实分析与泛函分析引论

李国祯　主编

科学出版社
北京

内容简介

本书共九章，分为两大部分. 前四章为实变函数部分，主要介绍了Lebesgue测度和积分论的核心内容；后五章为线性泛函分析部分，主要介绍了三大空间——距离空间、Banach空间、Hilbert空间及其上的有界线性算子的基础理论，其中包括线性泛函分析三大基本定理等.

本书可作为高等院校数学专业教材，也可供相关研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析引论/李国祯主编. —北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-014561-5

Ⅰ. 实… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①实分析-高等学校-教材 ②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第113784号

责任编辑：杨瑰玉

责任印制：高 嵘/封面设计：李梦佳

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2004年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2004年12月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1～4 000 字数：278 000

定价：18.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

目前我国高等教育已从精英教育向大众化教育转变，教学的对象发生了较大的变化，教学要求也有所区别。我们在教学过程中发现以培养数学精英为主的教材内容偏难、偏深、偏多，学生普遍感到难学，教师也感到难教。为此，我们决定编写一本适合目前教学实际情况的简明教材，供学生参考。我们力求在保持教育部颁发的该课程教学大纲的核心基本内容的前提下进一步贯彻少而精的原则，把该课程基础性和常用的必要知识介绍给读者，使他们获得进一步学习时所必需的基础；同时尽可能做到通俗易懂、便于自学，把该课程的概念、理论和已学过的数学分析、解析几何、线性代数等课程紧密联系起来，以避免让读者觉得本课程内容过于抽象、难于理解；每章配置的习题紧密结合基本概念、基本知识和基本方法的理解和应用，选择了一些通过自己努力能独立完成的练习题，数量适当，使读者有信心学好这门课程。

本书前四章为实变函数部分，主要介绍了 Lebesgue 测度和积分论的核心内容，作为数学类本科专业必修部分；后五章为线性泛函分析部分，主要介绍了三大空间——距离空间、Banach 空间、Hilbert 空间及其上的有界线性算子的基础理论，其中包括线性泛函分析三大基本定理等内容，这部分作为选修内容。

本书由李国祯主编，参加编写的有罗南晨、郑雄军、叶中秋、董祥南等。研究生段华贵、吴克晴也为本书付出了辛勤的劳动。

本书得到江西师范大学的大力支持和关怀，我们深表谢意。

由于我们水平有限，书中错误与疏漏之处在所难免，希望读者及同行不吝赐教。

编　者

2004 年 6 月于南昌

目 录

第一章 集合与点集 …… 1

§1 集合及其运算 …… 1

§2 一一对应和基数 …… 7

§3 可数集与连续基数的点集 …… 12

§4 n 维欧氏空间,开集与闭集 …… 16

§5 直线上的开集、闭集和完备集 …… 20

§6 点集的距离与隔离性定理 …… 23

§7 半序集与 Zorn 引理 …… 25

习题 …… 26

第二章 Lebesgue 测度 …… 28

§1 点集的外测度 …… 29

§2 可测集及其性质 …… 34

§3 可测集类的构成 …… 42

§4 不可测集 …… 47

§5 乘积空间 …… 49

习题 …… 55

第三章 可测函数 …… 58

§1 可测函数的定义 …… 58

§2 可测函数的运算 …… 61

§3 可测函数列的几乎处处收敛性及等价函数 …… 65

§4 可测函数列的依测度收敛性 …… 67

§5 可测函数的结构和 Лузин 定理 …… 74

§6 Weierstrass 定理 …… 78

习题 …… 81

第四章 Lebesgue 积分理论 …… 83

§1　有界可测函数Lebesgue积分的引入 …………………… 83
§2　有界函数Lebesgue积分的基本性质 …………………… 88
§3　Lebesgue积分和Riemann积分的关系 ………………… 95
§4　Lebesgue积分的几何意义 ………………………………… 100
§5　非负函数的Lebesgue积分 ………………………………… 102
§6　一般函数的Lebesgue积分 ………………………………… 110
§7　积分极限定理 ……………………………………………… 119
§8　Fubini定理 ………………………………………………… 128
§9　Lebesgue不定积分 ………………………………………… 134
习题 …………………………………………………………… 143
第五章　距离空间 ………………………………………… 147
§1　距离空间的基本概念及例子 …………………………… 147
§2　距离空间中连续映射 …………………………………… 155
§3　距离空间的完备性 ……………………………………… 157
§4　距离空间的可分性 ……………………………………… 165
§5　距离空间的列紧性 ……………………………………… 167
§6　压缩映射原理及其应用 ………………………………… 176
习题 …………………………………………………………… 180
第六章　Banach空间和有界线性算子 ………………… 182
§1　赋范线性空间与Banach空间 …………………………… 182
§2　有界线性算子 …………………………………………… 203
§3　有界线性算子的基本定理 ……………………………… 211
§4　有界线性算子的正则集与谱 …………………………… 223
习题 …………………………………………………………… 229
第七章　有界线性泛函 …………………………………… 232
§1　有界线性泛函与共轭空间 ……………………………… 232
§2　有界线性泛函的延拓 …………………………………… 239
§3　共轭算子 ………………………………………………… 246
§4　弱收敛和弱*收敛 ………………………………………… 251
习题 …………………………………………………………… 255

第八章　全连续算子 …… 256
§1　全连续算子的概念及性质 …… 256
§2　全连续算子谱分析(Riesz-Schauder 理论) …… 260
习题 …… 268
第九章　Hilbert 空间和自共轭算子 …… 270
§1　Hilbert 空间 …… 270
§2　直交性与投影定理 …… 275
§3　内积空间中的直交系 …… 279
§4　Hilbert 空间的自共轭性 …… 289
§5　Hilbert 空间上的共轭算子 …… 291
§6　Hilbert 空间上的自共轭算子 …… 294
§7　Hilbert 空间上全连续自共轭算子 …… 301
§8　投影算子 …… 305
§9　正算子及其平方根 …… 312
§10　自共轭算子谱分解简介 …… 315
习题 …… 329
主要参考文献 …… 331

第一章　集合与点集

集合论是实变函数论的基础，它是研究集合的一般性质的，属于数学基础的一个分支. 我们在这里介绍有关集合论的一些基本知识. 由于读者在中学和大学的其他基础课(如数学分析、高等代数)中已经接触到集合论，对有些结论我们就述而不证.

在实变函数论中，我们要研究 n 个自变量的实变函数，因此我们在本章还要对特殊的集合即 n 维空间的点集的相关理论作一些介绍.

§1　集合及其运算

集合是数学中的一个基础概念. 我们通常用"具有某种特定性质的对象的全体"来加以描述. 当集合 A 是具有某种性质 P 的对象全体时，我们常用如下形式来表示：

$$A=\{x \mid x\text{具有性质}P\}$$

例如，若 A 是大于 -1 小于 1 的一切实数的集合，确定集合 A 的性质是 $|x|<1$，A 可表示为

$$A=\{x \mid |x|<1\}$$

又设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数(如图 1-1)，A 表示 $[a,b]$ 中所有使 $f(x)$ 的值不小于 α 的一切 x 所组成的集合，则 A 可表示为

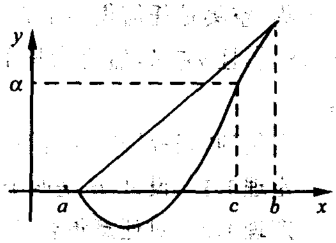


图 1-1

$$A=\{x \mid f(x)\geqslant\alpha,\quad x\in[a,b]\}$$

显然在图 1-1 的情形 $A=[c,b]$.

集合中每个对象称为集合的元素. x 是 A 中的元素记作 $x\in$

A，否则记作$x \overline{\in} A$或$x \notin A$. 值得注意的是$x \in A$与$x \overline{\in} A$必居且仅居其一，也就是说我们使用集合概念时哪些对象是它的元素必须是明确的. 通常用大写字母表示集合如A、B、C等，用小写字母表示它们的元素如x, y, z等.

例如若$\mathbf{R}^1$表示全体实数构成的集合，每个实数x就是集合的元素. 一切自然数组成的集合$\mathbf{N}$中，每个自然数都是它的元素，例如$3 \in \mathbf{N}$而$\frac{1}{2} \overline{\in} \mathbf{N}$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$. 空集或只含有有限个元素的集合称为**有限集**，不是有限集的集合称为**无限集**.

例如方程$x^2+1=0$的全体实数根所组成的集就是一个空集. 由自然数1,2,3,4所组成的集$\{1,2,3,4\}$是一个有限集. 前面提到的全体自然数$\mathbf{N}$和全体实数的集合$\mathbf{R}^1$都是无限集的例子.

设A、B是两个集，若A和B的元素完全相同，就称A和B相等，记作$A=B$(或$B=A$). 例如设A表示方程$x^2-1=0$的根组成的集合，$B=\{-1,1\}$，则$A=B$.

若集合A的元素都是集合B的元素，就称A是B的**子集**，记作$A \subset B$(或$B \supset A$)，读作A包含于B(或B包含A). 若$A \subset B$，而B中有元素b不属于A，称A是B的**真子集**. 如正整数集是有理数集的真子集. 空集是任何集的子集. 事实上，设若$\varnothing \subset A$不成立，必有元素$a \in \varnothing$且$a \overline{\in} A$，然而$\varnothing$是不包含任何元素的空集，这就产生矛盾.

由集的"相等"与"包含"的定义，容易得到如下的定理：

定理 1.1 设A、B是两个集合，则$A=B \Leftrightarrow A \subset B$且$B \subset A$.

定理 1.2 对任意集合A、B、C，有

(1) $A \subset A$;

(2) 若$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$.

在集合论中往往要考虑集合与集合之间的关系，在研究函数性质时也需要将具有某些性质的集合作合并与分解. 例如集合$\{x \mid |x|>1\}$实际上是两个集合$A_1=\{x \mid x>1\}$和$A_2=\{x \mid x<-1\}$

合并而成的，因此必须引进集合的一些基本运算.

我们介绍四种集合的运算，它们是“并”、“交”、“余”和“差”.

定义1.1 设A和B为二集合，集合S仅仅包含A与B的所有元素，称S为集合A与B的**并集**，记为$S=A\cup B$. 于是

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例如$\{a,b,c\}\cup\{a,b,d\}=\{a,b,c,d\}$. 由并集的定义可得

(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup B=B\cup A$;

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(4) $A\cup B\supset A, A\cup B\supset B$.

定义1.2 设A和B为二集合，集合P仅仅包含A和B的所有共同元素，称P为A与B的**交集**，记为$P=A\cap B$. 于是

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如$\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}=\{a,b\}$. 由交集定义可以得

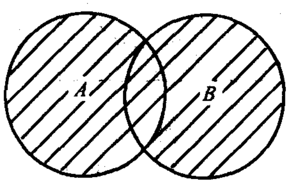
(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap B=B\cap A$;

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$;

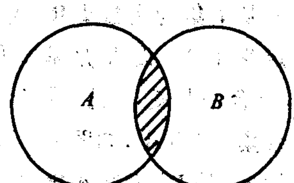
(4) $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$.

两集的并集和交集可以分别用图来表示(图1-2，1-3).



$A\cup B$

图1-2



$A\cap B$

图1-3

对于并集和交集的混合运算，我们有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

“并”和“交”运算可以推广到一族集合上去. 设$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是

任意一族集合，其中λ是集合的**指标**，它在某个固定的**指标集**Λ中变化，由一切$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$的所有元素组成的集称为这族集合的并集，记为$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，即

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid \text{有 }\lambda\in\Lambda,\text{使 }x\in A_\lambda\}$$

由一切$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$的共有元素组成的集合称为这族集合的交集，记为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，那么

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid \text{对每一个 }\lambda\in\Lambda,\text{都有 }x\in A_\lambda\}$$

例1 设$A_i=\left[0,2-\dfrac{1}{i}\right]$，$i=1,2,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=[0,2),\quad \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=[0,1]$$

例2 设$f(x)$是定义于$\mathbf{R}^1$上的实函数，a是一常数，则

$$\{x\mid f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid f(x)\geqslant a+\frac{1}{n}\right\}$$

$$\{x\mid f(x)\geqslant a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid f(x)>a-\frac{1}{n}\right\}$$

其证明作为习题.

通常我们都在一个事先确定的集合上来研究和讨论一些问题，这个集合就称为**基本集**. 例如我们有时取基本集为实数集$\mathbf{R}^1$或$\mathbf{R}^n$.

定义1.3 设X是基本集，$A\subset X$，集合$\{x\mid x\in X\text{ 且 }x\overline{\in}A\}$称为$A$的**余集**，记为$A^c$，如图1-4所示.

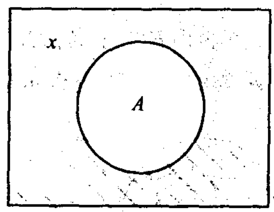


图1-4

例3 取$\mathbf{R}^1$为基本集，集合$A=\{x\mid |x|<1\}$的余集A^c是如下两个集的并集，即$A^c=\{x\mid x\geqslant1\}\cup\{x\mid x\leqslant-1\}$.

例4 一切有理数的集合对于全体实数的集$\mathbf{R}^1$的余集是一切无理数所构成的集.

需要注意的是基本集X的取法不同，相对X的余集是不相同的. 在例3中如果我们取$X=\{x\mid |x|\leqslant1\}$，则$A^c=\{-1,1\}$.

定义1.4 设A与B为二集合，集合R仅包含属于A而不属于

B 的一切元素，则称 R 为 A 与 B 的差集，记为 $R=A-B$ 或 $A\backslash B$. 于是 $A-B=\{x \mid x\in A$ 而 $x\notin B\}$.

例 5 设 $A=[0,1]$，$B=\left[\frac{1}{2},2\right]$，则 $A-B=\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

当集合 A 与 B 的包含关系不同，$A-B$ 是不一样的. $A-B$ 的各种情形见图 1-5.

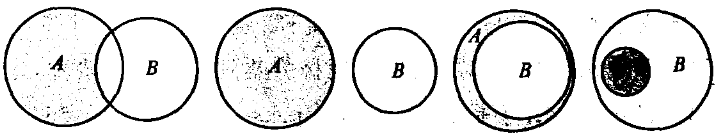


图 1-5

一般来说 $(A-B)\cup B$ 未必等于 A，读者可以证明 $(A-B)\cup B=A$ 的充要条件是 $B\subset A$.

关于交集与差集的混合运算，我们有以下的等式：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

定理 1.3 (De Morgan 公式)

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$$

证明 由定理 1.1 证明两集合相等，仅要证明两集合互相包含. 我们以第一式为例，为方便我们记左方的集为 E，右方集为 F.

若 $E\neq\varnothing$，设 $x\in E$，则 $x\notin E^c=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 由并集定义可知对任意 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $x\notin A_\lambda$. 因此对任意 $\lambda\in\Lambda$，$x\in A_\lambda^c$. 由交集定义可知 $x\in F$. 这就表明 $E\subset F$.

反之，当 $F\neq\varnothing$，设 $x\in F$，则对一切 $\lambda\in\Lambda$，$x\in A_\lambda^c$，由余集定义对一切 $\lambda\in\Lambda$，$x\notin A_\lambda$，于是 $x\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，这就给出 $x\in E$，从而得到 $F\subset E$. 这样定理成立.

下面我们考虑集列的极限. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列集，若满足条件 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，称这样一列集为**单调增加集列**. 设

$$A_n=\left[0,2-\frac{1}{n}\right],\quad n=1,2,\cdots$$

显然$\{A_n\}$就是单调增加集列.

同样可以定义**单调减少集列**,即一列集满足条件$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$. 例如设$A_n=\left[0,\frac{1}{n}\right]$,$n=1,2,\cdots$,则$\{A_n\}$就是单调减少集列.

定义 1.5 设$\{A_n\}$是一个任意集列,属于集列$\{A_n\}$中无穷多个集的那种元素的全体所组成的集称为集列$\{A_n\}$的**上限集**,记为$\overline{\lim\limits_n} A_n$或$\limsup\limits_n A_n$. 于是$\overline{\lim\limits_n} A_n=\limsup\limits_n A_n=\{x\mid x$ 属于无穷多个集$A_n\}$.

定义 1.6 设$\{A_n\}$是一个任意集列,属于集列$\{A_n\}$中从某个指标n_0(n_0不是固定的,与x有关)以后的一切集A_{n_0+k}的那种元素x的全体所组成的集称为集列$\{A_n\}$的**下限集**. 记为$\underline{\lim\limits_n} A_n$或$\liminf\limits_n A_n$. 于是$\underline{\lim\limits_n} A_n=\liminf\limits_n A_n=\{x\mid$存在自然数$n_0$,使$x\in A_{n_0+k}$,$k=0,1,2,\cdots\}$.

显然$\underline{\lim\limits_n} A_n\subset\overline{\lim\limits_n} A_n$.

当$\underline{\lim\limits_n} A_n=\overline{\lim\limits_n} A_n=A$时,称集列$\{A_n\}$**收敛**于$A$,记作$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$.

例 6 1)设$A_n=\left[\frac{1}{n},3+(-1)^n\right]$,$n=1,2,3,\cdots$,则$\underline{\lim\limits_n} A_n=(0,2]$,$\overline{\lim\limits_n} A_n=(0,4]$. 此时$\underline{\lim\limits_n} A_n\neq\overline{\lim\limits_n} A_n$.

2)设$A_n=\left[\frac{1}{n},3\right]$,$n=1,2,\cdots$,则$\underline{\lim\limits_n} A_n=\overline{\lim\limits_n} A_n=\lim\limits_{n\to\infty} A_n=(0,3]$.

由上限集和下限集的定义可以得到:

$$\overline{\lim_n} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\underline{\lim_n} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

现在证明第一式. 若 $x\in\overline{\lim_n}A_n$，则有无穷多个 n，使 $x\in A_n$. 对任意 n，在 $A_n, A_{n+1},\cdots$ 中一定有包含 x 的集合，因此 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$. 由于 n 的任意性，所以 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$. 反之，若 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$，则对任意 n，$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$，因此必有 $m\geqslant n$ 使 $x\in A_m$. 这表明使 $x\in A_n$ 的指标 n 必有无穷多个，因此 $x\in\overline{\lim_n}A_n$.

第二式的证明，请读者按定义自己作出.

对于单调集列，有如下定理：

定理 1.4 单调集列是收敛的. 并且若 $\{A_n\}$ 是单调增加的，则 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$；若 $\{A_n\}$ 是单调减少的，则 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明 我们仅证第一个结论，后一结论请读者自证. 设 $\{A_n\}$ 是单调增加集列，若 $x\in\overline{\lim_n}A_n$，则 x 属于无穷多个 A_n，由于单调性 x 必属于某个 n_0 以后的所有 A_n，因此 $x\in\underline{\lim_n}A_n$. 由于 $\underline{\lim_n}A_n\subset\overline{\lim_n}A_n$，我们就有 $\overline{\lim_n}A_n=\underline{\lim_n}A_n$. 这表明单调增加集列是收敛的. 若 $x\in\lim_{n\to\infty}A_n$，显然 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 反之，若 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，当然 $x\in A_{n_0}$，由单调性可知 $x\in A_{n_0+k}$，$k=0,1,2,\cdots$，这表明 $x\in\overline{\lim_n}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$. 这就证明 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

我们再介绍集的特征函数的定义. 设 X 是一个非空的集，A 是 X 的一个子集，作 X 上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A\\ 0, & \text{当 } x\in X-A\end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$ 为集 A 的特征函数.

§2 一一对应和基数

在集合论中一个基本问题是一个集合元素的多少.

设 A 是有限个元素组成的集合，A 中元素的多少就是 A 中元素的个数. 空集 $\varnothing$ 的元素个数是零. 而非空的有限集元素个数一定是一个正整数. 为了求得元素个数，只要逐个地去数一下就可得到. 要比较两个有限集合 A、B 它们元素个数是否相同，可通过上面提到的方法数一下每个集合元素个数，看所得的正整数是否相同. 但是我们也可以不通过数的方法来解决问题. 例如

$$A=\{a,b,c,d,e\}$$

$$B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$$

我们只要排出下面的表

A:	a	b	c	d	e
B:	α	β	γ	δ	ε

虽然不去数 A 与 B 的元素个数，我们也知道它们的元素个数是相等的.

这种比较的方法实质是对于集 A 的每个元素，集 B 中有一个且只有一个元素与它对应，反之也是如此. 这种比较方法的优点在于它能推广到无限集的元素个数比较上去.

定义1.7 设 A 与 B 为二集. 若有对应的法则 φ 存在，使 A 中任一元素 a，有 B 的惟一元素 b 与之对应；并且 B 中任一元素 b，也有 A 中惟一元素 a 与之对应，此时称法则 φ 建立了 A 与 B 的一个**一一对应**，或称 φ 是 A 到 B 上的一一映射，简称**一一映射**.

定义1.8 设 A、B 是两个集，若存在 A 到 B 上的一个一一对应 f，则称 A 与 B 是对等的，或具有相同的基数(势)，记为 $A\sim B$. 我们规定 $\varnothing\sim\varnothing$.

例1 设 $\mathbf{N}$ 是一切自然数的集合，M 是一切负整数的集合. 令每个自然数 n 对应于负整数 $-n$，则 $\mathbf{N}$ 与 M 之间建立了一一对应，因此 $\mathbf{N}\sim M$.

例2 设 A 与 B 是两个同心圆周上的点集如图1-6. 通过从圆心作射线的方法容易看到 A 与 B 之间存在一个一一对应，因此 $A\sim B$. 值得注意的是若将此二圆周展开为线段，则此二线段的长度

并不相同. 这个例子指出一条较长的曲线并不比一条较短的曲线有“更多的点”.

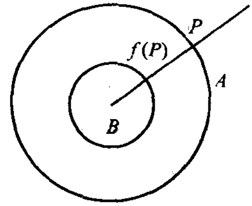


图 1-6

有了对等的概念,我们可以给有限集、无限集下严格的定义.

定义 1.9 设 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}(n=1,2,3,\cdots)$. 若集 A 为空集或与某个 M_n 对等,则称 A 为有限集,称 n 为 A 的元素个数. 不是有限集的集称为无限集.

例 3 设 $\mathbf{N}$ 是一切自然数所成的集,而 N_1 是一切正偶数所组成的集. 容易看出 $N_1\subset\mathbf{N}$,也就是说 N_1 是 $\mathbf{N}$ 的一个真子集. 现在我们来建立 $\mathbf{N}$ 与 N_1 的一一对应. 令 1 对应于 2,2 对应于 4,…,一般地,令 n 对应于偶数 $2n$,于是 $\mathbf{N}\sim N_1$. 这个例子表明一个集合可以和它的真子集一一对应. 当然对于有限集来说,这是不可能的. 可以证明,任何无限集必能与它的一个真子集对等(见后面定理 1.5),这是无限集的特征. 因此我们可有如下的等价定义.

定义 1.9′ 凡能与其某一个真子集对等的集称为无限集,不是无限集的集称为有限集.

显然对等关系“$\sim$”有如下性质:

(1) $A\sim A$(自反性);

(2) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$(对称性);

(3) 若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$(传递性).

此外还有下面的一个性质.

(4) 设具有同一指标集 Λ 的两个集族 $\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 和 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$,每个集族中的集都是两两不相交的. 如果对任意 $\lambda\in\Lambda$,$A_\lambda\sim B_\lambda$,则 $A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim B=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.

性质(1),(2),(3)可由定义直接得到,性质(4)可通过作出 A 与 B 之间的一个一一对应来证明.

证明 我们先作出 A 到 B 的一个映射,再证明它是一一映射.

对任意 $\lambda\in\Lambda$,$A_\lambda\sim B_\lambda$,因此存在 A_λ 到 B_λ 的一一映射:

$$f_\lambda: A_\lambda \to B_\lambda, x \mapsto f_\lambda(x)$$

作映射f:任意$x\in A$,必存在惟一的$\lambda\in\Lambda$,使$x\in A_\lambda$,这是因为A_λ两两互不相交,定义$f(x)=f_\lambda(x)$.

若$x_1,x_2\in A,x_1\neq x_2$,当x_1,x_2属于同一个A_λ时,因$f(x_1)=f_\lambda(x_1),f(x_2)=f_\lambda(x_2)$,而$f_\lambda$是一一对应,因此$f(x_1)\neq f(x_2)$.当$x_1$与$x_2$属于不同的$A_\lambda$时,我们设$x_1\in A_{\lambda_1},x_2\in A_{\lambda_2},\lambda_1\neq\lambda_2$,此时$f(x_1)=f_\lambda(x_1)\in B_{\lambda_1},f(x_2)=f_{\lambda_2}(x_2)\in B_{\lambda_2}$.因$\{B_\lambda\}$也是两两互不相交的,我们得到$f(x_1)\neq f(x_2)$.此外,对任意$y\in B$,必有某$\lambda\in\Lambda$,使$y\in B_\lambda$,于是存在$x\in A_\lambda$,使$f_\lambda(x)=y$,即$f(x)=y$.所以$f(x)$是$A$到$B$上的一一对应.

有了对等或基数的概念,就可以比较两个集的元素的"多少"了.一个集合的基数是所有与之对等的集合所共同有的一个属性.用$\overline{\overline{A}}$表示集合A的基数.A与B有相同的基数记为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$,由定义它等价于$A\sim B$.设$n$是一个自然数,$M_n=\{1,2,\cdots,n\}$.若$A$与某个$M_n$对等,那么$A$为有限集,规定$\overline{\overline{A}}=n$.集合的基数概念是有限集元素个数的拓广.无限集有如下的性质:

定理1.5 无限集必与它的一个真子集对等.

证明 记此无限集为A.在A中任取元素a_1,集$A-\{a_1\}$不是空集,因为A是无限集.再从$A-\{a_1\}$中任取元素a_2,集$A-\{a_1,a_2\}$也决不是空集.可继续下去,从A中取出一列元素$a_1,a_2,\cdots$,记$A-\{a_n|n=1,2,\cdots\}=A_1$.在$A$中取出一个真子集$\{a_2,a_3,\cdots\}\cup A_1=\widetilde{A}$.作$A$与$\widetilde{A}$的一个映射$\varphi$:

$$\varphi(a_i)=a_{i+1},\quad i=1,2,\cdots$$

$$\varphi(x)=x,\quad x\in A_1$$

显然,φ是A到$\widetilde{A}$上的一一对应,也就是A与其真子集$\widetilde{A}$对等.

关于基数的比较,我们给出:

定义1.10 设A、B是两个集合,如果A和B不对等,但存在B的子集B^*与A对等,则称$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

按上述定义是否会出现$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$同时成立的情况?下面

的定理说明这是不可能的.

定理 1.6(Bernstein 定理) 若 A,B 是两个集合,如果存在 A 的子集 A_0,B 的子集 B_0,使 $A\sim B_0$,$B\sim A_0$,则 $A\sim B$.

证明 设 φ 是 A 与 B_0 之间,ψ 是 B 与 A_0 之间的一个一一对应,令

$$
\begin{aligned}
&A-A_0=A_1, \quad \varphi(A_1)=B_1,\\
&\psi(B_1)=A_2, \quad \varphi(A_2)=B_2,\\
&\psi(B_2)=A_3, \quad \varphi(A_3)=B_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

由于 φ 与 ψ 都是一一映射,故 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 是互不相交的,$B_1,B_2,B_3,\cdots$ 等也互不相交.显然由映射 φ 知 $A_n\sim B_n$,$n=1,2,\cdots$,故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.另一方面由映射 ψ 知 $B\sim A_0$,$B_k\sim A_{k+1}$,$k=1,2,\cdots$.故 $B-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\sim A_0-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.从而 $A=(A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\sim(B-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=B$.定理得证.

Bernstein 定理也是证明两集合对等的有力工具.

推论 设 $A\subset B\subset C$,若 $A\sim C$,则 $B\sim C$.

这是因为 $C\sim A$,$A\subset B$,又 $B\sim B$,$B\subset C$,根据定理有 $B\sim C$.

定理 1.7 设 A、B 是两集合,则下面三个关系式

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

中任何两个不能同时成立.

证明 (1) 当 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 时,$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 都不会成立,即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$,$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 不会同时成立.

(2) 若 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 同时成立.由 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$,必有 B 的子集 B^*,使 $A\sim B^*$;由 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$,又有 A 的子集 A^*,使 $A^*\sim B$.于是由定理 1.6,$A\sim B$,这与 A、B 不对等矛盾.故 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$ 也不能同时成立.证毕.

我们指出,对任意两个集合 A 和 B,定理 1.7 中的三个关系式有且仅有一个成立.要证明它,只需要证明上述三个关系式至少有