

点积的物理背景是力在一定位移下所做的功，在几何上可表示为一个向量在另一向量上的投影. 具体定义是
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta, \tag{9.13}$$
其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 下作功为 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$；向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影可表示为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_0$ 是 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量. 利用点积可以表示：

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模
$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}.$$

向量间夹角的余弦
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{9.14}$$

向量点积的代数运算式
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x \boldsymbol{i}+a_y \boldsymbol{j}+a_z \boldsymbol{k})\cdot(b_x \boldsymbol{i}+b_y \boldsymbol{j}+b_z \boldsymbol{k})\\&=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.\end{aligned} \tag{9.15}$$
即各同名投影乘积之和。向量的点积满足交换律与分配律.

(4) 向量的叉积($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$)

在物理上多用于表示角速度等向量；在几何上用于表示由两个向量产生的与之垂直的第三个向量. 叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个向量定义有两个方面，大小为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，而方向符合从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的右手法则：即向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 也垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且右手四指顺着 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$，其拇指方向为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向.

在代数上其运算可用行列式
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x \boldsymbol{i}+a_y \boldsymbol{j}+a_z \boldsymbol{k})\times(b_x \boldsymbol{i}+b_y \boldsymbol{j}+b_z \boldsymbol{k})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{9.16}$$
表示. 这个公式的推出，是由于叉积满足分配律及 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$. 特别重要的是，叉积不满足交换律，而有
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

(5) 向量的混合积($(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$)

混合积不是新运算，只是点积、叉积运算的混合，但在几何上表示了以三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为三个相邻边构成的平行六面体的代数体积. 如果三个向量 $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，则该体积为正，否则为负.

混合积的代数计算式为
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \tag{9.17}$$

由此可知，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. 通常将其简写成$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$，而且三

者的任何一次对换使其值反号，即

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

等等.

9.3 向量间几何关系的判断

利用向量的运算结果来判断向量间的几何关系，这是向量代数作为“工具”的重点内容. 这里的几何关系主要是指判断两向量的平行和垂直；求两向量间的夹角；一个向量在另一个向量上的投影以及判断三个以上向量是否共面等.

(1) 两向量平行的充要条件

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$对应投影成比例，

即
$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{9.18}$$

（向量 $\boldsymbol{b}\neq 0$，如果三个比例中有分母为零，则规定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相应的投影为零）.

(2) 两向量垂直的充要条件

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0. \tag{9.19}$$

(3) 三向量共面的充要条件

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow\exists\lambda_i$ 不全为 0，使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 线性相关.

$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0. \tag{9.20}$$

(4) $\boldsymbol{b}$ 在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{9.21}$$

(5) 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角 θ 的计算

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{9.22}$$

9.4 平面方程与直线方程

(1) 平面方程

若给定平面 Π 上一点 M_0 及一个垂直于该平面的非零向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 称为该平面的**法线向量**. 这样，动点 P 在平面 Π 上的充要条件是向量$\overrightarrow{PM_0}\perp\boldsymbol{n}$，或者等价地表示为

$$\overrightarrow{PM_0}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

这就是平面方程的向量表示.

若记 $\boldsymbol{n}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{M}_0$ 与 P 的坐标分别为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 与 $(x,\ y,\ z)$ 则

$$\overrightarrow{PM_0}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}.$$

由此可得，平面 Π 的方程是一个三元一次方程：

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \tag{9.23}$$

这就是平面方程的**点法式**.

反过来，对任何三元一次方程

$$Ax + By + Cz = d, \tag{9.24}$$

总可以找一点 (x_0, y_0, z_0) 使得

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = d.$$

这样上式可改写成

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

这说明任何三元一次方程，其图形都是平面，该平面的法线向量是

$$\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}. \tag{9.25}$$

重要的结论是：空间平面的方程是三元一次方程，任何三元一次方程的图形都是空间平面.

(2) 直线方程

当给定直线 L 上一点 M_0 和直线的方向 τ 时，直线的特征性质是：任何直线上的点 P 与 M_0 的联线必与直线方向平行，即 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \tau$. 若令 $P(x, y, z)$，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\tau = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$，利用判断两向量平行的两个充要条件可以得到相应的两种形式的直线方程.

1° 直线的标准式

由 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \tau$，可知 $\overrightarrow{M_0P} \times \tau = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

由每一分量为零，即可推出

$$\begin{cases} n(y - y_0) = m(z - z_0), \\ l(z - z_0) = n(x - x_0), \\ m(x - x_0) = l(y - y_0). \end{cases}$$

整理成对称的形式，得到

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{9.26}$$

这就是直线方程的标准式，或称点向式.

2° 直线的参数式

由 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \tau$，则存在 t，使得 $\overrightarrow{M_0P} = t\tau$，即

$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \\ z - z_0 = nt. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{9.27}$$

这就是直线的参数式方程.

3° 直线的交面式

由于直线又可看作两平面的交线，因此用两个通过直线 L 的平面也可表示直线方程，即

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases} \tag{9.28}$$

在直线的这种表示中，该直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}$ 必垂直这两个平面的法线向量，因而有

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}. \tag{9.29}$$

附带指出，若将两个平面方程

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \text{ 与 } a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

作线性组合，得到的方程

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0 \tag{9.30}$$

仍是平面方程，在几何上表示通过以上两平面交线 L 的所有平面，称为过 L 的平面束方程.

(3) 平面、直线间的相互关系

这种相互关系是指平行、垂直、相交等几何位置关系. 判别这种关系的依据是平面的法线向量、直线的方向向量之间的关系.

两平面间、两直线间是否垂直与平行根据对应的两平面的法线向量、两直线的方向向量是否垂直与平行来判断.

但直线与平面间是否垂直则是根据它们对应的方向向量与法线向量是否平行来判断；而直线与平面的平行是根据对应向量的垂直来判断.

直线、平面间的夹角，也是根据直线的方向向量、平面的法线向量间的夹角来确定.

关于直线、平面的相交与否，在代数上即为线性方程组的有解问题，这在线性代数中已有结论，但对于直线、平面问题来说，相应地有简明易懂的几何解释. 此处只讨论判别不平行的两条空间直线 L_1 和 L_2 是否相交的条件.

若

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\quad \boldsymbol{\tau}_1=l_1\boldsymbol{i}+m_1\boldsymbol{j}+n_1\boldsymbol{k},$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},\quad \boldsymbol{\tau}_2=l_2\boldsymbol{i}+m_2\boldsymbol{j}+n_2\boldsymbol{k},$$

再记 $\boldsymbol{M}_1$ (x_1, y_1, z_1)，$\boldsymbol{M}_2$ (x_2, y_2, z_2)，其中 $\boldsymbol{\tau}_1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2$ 不平行，则可得出 L_1 与 L_2 相交的充要条件是三个向量 $\boldsymbol{\tau}_1$，$\boldsymbol{\tau}_2$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}$ 共面，即

$$(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2})=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0. \tag{9.31}$$

9.5 二次曲面及几种特殊曲面

这一部分的重点在于通过给定的二次方程，特别是几类典型的二次曲面的方程，了解其空间曲面的形状，并作出简单的示意图. 对于稍微一般的二次方程，应能运用平行于坐标平面的“平行平面截割法”来确定该空间曲面的大致形状与位置. 最常遇到的二次曲面如下.

(1) 球面与椭球面

球面：球心在 P_0 (x_0, y_0, z_0)，半径为 $R>0$ 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \tag{9.32}$$