恒谦教学研究

恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

e讲e练

丛书

丛书主编　方可

高二数学（上）

北京教育出版社

恒谦教学研究

学与备考研究中心研究成果
牌重点中学特高级教师编写

e讲e练

丛书

高二数学 上

丛书主编 方 可
本册主编 沙 捷
撰稿人 王 莉
胡 旭

北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果

全国名牌重点中学特高级教师编写

e讲e练丛书

e讲e练丛书
高二数学(上)
GAOER SHUXUE(SHANG)
丛书主编 方 可
*
北 京 教 育 出 版 社 出 版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网 址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
西安信达雅印务有限责任公司印刷
*
787×960 16开本 15.75印张 394 000字
2004年6月第4版 2004年6月第1次印刷
印数:1－10 000
ISBN 7－5303－2420－9
G·2393 定价:18.00元

前 言

问题一 面对日益沉重的学习压力，如何实现从应试教育向素质教育的顺利转变，真正达到减负的效果？

问题二 针对各门学科的最新教材，如何编写教辅图书，才能起到行之有效的助学作用？

问题三 “讲”是纲，“练”是目，如何轻松跳出题海，做到“讲”中有“道”、“练”中有“法”？

本丛书正是基于合理解决以上三大问题、顺应教学改革、照应最新教材的产物，体例设计科学、系统、新颖，完全与课时配套，每单元后设计有能力立体提升的综合内容，力求做到“易讲易练”。它自2001年秋季上市后，得到了无数热心读者的关注。今年我中心对读者大量的建议及纠错内容进行筛选、整理后，再次组织大批教学一线的特高级教师，按照最新教材的内容和最新大纲的要求对本丛书进行了彻底而严密的修订，使之更符合教学的实际需求。

本丛书修订后的主要特点如下：

▶双栏链接 “e”化学习 本丛书编写时进行了一些有益的探索，融合了编创集体最新的研究成果，依据学科特点设计栏目，与教学完全同步，是一套易学易懂、易学易练的助学读物。它既正确处理了社会需求、学生发展与教材固有制约作用的关系，又把握住了具有普遍意义的行之有效的思维方法，从根本上使求知更轻松。

▶讲练互动 “e”品同步 “讲”是教师循循导入，“练”是学生自我锻造；老师讲得透彻入微，学生练得炉火纯青，这样才能达到“教”与“学”的完美互动，使学生学有所练，练有所长，长有所成。故而我们设置“教材完全解读”以助讲，配备“思考反馈训练”以助练。

内容新颖　编排科学　本丛书始终针对最新教材释疑解惑、巩固延伸，在总结了众多教辅图书编写的成功经验后，确保广、快、精、准地获得所需信息，力求科学系统地把握教材的基本内容，便于学生理解和掌握。在全面覆盖每一学科、每一单元(章)、每一课时(节)主干知识的前提下，精选与学科相关的热点问题，突出开放性、独创性和前瞻性，引导学生从狭隘的书本走向广阔的现实生活舞台。习题设计由浅入深、科学分级，尽量避开难题、旧题、生僻题，展现最新颖的题型，真正实现习题的创新、科学。

题解分离　讲解到位　本丛书习题设计力求多元化，遵循由易到难的认知规律，题量充足，梯度明显，习题解评力求多解、详尽，帮助学生举一反三，引导学生发散思维。解答统一附于书后以供对照验证，同时也便于教师指导参阅。

点睛之笔　复习整合　理科独有的每章后的“本章复习整合”，将学习的层次向中、高考方向予以提升，以达到从节（课时）内到章(单元)后的融会贯通。

个性设计　事半功倍　教材习题解答简洁、准确，可供学生在日常学习中参照，进行自我检测。

新颖开本　喜闻乐见　本丛书采用国际流行的小16开本，选用特种轻型纸张印制，版式时尚、别致，既美观大方，又方便学生使用。

本书在编著过程中，得到了教育界有关同仁及教学一线部分师生的鼎力支持，在此表示衷心感谢。限于水平，书中难免有疏漏之处，敬请读者不吝指正。

恒谦教学与备考研究中心
《e讲e练》丛书编委会

目 录

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第六章

不等式

本章纵览

不等式是研究和解决数学问题的强有力的工具，是培养推理论证能力的重要知识内容．不等式渗透于高中数学的各个分支．特别是与函数、数列、复数、三角有着密切的联系．本章主要内容有不等式的性质、不等式的求解和证明．其中不等式的性质是解、证不等式的理论依据，因此它是本章的一个重点．解不等式及证明不等式的三种基本方法（比较、分析、综合）是本章的第二个重点．两个正数的均值不等式的应用十分广泛，它是本章的第三个重点．

灵活运用不等式性质及均值不等式分析解决问题是本章的一个难点．特别是均值不等式的变形应用，脱去绝对值不等式中的绝对值符号，对含有参数的不等式中参数的分类讨论是本章的第二个难点．

考纲和大纲对本章的要求是：理解不等式的性质及其证明，掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用．掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式．掌握简单不等式的解法，理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

学习本章时，同学们一定要注意联系以前学过的一元一次不等式，一元二次不等式，方程，函数等内容，才能使自己对不等式知识有较完整的认识．解不等式要学会根据有关性质和定理，将其等价化归为一次、二次不等式（组）．注意化无理为有理，化分式为整式，化高次为低次的转化思想的灵活运用，还要注意以下几点：

(1)忽视不等式性质的前提条件；

(2)使用均值不等式求最值时，容易忽视一正、二定、三相等的前提条件；

(3)忽视$||a|-|b||\leqslant|a-b|$，$||a|-|b||\leqslant|a+b|$，$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，$|a-b|\leqslant|a|+|b|$中的“$\leqslant$”取“$=$”的条件依次是$ab\geqslant0$，$ab\leqslant0$，$ab\geqslant0$，$ab\leqslant0$；

(4)使用分析法证明不等式，表达逻辑混乱．

6.1 不等式的性质(1)

教材完全解读

▲1. 不等式的有关概念：

(1)不等式：用不等号（$>$、$<$、$\geqslant$、$\leqslant$、$\neq$）连结的两个式子叫做不等式.

(2)同向不等式：若两个不等式的左边都大于(小于)右边，则称这两个不等式为同向不等式.

(3)异向不等式：若一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，则称这两个不等式为异向不等式.

不等式的定义要和等式的定义加以比较.

▲2. 对于任意两个实数 a、b，有如下关系：

(1)$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；

(2)$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；

(3)$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

上面三个式子中，左边部分反映的是实数的大小顺序，而右边部分反映的则是实数的运算性质，所以上面三个式子亦可称为：实数的运算性质与大小顺序间的关系.

▲3. 实数的运算性质与大小顺序之间的关系是建立不等式理论体系的基石，为实数的大小比较提供了理论依据和方法.

▲4. 对于任何两个实数 a 与 b 大小的比较方法有作差法和作商法两种：

(1)作差法：$a-b\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant b$；

$a-b\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant b$.

(2)作商法：$\dfrac{a}{b}>1$ 且 $b>0\Rightarrow a>b$；

$\dfrac{a}{b}<1$ 且 $b>0\Rightarrow a<b$.

作差比较法是高考重点，要掌握，作商比较法只要理解即可.

应用作差法比较大小时，常常需要把所得的差适当变形(如配方、因式分解等)后方能判断其符号的正、负. 运用作商法比较大小时，应通过约分及相关的幂运算，将商式化作一个与1的大小关系很明显的值，同时也应注意运用此法的前提条件.

典型问题归类

一、考查对实数的运算性质与大小顺序间关系的正确理解和灵活运用

解题入口 判断命题的充要关系，要从充分性和必要性两个方面进行推理.

例1 若 $a,b,x,y\in\mathbf{R}$，则 $\begin{cases}x+y>a+b,\\(x-a)(y-b)>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>a,\\y>b\end{cases}$ 成立的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解答 (1)若 $\begin{cases}x+y>a+b, & ①\\(x-a)(y-b)>0. & ②\end{cases}$

由式②知，$(x-a)$与$(y-b)$同号；又由式①得

$(x-a)\cdot(y-b)>0$.

$\therefore x-a>0, y-b>0$. 即 $x>a, y>b$.

故充分性成立.

(2)若 $\begin{cases} x>a, \\ y>b \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x-a>0, \\ y-b>0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+y>a+b, \\ (x-a)(y-b)>0. \end{cases}$

故必要性成立. 综合(1)(2)知, 应选 C.

结语点金 充要关系证明的主要依据是不等式的基本性质, 其结论和条件是互为充要关系的.

二、考查利用作差法比较数式的大小

例2 已知 $m,n\in \mathbf{R}$, 求 m^4+n^4 与 m^3n+mn^3 的大小关系.

解题入口 采用作差比较法, 比较差值与零的大小.

解答 $\because m^4+n^4-(m^3n+mn^3)$

$=m^3(m-n)+n^3(n-m)$

$=(m-n)(m^3-n^3)$

$=(m-n)^2(m^2+mn+n^2)$

$=(m-n)^2\left[(m+\frac{n}{2})^2+\frac{3}{4}n^2\right]\geqslant 0$.

当且仅当 $m=n$ 时取等号,

故 $m^4+n^4\geqslant m^3n+mn^3$.

结语点金 此题作差后用乘法公式将差分解因式, 配方, 变形为便于判断符号的式子.

好题巧思妙解

题 若 $0<x<1$, 试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

思路点拨 作差比较法. 注意去掉绝对值的条件.

解 $\because |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\frac{1}{|\lg a|}(|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|)$

$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$

$=-\frac{1}{|\lg a|}\lg(1-x^2)>0$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

点评 解答时中不同对数应用换底公式时, 就需对 a 分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况进行比较. 如果发现 $\log_a(1-x)$ 与 $\log_a(1+x)$ 反号, $\log_a(1-x^2)\neq 0$, 那么立即有

$|\log_a(1-x)|=|\log_a(1-x^2)-\log_a(1+x)|=|\log_a(1-x^2)|+|\log_a(1+x)|>|\log_a(1+x)|$.

错误剖析诊断

例 已知 $f(x)=mx^2-n$, 且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

错解 依题意有 $\begin{cases} -4\leqslant m-n\leqslant -1, ① \\ -1\leqslant 4m-n\leqslant 5. ② \end{cases}$

由①式得: $1\leqslant n-m\leqslant 4$. ③

由②+③得: $0\leqslant 3m\leqslant 9$.

$\therefore 0\leqslant m\leqslant 3$. ④

由③+④得: $1\leqslant n\leqslant 7$.

诊断 由于已知 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的范围, 于是在解题时, 要尽可能地将待求范围的 $f(3)$ 转化成 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的形式. 由于 $f(3)=9m-n$, 于是只需由 $\begin{cases} f(1)=m-n \\ f(2)=4m-n \end{cases}$ 解出 m、n 与 $f(1)$、$f(2)$ 的关系即可. 而错解中将范围扩大了.

解: $\because \begin{cases} m-n=f(1), \\ 4m-n=f(2). \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)], \\ n=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2). \end{cases}$

∵ $f(3)=9m-n=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$，又∵ $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$.

∴ $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$，

$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$.

∴ $-1\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$，

∴ $f(3)$的取值范围是$[-1,20]$.

∵ $f(3)=9m-3n$ 而 $0\leqslant 9m\leqslant 27$，$-7\leqslant -n\leqslant -1$，

∴ $-7\leqslant 9m-n\leqslant 26$，

即 $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$.

解题规律方法

由此可见，比较两个实数或代数式的大小，基本方法是作差. 作差的一般步骤是：作差→变形→判断差的符号，变形的目的是判断差的符号，为了便于判断符号，进行因式分解、配方，凑成几个平方和的形式等是变形的常用方法，如果符号不确定时，要注意分类讨论.

思考反馈训练

考虑 a,b 的正负性

1. 已知 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）.

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$

运用作差比较法

2. 已知 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）.

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^6>b^6$

可代入特殊值

3. 令 $0<a<b$，且 $a+b=1$，则下列四个数中最大的是（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. a　　C. $2ab$　　D. a^2+b^2

代特殊值

4. 若 $a>0,b>0$，则有（　　）.

A. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

C. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant a+b$　　D. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant a^2+b^2$

作差法

5. 对实数 a 和 x 而言，不等式 $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$ 成立的条件是________________.

分子、分母有理化

6. 已知 $x=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$，$y=2\sqrt{n}$，则 x 与 y 的大小关系是__________.

作商比较法

7. 6^8 与 8^6 的大小关系是__________.

作差法

8. $x>y$ 与 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ 同时成立，则 x,y 应满足的条件是________.

变形要注意

9. 比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

作差法注意变形

10. 已知函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，$x\in\mathbf{R}^+$），若 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，判断

$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与$f(\frac{x_1+x_2}{2})$的大小,并加以证明.

11. 在$\triangle ABC$中,求证:$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

利用和差化积公式

6.2 不等式的性质(2)

教材完全解读

▲1. 不等式的性质包括"双向性"和"单向性"两个方面.

双向性:

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性).

(2)$a>b$,c为整式$\Leftrightarrow a+c>b+c$.

单向性:

(3)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(4)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(5)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$.

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(7)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$.($n\in\mathbf{N}^*$,且$n>1$)

(8)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.($n\in\mathbf{N}^*$,且$n>1$)

(9)$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

单向性主要用于证明不等式;双向性是解不等式的基础(当然也可用于证明不等式).由于单向性(5)的逆命题成立,所以他们也可用于解不等式.

注意对几个性质的理解

(1)对于性质(3),要正确处理带等号的情况:由于$a>b,b\geq c$或$a\geq b,b>c$均可得出$a>c$;而有了$a\geq b,b\geq c$,才可能有$a>c$,也有可能$a=c$,当且仅当$a=b$且$b=c$时,才会有$a=c$.

(2)对于性质(4),可以推广出:两个或两个以上的同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.同样对性质(6)亦可推至两个以上.

(3)对于性质(7)、(8),要注意成立的条件$n\in\mathbf{N}^*$且$n>1$.两个性质可结合起来统一推广为"$a>b>0,n\in\mathbf{R}^+\Rightarrow a^n>b^n$".

(4)应特别注意不等式性质成立的条件.例如,在应用"$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质时,有些同学要么是弱化了条件,得$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;要么是强化了条件,而得$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

典型问题归类

一、考查对不等式性质的理解和掌握

例1 在实数范围内回答下列问题:

(1)若$-ac<-bc$是否一定得出$a>b$?

(2)若$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$是否一定得出$a>b$?

(3)若$a>b,c>d$是否一定得出$a-c>b-d$?

(4)若$a<b$是否一定得出$a^2<b^2$?

(5)若$a>b,c>d,cd\neq0$是否一定得出$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$?

解题入口 回答本题的关键是熟练掌握不等式的基本性质.

解答 (1)不一定.若$c>0$,则$a>b$;若$c<0$,则$a<b$.

(2)一定.$c\neq0$时,$c^2>0$因而$a>b$.

(3)不一定.例如:$a=c=2,b=d=1$时,有$a-c=b-d$;$a=2,b=d=1,c=3$时,有$a-c<b-d$.

(4)不一定.例如:$a=-2,b=1$时,有$a^2>b^2$.

结语点金 掌握不等式的性质,尤其应注意不等式性质成立的条件.取特殊值是判断不等式成立与否的重要手段,特别是举反例可立即否定不等式.

(5)不一定.例如:$a=2,b=1,c=-1,d=-2$时,有$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

二、综合运用不等式的性质,函数的单调性比较数、式的大小

例2 已知$a<0,-1<b<0$,则(　　).

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab>a>ab^2$

C. $ab^2>ab>a$　　D. $ab>ab^2>a$

解答 因为$-1<b<0$,

所以$1>b^2>0>b>-1$,

即$b<b^2<1$,

两边同乘以$a<0$,得

$ab>ab^2>a$

故应选D.

解题入口 观察四个选项,易知每个不等式的各项中都含有公因数a,且$a<0$,所以只须根据不等式的性质比较出$1,b,b^2$的大小即可.

结语点金 敏锐的观察为问题的解决指明了方向.本题亦可用特殊值法:取$a=-1,b=-\frac{1}{2}$.

三、运用不等式的性质确定数、式的范围

例3 已知$-1\leqslant\alpha\leqslant3,5\leqslant\beta\leqslant6$,分别求$\alpha+\beta,\alpha-2\beta,\frac{\alpha}{\beta}$的范围.

解答 $\because -1\leqslant\alpha\leqslant3,5\leqslant\beta\leqslant6$,

$\therefore 10\leqslant2\beta\leqslant12$,即$-12\leqslant-2\beta\leqslant-10$.

此时有$\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{1}{5}$,$4\leqslant\alpha+\beta\leqslant9$,

$-13\leqslant\alpha-2\beta\leqslant-7$,$-\frac{1}{6}\leqslant\frac{\alpha}{\beta}\leqslant\frac{3}{5}$.

解题入口 对$\alpha+\beta$只需利用同向不等式相加的性质即可,而对$\alpha-2\beta$需先求-2β的范围,再利用同向不等式相加的性质,对$\frac{\alpha}{\beta}$需先求$\frac{1}{\beta}$的范围.

结语点金 本题属多个不等式性质的联用,其关键是准确选用性质定理.

好题巧思妙解

题1 已知a,b,c是任意实数,且$a>b$,则下列各式恒成立的是(　　).

A. $(a+c)^4>(b+c)^4$　　B. $ac^3>bc^3$

C. $\lg|b+c|<\lg|a+c|$　　D. $(b+c)^{\frac{1}{3}}<(a+c)^{\frac{1}{3}}$

解 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

当$a+c<0$时,显然A、C不会成立;

当$c<0$时,显然B不能成立;

$\because$ 幂函数$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,且$b+c<a+c$,

$\therefore f(b+c)<f(a+c)$,

即$(b+c)^{\frac{1}{3}}<(a+c)^{\frac{1}{3}}$.故选D.

思路点拨 运用不等式的性质逐一判断正误.

点评 针对不等式"恒成立",一定要注意其前提条件,必要时应予以分类作答,这是解题的常用手法,值得重视.

题1 实数a,b,c,d满足下列3个条件:

①$d>c$;

②$a+b=c+d$;

③$a+d<b+c$.

思路点拨 本题条件较多,从何入手?如果两两进行比较,一般需进行六次.但若能找到一个合理的解题顺序,就可减少解题的层次.

请将 a、b、c、d 按照从大到小的次序排列，并证明你的结论.

解 由③⇒$d-b<c-a$，由②⇒$c-a<b-d$

$\Rightarrow\begin{cases}d-b<b-d\\a-c<c-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d<b,\\a<c.\end{cases}$

再结合①式，应用不等式的传递性，可得

$b>d>c>a$.

> 点评　由于找到了一条合理的解题思路，才使得上面的解法没有浪费一点笔墨，显得干净利落.

错误剖析诊断

例　已知 $1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$.

求 $3a-2b$ 的取值范围.

错解　由 $1\leqslant a+b\leqslant 5$，①

$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，②

①+②得：$0\leqslant a\leqslant 4$，③

由②得：$-3\leqslant b-a\leqslant 1$，④

①+③得：$-1\leqslant b\leqslant 3$，⑤

由③得：$0\leqslant 3a\leqslant 12$，⑥

由⑤得：$-6\leqslant -2b\leqslant 2$，⑦

由⑥+⑦得：$-6\leqslant 3a-2b\leqslant 14$，∴ $-6\leqslant 3a-2b\leqslant 14$.

> 诊断　错解把该题范围扩大了.

$$\left.\begin{aligned}1\leqslant a+b\leqslant 5&\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{5}{2}\\-1\leqslant a-b\leqslant 3&\Rightarrow-\frac{5}{2}\leqslant\frac{5(a-b)}{2}\leqslant\frac{15}{2}\end{aligned}\right\}$$

$\xRightarrow{\text{相加}}-2\leqslant 3a-2b\leqslant 10$.

因此　$-2\leqslant 3a-2b\leqslant 10$.

解题规律方法

通过上述不等式性质的介绍与例题的讲解，使我们明白在应用不等式性质解题时，应该注意掌握以下两点：

1. 洞悉不等式各个性质的结构特征，是找出解题线索，启发解题思维的重要依据，由于不等式的三个基本性质是作差与零比较而得大小关系的结构，所以它是解可以通过作差后易与零比较大小的题型的依据；不等式的八个性质又主要是两边同加、同乘、相加、相乘、乘方、开方等结构，所以它主要解不等式两边通过以上相同变形而得结构基本相同的题型，不过在用同乘一个数时，一定要分清这个数是正数、负数还是零；在用相乘、乘方、开方这三个性质时，一定要在正数上，八个性质中虽然没有同减、相减、相除性质，处理它们都可用同加、相加、相乘性质来解决.

2. 概括题型结构，探讨解题规律，总结解题方法是熟悉知识，提高解题能力的重要途径，本节主要出现四种题型.

(1)判断对错型，一般方法直接用不等式性质即可；特殊值法也是解这种题型的常用方法，特别在选择题或填空题中；有时还要用函数单调性.

(2)证明型. 根据要证不等式两边的结构来选择是用比较法还是直接用不等式性质.

(3)求范围型. 把要求的式子用已知式子表示出来后，再用同向不等式相加的性质来求解即可，在这里一般不能连续用同向不等式相加的方法来求范围.

思考反馈训练

不等式的乘法性质

1. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则下列各不等式中恒成立的是(　　).

A. $bc<ad$　　B. $bc>ad$　　C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

通过平方来比较

2. 设 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，那么 a,b,c 的大小关系是(　　).

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

先消去 c

3. 设实数 a,b,c 满足 $\begin{cases} b+c=3a^2-4a+6, \\ c-b=a^2-4a+4, \end{cases}$ 则有(　　).

A. $c\geqslant b>a$　　B. $c>b>a$　　C. $b\geqslant c>a$　　D. $c>a>b$

由单调性来解题

4. 如果 $a>b$，那么下列不等式：

①$a^3>b^3$；②$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；③$3^a>3^b$；④$\lg(a+1)>\lg(b+1)$.

其中恒成立的是________.

运用不等式性质来证明命题是否正确

5. 已知 3 个不等式：①$ab>0$；②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$；③$bc>ad$.

以其中两个作为条件，余下一个作为结论，则可以组成________个正确的命题.

对 a 分情况讨论

6. 已知指数函数 $y=a^x$ 在 $[-2,2]$ 上的函数值小于 2，则 a 的取值范围是______.

注意是否等价

7. 问题：若方程 $x^2+(m-2)x-m+5=0$ 的两个根都大于 2，求实数 m 的取值范围.

第一步，令判别式 $\Delta=(m-2)^2-4(5-m)\geqslant 0$，解得 $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -4$；

第二步，设两根为 x_1,x_2，由 $x_1>2,x_2>2$ 便得

$\begin{cases} x_1+x_2>4, \\ x_1\cdot x_2>4. \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} -(m-2)>4, \\ -m+5>4. \end{cases}$ 即有　$m<-\frac{1}{2}$.

第三步，由 $\begin{cases} m\geqslant 4 \text{ 或 } m\leqslant -4, \\ m<-2, \end{cases}$ 得 $m\leqslant -4$.

第四步，由第三步得出结论：

当 $m\in(-\infty,4]$ 时，此方程两根均大于 2.

但当取 $m=-6$ 检验知，方程 $x^2-8x+11=0$ 两根为 $x=4\pm\sqrt{5}$，

其中 $4-\sqrt{5}<2$.

试问：产生错误的原因是什么？答：____________________.

因式分解

8. 设不相等的两个正数 a,b 满足 $a^2-b^2=a^3-b^3$，求证：$a+b>1$.

运用二次函数

9. 已知方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$，当 $a>b>c>0$ 时，求证：方程的两根分别在 a 与 b，b 与 c 之间.

不等式的传递性

10. 证明：(1)若 $a>b>0$，$c<d<0$，则 $ac<bd$.

(2)若 $a>b>0$，$c>d>0$，则有：$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

用反证法

11. 实数 a,b,c,d 满足 $a+b=c+d=1$，$ac+bd>1$，求证：这四个数中至少有一个为负数.

6.3　算术平均数与几何平均数

教材完全解读

▲1. 两个均值不等式及其各种简单变形：$\xrightarrow[a\in\mathbf{R}]{a^2\geq 0}$

$$
\begin{cases}
\underset{(a,b\in\mathbf{R})}{a^2+b^2\geq 2ab} \longrightarrow \begin{cases} ab\leq\dfrac{a^2+b^2}{2} \\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leq\dfrac{a^2+b^2}{2} \end{cases} \\[2ex]
\underset{(a,b\in\mathbf{R}^+)}{a+b\geq 2\sqrt{ab}} \longrightarrow ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \\[2ex]
\underset{(a,b,c\in\mathbf{R}^+)}{a^3+b^3+c^3\geq 3abc} \longrightarrow \begin{cases} abc\leq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \\ \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\leq\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \\ a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}
\end{cases}
$$

注意等号成立的条件.

▲2. 均值不等式的几种特殊变形.

注意字母的符号.

(1) $\dfrac{a^2}{b}\geq 2a-b(b>0)$

(2) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2,(a,b\in\mathbf{R}^+)$

(3) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geq 3\ (a,b,c\in\mathbf{R}^+)$

(4) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2(a\in\mathbf{R}^+)$

$a+\dfrac{1}{a}\leq -2\ (a\in\mathbf{R}^-)$

(5) 一个重要的均值不等式链.

设 $0<a\leq b$，则有

$$a\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq b.$$

其中 $\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ 为调和平均数，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 为平方平均数；$\sqrt{ab}$ 为几何平均数；$\dfrac{a+b}{2}$ 叫做算术平均数.

特殊变形(1)常常用来证明分式不等式，特殊变形(2)、(3)亦是证明分式不等式的主要工具，特殊变形(4)实质是均值不等式的倒数形式，在求函数最值问题中具有广泛应用，应引起足够重视.

▲3. 均值不等式的功能在于："和积互化". 主要用于证明不等式和求二元(或三元)函数的最值. 解题时往往需要拆(添)项，其目的：一是创设一个应用均值不等式的情境；二是使等号成立的条件.

▲4. 课本 P_9 例 1 题的结论常用来求函数的最值，在使用"和为常数，积有最大值"和"积为常数，和有最小值"这两个结论时，必须注意以下三点："一正"——字母为正数；"二定"——积或和为定值(有时需要通过"凑配技巧"凑出定值来)；"三等"——等号能否取到. 合理的拆分项和配凑因式是常用的解题技巧.

解题入口 公式$a^2+b^2\geqslant 2ab(b>0)$可变形为$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$，具有将分式变为整式的作用，而待证式正是将分式变为整式.

结语点金 要注意挖掘和利用均值不等式的各种变形及其灵活运用，本例利用不等式的变形使得证法简捷明快.

解题入口 (1)因为$4x-5<0$，所以首先要"调整"符号；又$(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$不是常数，所以对$4x-2$要进行拆(添)项"配凑".

(2)本题的困难在于如何使用条件$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，如果从中解出$x$或$y$，再代入$x+y$转化为一元函数的最值问题，显然是比较复杂的．这时，我们可设法整体地使用条件.

(3)从函数解析式的特点看，本题可化为关于x的二次函数，再通过配方求其最小值(留给读者去完成)．但若注意到$(x-a)+(b-x)$为定值，则用变形不等式$\frac{m^2+n^2}{2}\geqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$更简捷.

结语点金 对于第(2)小题，还可以利用三角换元法、判别式法、数形结合法等求解，请读者自己去探索．此外，请读者分析下列的解法错在何处？

$\because x>0,y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，

$\therefore x+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}\cdot 2\sqrt{xy}=12.$

故$(x+y)_{\min}=12.$

典型问题归类

一、考查灵活运用均值不等式及其变形证明不等式

例1 已知$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c.$

解答 $\because \frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$，

$\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$，　$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$，

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 2a-b+2b-c+2c-a=a+b+c.$

二、考查灵活运用均值不等式求函数的最值

例2 (1)已知$x<\frac{5}{4}$，求函数$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值；

(2)已知$x>0,y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，求$x+y$的最小值；

(3)已知a,b为实常数，求函数$y=(x-a)^2+(x-b)^2$的最小值.

解答 (1)$\because x<\frac{5}{4}$，$\therefore 5-4x>0$，

$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$

$=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3$

$\leqslant -2+3=1.$

当且仅当$5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即$x=1$时，上式等号成立.

故当$x=1$时$y_{\max}=1$.

(2)$\because x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$.

$\therefore x+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)=\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10\geqslant 6+10=16.$

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$，又$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，即$x=4,y=12$，上式等号成立.

故当$x=4,y=12$时，$(x+y)_{\min}=16$.

(3)$\because y=(x-a)^2+(x-b)^2$

$=(x-a)^2+(b-x)^2$

$\geqslant 2\left[\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right]^2$

$=\frac{(a-b)^2}{2}.$

当且仅当$x-a=b-x$，即$x=\frac{a+b}{2}$时，上式等号成立.