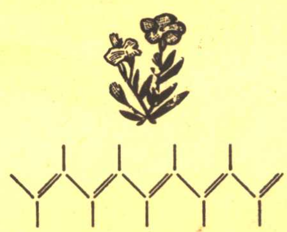
群论在生物学中的应用

〔日〕 志芳守一 著
吴天顺 译
钱端壮
史家粱 校



华东师大科技情报室
一九八二年

群论在生物学中的应用

[日] 志芳守一 著
吴 天 顺 译

钱 瑞 壮
史 家 梁 校

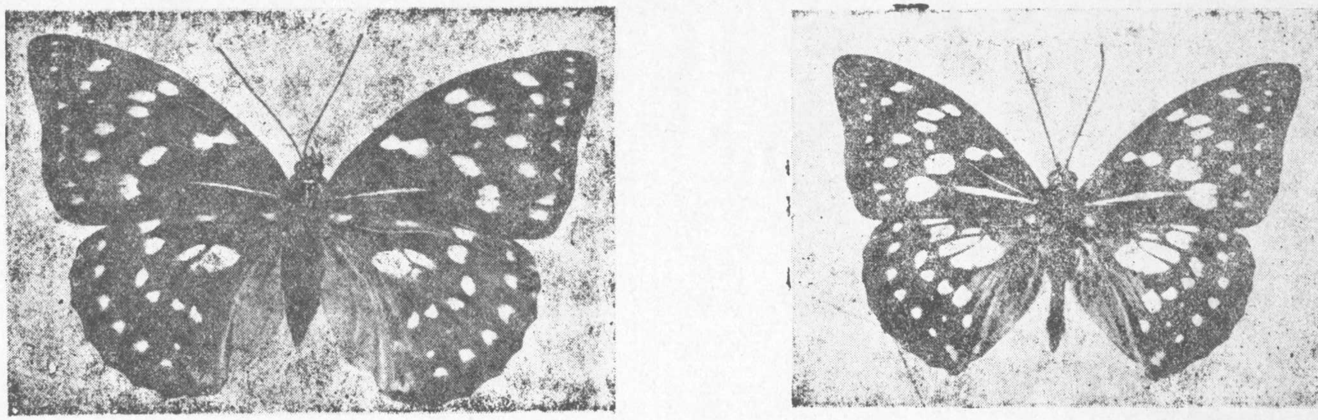
华东师大科技情报室
一九八二年

内 容 提 要

本书是一本科普性的生物数学书，它借助数学中的一个分支——群论来描述生物的对称性。全书共分五章：序章，群论，形态的对称性，物理化学的对称性和遗传的对称性。本书将对从事生物学、农学、医学或生物物理学诸方面的科技工作者及生物数学爱好者，在探索生物的奥秘上有一定的启示和帮助。

本书通俗易懂，图文并茂，即使对群论知识不熟悉的读者，也是容易阅读的。

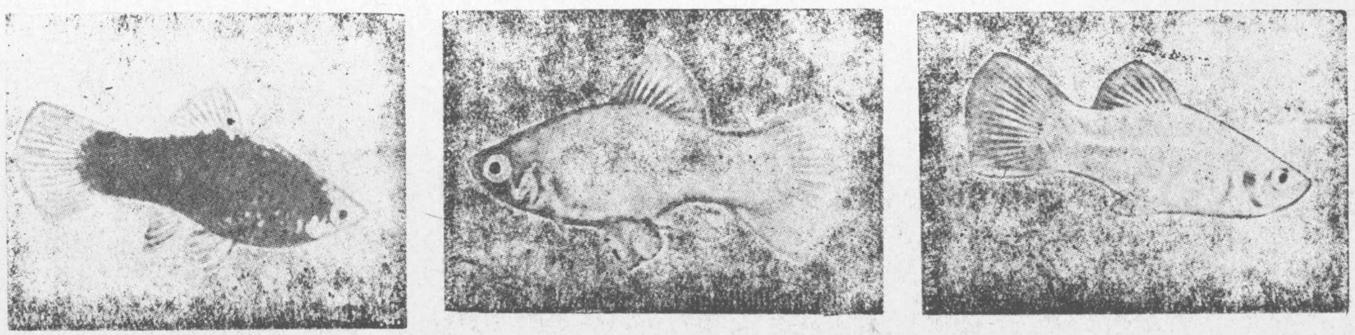
本书是根据朝仓书店1979年第三版翻译的。



（Ⅰ） ♂　　　　（Ⅱ） ♀

插图1 大紫蝶(*Sasakia charonda* HEWITSON)

(摘自横山《原色日本蝶类图鉴》保育社，1954年)．×8/15



（Ⅰ） 黑　　　　（Ⅱ） 黄　　　　（Ⅲ） 红

插图2 扁鱼(P'aty)(*Xiphophorus maculatus* (GUENTHER))，类型同，颜色不同。

(摘自牧野《原色热带鱼图鉴》保育社，1956年)．全长 3cm

原书为彩色照片——译者

译 者 的 话

随着现代科学技术的迅猛发展，人们已在生物学方面取得了许多可喜的成果，同时也迫切地感到需要通过数学知识来进一步探明生物体内存在着的未知因素，这就是生物数学。本书的作者试图用数学中的群论来描述生物界中的对称性，以期达到论证群论与生物对称性之间的相互关系，在这方面，他是佼佼者。

当今，分子遗传学已成为生命科学中最引人注目的一门学科。读者阅读本书后，若对书中介绍的辫群特别发生兴趣，进而又能深入研究并推陈出新，借以解释人体内具有23对染色体相互之间错综复杂的交换现象，有朝一日揭示人类遗传的真谛，这正是译者翻译本书的目的和希望。

本书共分五章，即：序章、群论、形态的对称性、物理化学的对称性和遗传的对称性，对从事生物学、农学、医学和生物物理学等学科的科技工作者及生物数学爱好者，在研究生物的奥秘上有一定的启示和帮助。

本书在翻译过程中，始终得到本校数学系和生物系及有关领导的大力支持，裘佩熹副教授对第三章形态的对称性中有关拉丁文生物学词汇作了翻译和校对，管和副教授对第五章遗传的对称性的翻译进行了具体指导，薛天祥同志也抽暇浏览全书译稿并提出了许多宝贵的意见，在此一并致谢。

由于本书内容极为广泛，限于译者水平，错误和缺点在所难免，望读者批评指正。

译 者

一九八二年八月

前　　言

本书大致为三类读者而作。第一类是与生物学直接或间接地发生联系，并希望简单地掌握生物、群论与对称性之间相互关系的读者。第二类是从事生物学、农学、医学或生物物理学诸领域而又有志于学习群论的读者。第三类读者是各方面的专家，他们只想了解群论在生物学中应用的概况。因而本书在内容的编排上兼顾了上述三类读者。对于第一类读者，只要依文索图、细读全书，即可达到目的。本书特意安排了群论一章(第二章)，它使第二类读者无需有数学方面的预备知识就可熟悉群论。至于第三类读者，通读本书最后两章中自己所需的章节，亦可取得一定的效果。

本书并非汇集了与生物学有关的群论的一切知识，而只是以有限的篇幅阐述了某些比较具有普遍性的内容。另一方面，书中除了对常见的生物对称性予以说明外，还对色彩的对称性、叶序与对数螺线之间的关系、由染色体引起遗传信息的对称性等方面作了介绍，从而增添了特色。可以说，群论应用于生物学是学术领域中一个较新的课题，至于在生物学中介绍有关群论的书籍目前才刚开始，今后会进一步地完善。作为作者来说，期望读者通过对本书的阅读能加深理解生物学与群论之间的关系，进而若能有更多的发现和进展，或能解决许多实际问题，将是十分可喜的。

本书从脱稿直到今日的问世，承蒙各方面的协助，谨向给予指导和帮助的志士友人，深表谢忱。它的诞生正是长时间受到这些人士关怀的结果，否则是难以完成的。每当回忆起这一切情景，无论对初交的朋友，还是对长期在笔者身边给予影响的同事，感激之念，油然而生。

在草拟本稿时，三留三千男氏对内容的组成和原稿的校阅等方面进行了大力的帮助。尽管如此，若本书的内容仍有谬误，这应由作者个人负责。平濑恭子氏也不厌其烦地对原稿进行了整理及数值计算等工作。此外，朝仓书店在原始方案的阶段上，首先对内容的组成提出了有益的建议。本书之所以能够圆满地出版，是因为自始至终受到书店各位先生特别的关照，以致才能万事顺利，在此由衷地表示感谢。

最后，虽然这里适非其所，但仍想借此机会对曾以博爱、忍耐和希望来教导作者的母亲和亡父，倾诉儿辈的无限感激之情。

1970年10月

志芳守一

目　录

第一章 序　　章

生物学与群论，这是两门既悠久又新颖的学科。生物学自古就创建了，群论也不是数学中崭新开拓的领域。可是，试图将生物学与群论结合起来一并考虑，还是近年来刚开始从事的工作。就此意义来说，探讨生物学与群论之间的相互关系是一个新的研究课题。

群论是数学的一个分支。群这个名词看来似乎与生物学中称呼的某些“群”有关系，但是这种关系只能认为是个巧合，两者几乎无关。群论——数学的一个分支，在数学中属于代数学的范畴。这里所说的代数，是指用文字代替数字进行运算，就是普通代数的一般化。

另一方面，数学早就应用在生物学中，概率和统计是两门主要的学科。其原因是：当生物发生变异时，若对生物作某些测定，可以说测定的愈精确，测定值之间愈会有偏差，因而产生了需用何种数学对伴有偏差的测定值进行解释的问题，而使用统计学是种行之有效的手段。

统计学的运用，极大地丰富了我们从量值上对生物的理解，而近年来随着电子计算机的发展，只要编制出处理这种浩瀚量值关系的程序，就可使处理法简便。到那时候，我们将能建立起与生物学中各领域有关的严格测定法及解释理论。

现在，我们已经掌握了生物的大量数据，不管人们如何以更简炼的言辞代替“生物”一词，当前存在着的一个最大课题仍然是怎样运用这些数据来解释生物学研究的范围。近年来，由于人们可从不同的学科领域来研究生物学，这就使得生物学蕴涵的研究对象变得极其广泛。所以生物学不只以动物和植物为其研究的对象，还与农学、医学、药物学和化学等领域发生直接或间接的联系。这些有联系的各个领域及其分支领域如何解释观察到的生物诸量间的关系，仍是探讨的一个目的。

我们求出生物诸量间的关系后，就能掌握它们的许多规律性。例如，若发现 a、b 和 c 三个量间存在着 a 与 b 之和等于 c 这一关系，这时要想知道这三个量，只要知道其中两个量，就可通过一种运算求得另一个量。因此，当我们知道 a、b 和 c 之间存在这一关系后，就无需对这些量作更多的考虑。所以说对与生物学有关领域中的诸测定量，尚期待怎样才能更好地作解释的问题。

目前，对生物学的解释还没有一个特定的起点和方法，从任何一个角度去研究生物学都是无妨大局的。本书试从生物的对称性方面加以探讨，而群论是深入探讨的工具。

群论是代数学的一个分支，是既容易又难于掌握的一门学科。由于生物学还刚开始应用群论，所以对从事生物学的人来说，群论也许是未曾涉足的领域。本书在介绍与生物学有关的群论时，只注意它的一般概念。庆幸的是，学习群论无需有数学方面的预备知识。以下各章仅限于介绍群论中与生物学有关的部分。读者只要掌握了这些知识，就可从各个方面来观察生物。若需要更深入学习，务须读些群论专著。

此外，本书应用群论——数学的一个分支，探讨了生物中存在的对称性问题。生物的对称性，包括从宏观上能见到的形态的对称性到微观的对称性、遗传信息的对称性等，真是包罗万象。也许生物的对称性归根结底只有一种，然而我们迄今还不能以统一的观点对它们作解释。鉴于这个原因，本书只能分别描述生物的各种对称性，并在探讨对称性前，先一般性地分析一下生物的对称性与群论之间相互的关系。

1.1 常见的生物对称性

许多生物具有对称性。通常说的对称，系指对折相合的意思，就是指两个点、两条线或两个图形可相互迭合。上述的意思至少是我们日常生活中使用对称的含义，它也是任何一本小辞典中常见的解释。

图1是银杏树叶的素描图，它的叶形左右近乎对称。这就是说，银杏树叶分为相似的左右两半部分。若沿叶中心引一条纵线并对折，这时左右的叶形几乎重迭为一。同样地，图2的图形也近乎左右对称。图2是桂树叶，它的叶形不同于银杏树叶，但从左右对称的意义来看是相同的。由此可说，这两种树叶都具有相同的对称性。

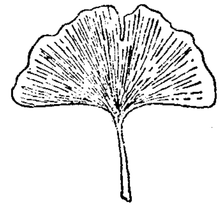


图 1 银杏树叶。左右两半部分的叶形相似。这就是说，左右近乎对称

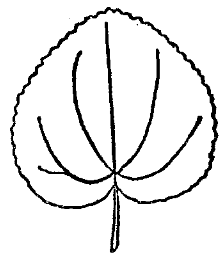


图 2 桂树叶。叶形左右也近乎对称

若对这些左右具有对称性的树叶图案化，现仍以银杏树叶为例，则画出的图案如图3所示。作该图时，可应用左右对称的原理，即先画出叶的任一半部分，然后沿图中纵线位置对折纸面，即可画得另一半部分树叶的图案。平时，剪纸师傅就采用这种方法剪出了各种有对称性的不同图案。

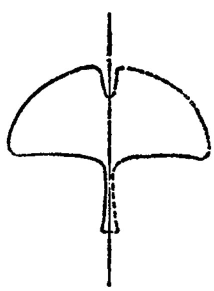


图 3 银杏树叶的图案。若要画出左右对称的图形，这时先画中心纵线左右的任一半部分，然后沿纵线位置对折纸面，再按已画出的图形描绘，即可画得另一半部分的图形

图3的图形是：左半部分为实线，右半部分为虚线。事实上，我们只要有任一半部分的图形，就可借助镜子看到图案化的整个叶形。这就是说，持一枚镜子沿图形中的纵线位置对纸面垂直放置即可。今假设镜面朝左，于是我们能看到的是一幅用实线画的左右完全对称的银杏树叶图案。镜面反向放置，则看到一幅用虚线画的树叶图案。由此可知，画在纸面上的半部分图形与映射在镜面中的图象构成了一幅完整的树叶图案。我们把映射在镜面中的图象叫做镜象。上面的情况是半部分的图形与其镜象构成了一幅完整的图案。至于取哪一半部分是无关的。镜面总会映射出画在纸面上的半部分图形且与它具有镜象的关系。由此可知，图3中左右任一半部分对其相反半部分的镜象是等价的。这就是说，左半部分是右半部分的镜象，右半部分是左半部分的镜象。图3是图案化的银杏树叶，它具有一种左右互为镜象关系的对称性。

我们不难理解这种镜象的关系。镜子是我们日常生活中常用的物品。对许多人来说，不

会一天不照一回镜子。然而照镜子时，真认为看到了自己，但事实上看到的恰是相反的自己（图 4 表示左右相反的银杏树叶）。毫无疑问，这种情况是尽人皆知的事实。许多人也未必会联想到这一方面去。在一般的情况下，我们似乎不会考虑镜中的象与自己左右相反。尽管如此，仍不致引起不便，这是因为人体外形差不多原来就是左右对称的缘故。

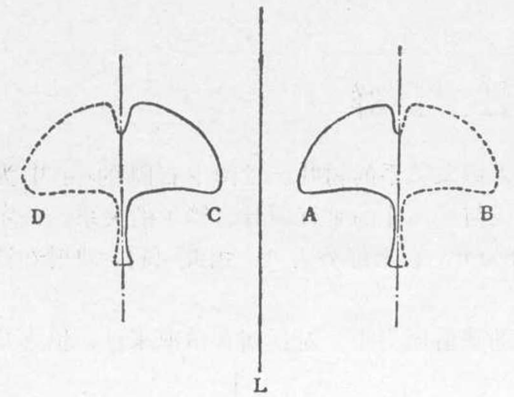


图 4 两枚银杏树叶互为镜象的关系。当镜子放在L线位置，这时一侧的叶形就把另一侧的叶形映成镜象，但左右相反。这就是说，A和B各对应于C和D

由此可知，左右对称性是人体外形的一个特征，同时也是一种约束。这就是说，我们是作为左右具有对称性的生物而存在，从而在某种程度上规定了我们的日常生活方式。鉴于这个原因，我们使用的物品往往有这一特征，例如衣服、鞋子和手套等左右几乎完全对称，即使连家俱和住宅也是如此。

我们平时对物品予以装饰时，多半采用了各种不同的对称性。例如，图 5 是对龙胆图案化后构成的家徽例子。目前世界上还有许多国家习惯于把图案构成家族或其他团体的象征，日本有使用家徽、家纹或单以花纹作为家族象征的风俗，约达一千年之久。日本村上源氏的家徽是龙胆。图 5 是以一朵花为中心，叶子和藤蔓画成左右对称。图 6 是雁图案化后构成的家徽。该图形左右并不对称。但是，若绕图的中心每次旋转 120°，不管旋转多少次后即与原图形相一致。通常，我们把由旋转给出相同的图形，叫做具有旋转对称性的图形。

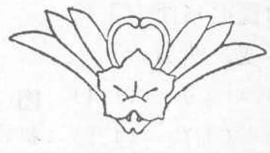


图 5 龙胆图案化后构成的家徽。左右具有镜象的对称性

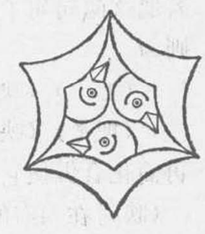


图 6 雁图案化后构成的家徽。它不具有镜象的对称性，而具有由旋转给出的对称性

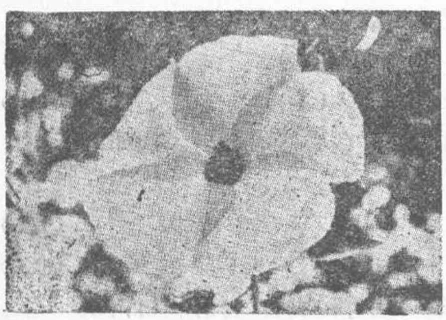


图 7 黄蜀葵花。若绕花中心每次旋转 72°，均给出相同的形状，连续旋转 5 次仍还原（摘自松田 修《花曆》社会思想社）

我们知道，上面例举的家徽是对生物图案化后构成的，事实上生物本身也具有旋转对称性。例如，图 7 是黄蜀葵花，该花朵有 5 枚花瓣，每枚花瓣都有相同的形态，并围绕花中心四周生长。若绕花中心旋转 72°，则花的整个形状保持不变。即使连续旋转 5 次，每次 72°，这时花瓣仍还原。我们比较一下图 6 雁的图案和图 7 黄蜀葵花的图案就可知道，这两种图形都有旋转的对称性。它们各是以 120° 和 72° 不同的旋转角显示出对称的特征。

由此可知，生物的形态有左右对称和旋转对称之分，旋转对称又有以不同的旋转角显示出对称的特征。生物除了有形态的对称性外，还有各种对称性。观察生物的各种对称性是本书的一个目的，下面各章节仍围绕这个问题讨论。

本节极一般性地介绍了作为生物特征的对称性问题。下节简单讨论这种对称性与数学中的一个分支——群论相互间具有怎样的关系。

1.2 对称性与群

我们再来观察一下银杏树叶。图8是两枚互为镜象关系的树叶。设图中右侧的树叶为“叶Ⅰ”，左侧为“叶Ⅱ”，则这两枚树叶对沿L线与纸面作的垂直面具有镜象的关系。假定Ⅰ的左半部分为A，右半部分为B，Ⅱ的左半部分为B，右半部分为A。由此可得，映射在镜面中的象左右相反。

于是，Ⅰ在镜面中的映射便为Ⅱ，Ⅱ在镜面中的映射便为Ⅰ。对这两种情况来说，镜面是相反放置的。由Ⅰ得到Ⅱ时，镜面朝右；由Ⅱ得到Ⅰ时，镜面朝左。故此，我们可列出以下两句句子：

① 把Ⅰ映射在朝右的镜面，便为Ⅱ.

② 把Ⅱ映射在朝左的镜面，便为Ⅰ.

若把这两句句子改写为代数式，并用括号分开，则为

(把Ⅰ)(映射在朝右的镜面)(便为Ⅱ).

(把Ⅱ)(映射在朝左的镜面)(便为Ⅰ).

再简化合併使它们的含义不变，即为

(映射在朝右的镜面)(Ⅰ)=(Ⅱ)。 (1.1)

(映射在朝左的镜面)(Ⅱ)=(Ⅰ)。 (1.2)

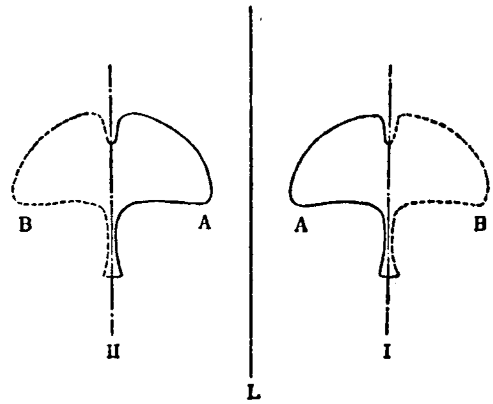


图8 两枚互为镜象关系的银杏树叶。若把镜子沿L线对纸面垂直放置，则对镜面中“叶Ⅰ”的镜象是“叶Ⅱ”，“叶Ⅱ”的镜象是“叶Ⅰ”

由此可知，我们只要使用一次镜子就可得到上述各个结果。若再次使用镜子，这时将会发生怎样的结果呢？我们先把Ⅰ映射在朝右的镜面，然后又把它的象映射在朝左的镜面，这时得到的象与最初的Ⅰ象相同。这就是说，其结果是把Ⅰ的象还原了。如果最初由Ⅱ开始，把镜子依次朝左和朝右放置，其结果也一样。这些结果简写为代数式，即为

(映射在朝左的镜面) (映射在朝右的镜面)(Ⅰ)=(还原) (Ⅰ)。 (1.3)

(映射在朝右的镜面) (映射在朝左的镜面)(Ⅱ)=(还原) (Ⅱ)。 (1.4)

我们还可以对上列两式不断演绎，但这里已能得出它们某些必然的结果。例如，若把Ⅰ还原为Ⅰ，Ⅱ还原为Ⅱ，则为

(还原) (Ⅰ)=(Ⅰ). (1.5)

(还原) (Ⅱ)=(Ⅱ). (1.6)

由上可知，把式(1.1)，(1.2)，(1.5)和(1.6)适当组合就可构成式(1.3)和(1.4)。

故此，我们可把观察到的结果写为式(1.3)和(1.4)。两式各是把由Ⅰ或Ⅱ给出的对象物(指银杏树叶)和对这些对象物进行的操作(指映射在镜面的操作)用括号分开表示。现再分析一下式(1.3)。该式左右两边都是对对象物Ⅰ进行的操作。至于式(1.4)，操作的对象物在此式两边都是Ⅱ。因此，如果我们从两式中只取出操作本身考虑，则可得到以下结果，即为

(映射在朝左的镜面) (映射在朝右的镜面)=(还原)， (1.7)

（映射在朝右的镜面）（映射在朝左的镜面）＝（还原）． (1.8)

若再简化，设（映射在朝右的镜面）以 a 表示，（映射在朝左的镜面）以 b 表示和（还原）以 e 表示，则式(1.7)和(1.8)可改写为

$$ba=e, \tag{1.9}$$

$$ab=e. \tag{1.10}$$

下面分析一下 a 和 b 的操作。当 a 操作后进行 b 操作，由于操作后的对象物还原，所以 b 操作是 a 操作的逆操作，同样 a 是 b 的逆操作，用 a^{-1} 符号表示 b。a^{-1} 是 a 的逆意义。必须指出，这种负一次方的符号与普通数值运算时用的符号相同，但含义截然不同。这里用的负一次方符号是指逆操作。若要对这种操作进行 2 次、3 次，则用负二次方、负三次方表示，这一点又与普通数值运算相同。

若用这种符号表示，式(1.9)和(1.10)即为

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e. \tag{1.11}$$

我们再回过来看图 8 。若要把Ⅱ变成Ⅰ，则应把镜面朝左且沿 L 线对纸面垂直放置。但是在Ⅱ的左侧引 L 线的平行线，再沿该线把镜面垂直且朝右放置，这时同样可得由Ⅱ得到的Ⅰ象的象。这就是说，镜面不管朝右还是朝左放置都没有关系。使用镜子的目的是使Ⅰ或Ⅱ的象变成左右相反，只要象的左右相反，则跟镜面的朝向或镜子本身是否存在无关。因而，假如离开镜子这个具体的实物而着眼于操作本身，那么就可以知道，a 与 b 把象的左右变成相反的操作。由此可得

$$a=b=a^{-1}. \tag{1.12}$$

若用式(1.12)来改写式(1.11)，式(1.11)即为

$$aa=e. \tag{1.13}$$

最后，我们小结一下本节讨论的内容。可以发现，两种操作能使一个图形或是还原或是左右相反。若对左右相反的操作连续进行奇数次，则可使图形变成左右相反；若进行偶数次，则给出的图形与操作前原来的图形相同。对这两种操作来说，不管怎样的组合或以任何的顺序进行，只会有“左右相反”或“还原”两种结果。

对这两种结果可再次用 a 和 e 的符号表示。我们对 a 进行任何次操作，操作的结果不是 a 就是 e。e 进行任何次操作仍是 e。a 操作的逆操作是 a 本身。a 和 e 不管怎样的组合或以任何的顺序进行操作，都不会产生除 a 和 e 以外的结果。

这样，我们称 a 和 e（这是问题的所在）叫做群的元，a 和 e 构成了群。探讨群各种性质的学科叫做群论。当然，以上的例举仅是左右对称的群。作为对称性的例子，上节已讨论了旋转对称，它是有关旋转对称的操作而不是在镜面中的映射，这种操作也构成了群，旋转群不同于本节讨论的左右对称的群。

由此可知，一般在有对称性的情况下都有群。群可用代数式表示，对称性也可用代数式表示，所以对生物的各种不同对称性仍可用代数式表示。要是通过用代数式描述生物有助我们加深对生物学的理解，那末是件十分可喜的事情。在描述生物对称性和介绍数学中的群论前，让我们先来回顾一下对称性的研究曾对其他的学科领域起过怎样的作用。

1.3 群论在生物学以外学科领域中的应用

我们上节已分析了群论与对称性之间有密切关系的例子。就对称性来说，至今还有很多存在在我们尚未意识到的地方。自古以来，人们早就在建筑物及其装饰如绘画、彫刻中使用了它。若我们仔细察看，不难发现在各种情况下都有人为对称性的存在。

1.3.1 结 晶

我们不管在肉眼能否见到的情况下，应用对称性的例子是很多的。例如，为了确定纯物质的结晶结构，就会考虑应用它的对称性。

例如A类原子与B类原子以化学键的形式组成AB物质，许多AB物质的集合又构成了结晶。该结晶中A与B是以怎样的方式排列呢？若考虑一下，就会发现可能有好几种排列方式。若该结晶由排列成一维晶格（即一条直线上）的原子构成，则有如图9中的Ⅰ，Ⅱ或Ⅲ三种排列方式。在Ⅲ的情况下，各原子间的距离各不相同。若确定是Ⅲ这种排列方式，那么就希望有一种能够解释各原子间不同距离排列的理由。但在纯AB物质的结晶中，各个A类原子在性质上彼此应该完全一样。至于B，也是如此。由此认为，Ⅲ的排列方式作为它的模型是不合适的，Ⅰ和Ⅱ是合适的。因为Ⅰ的图形即使左右互换也不发生变化，Ⅱ则有变化。换句话说，Ⅱ是有方向性的排列。通常，在Ⅱ的原子连线上打上箭头，以表明方向。

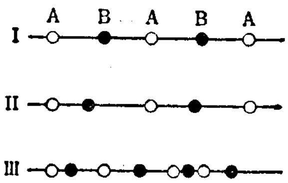


图 9 Ⅰ表示A与B的原子在一维晶格（一条直线上）以等间距排列的结晶模型。Ⅱ中，A右邻B的间距较其左邻的B近。Ⅲ中，A与B交错排列，各个原子间距离为任意值

其次，我们再分析一下使用图9中Ⅰ和Ⅱ构成二维晶格(即平面上)的排列方式。使用Ⅰ和Ⅱ，可分别构成图10和图11这两种晶格图形。若比较这两种晶格图形，就图11这种晶格来说，则可以发现沿着纸面以由上而下方向观察与由左向右观察，这时会给出不同的排列方式，然而图10却没有这种情况。所以若以不同方向观察事实上均由AB组成的物质在性质上是否会存在差异，则可确定是何种晶格作为原子排列的模型。以上考虑的是二维晶格的排列方式，我们刚才的推论也不过是一个如何思考的例子。通过对对称性的考虑，我们就可从许多假设的模型中挑选出符合客观事实的模型。用图10的排列方式构成三维晶格，便为图12。该种原子排列方式可认为是食盐(NaCl)的结晶模型。

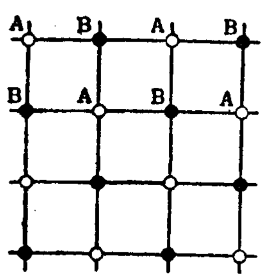


图 10 平面中的A类原子与B类原子等间距排列构成的晶格图形。为由图9中Ⅰ的排列方式构成的二维晶格

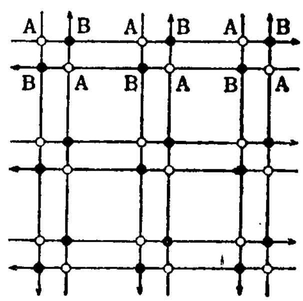


图 11 由图9中Ⅱ的排列方式构成的二维晶格。若由上而下的方向观察，这时会给出不同的排列

一般来说，判定结晶模型是否正确，多半采用X射线衍射实验法。我们欣赏象金刚钻那样的宝石时，不管朝它的那个方向看，研磨过的平面都会映出瑰丽的光芒，熠熠发光程度相同。然而对结晶照射X射线时，随着结晶的规整性，X射线沿特定的方向将会增加其强度，

而沿别的方向则减弱。现在让我们分析一下以上两种现象的共同点，至于X射线如何进行衍射，这里不予考虑。

它们的共同点是，结晶中原子排列的规整性和研磨后金刚钻的规整性都可得到有规整的可见光或X射线。最终得到的规整性即是被观察物具有规整性的反映。我们通过实验的结果发现被观察物具有的对称性，就可得到其所反映的对称性。反过来说，由反映的对称性也可推测出被观察物应有的对称性。据此，我们经常用该法来判定结晶的结构。目前生物学应用此法已相当普遍，DNA 分子具有双螺旋结构正是用此法验证的结果。

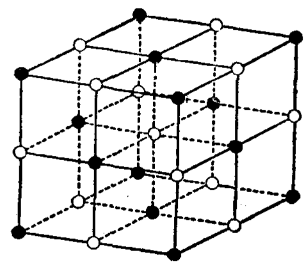


图 12 由图 9 中 I 的排列方式构成的三维晶格。图中黑点和白点分别表示食盐结晶中的钠离子和氯离子

1.3.2 数 学

我们来回顾一下数学中群论的发展史。群的概念在数学史上明确出现是在 19 世纪前期，是由挪威人阿贝尔 (N.H.Abel) 和法国数学家伽罗华(E.Galo is)用它解代数学中的代数方程而闻名的。他们两人当时仅考虑了根间的置换。我们上节已讨论了左与右的互换。一般在解代数方程式时，需要把某种顺序排列的若干个根的顺序进行变换。

数学中群的概念及以后发展而成的群论，是近世代数中的一个重要分支。从现在的眼光来看，阿贝尔和伽罗华两人取得的研究成就并不十分显著，但作为近代数学的一个转折点仍是极其重要的。

1.3.3 物 理 学

群论在物理学中的应用促成了各种重要的发现，其中著称于世的是爱因斯坦 (A.Einstein)的相对论。在狭义相对论中，爱因斯坦证明了在两个作等速运动的坐标中观察同一种物理现象时不会产生矛盾的结论。从另一种角度来说，物理法则的形式取决于它的实验结果，而与观察者当时的环境无关。进一步说，即使观察者的位置不同，也不改变物理法则的形式。

众所周知，相对论的一个重要结论是质量与能量的等价性。由于我们发现了可把质量变换成能量的方法，所以才能在这以后制造出用于发电的原子反应堆等设备。

综上所述，我们在各个方面都应用了对称性和群论，两者初看毫无关系，但却产生了种种意想不到的结果。各个领域共同使用的正是对互换的不变性，即对置换及变换的不变性。这种不变性就是对称性，描述对称性的数学即是群论。

我们观察生物后就可看到它具有许多不同的对称性。我们必须解释：这种对称性是怎样产生的，存在不变性或不变量的原因，不变性的本质是什么……。

我们从对称性方面来观察生物将可提出许多具有启示性的问题。

这里，我们在分析生物对称性之前必须对群论作些简单的介绍。

第二章　群　　论

群论是研究群性质的一门数学分支。群系指具有某种特定基本性质的物的集合。这种基本性质定义了群，它的定义将在下节描述。

这里指的"物的集合"，若用数学语言表示，就是指一些符号的集合。由于符号间决定了运算法则，所以我们在研究群论时是以符号进行运算的。在进行一种代数运算时，若取出代数运算中可用的性质，就能够把它应用在生物学中。

本章分为几个小节，介绍可在生物学中应用的群，并对这些群有关的基本事项作说明。读者通过本章的学习，将可知道群论究竟是什么回事。

必须指出，在与读者有关的各个专门领域中，也许需要应用这里未加说明的其他群。为此，本书引用的文献一律标以星号*，以便查阅。

2.1　群的定义

我们把计算物的数量而用的数字 1, 2, 3, …，叫做自然数。自然数相加

$$1+1=2, \tag{2.1}$$

$$1+2=3, \tag{2.2}$$

$$1+3=4, \tag{2.3}$$

$$2+2=4, \tag{2.4}$$

……

仍为自然数。

一般来说，两个自然数 a 和 b 相加，仍为另一个自然数。若把该运算结果得到的自然数写为 c，则

$$a+b=c. \tag{2.5}$$

以上这种关系在 a, b, c 之间是成立的。

假如把自然数全体的集合写为 N，那么任意个自然数理所当然都包含在 N 中。

例如，自然数 1 是 N 中的一个元素(以后简称元)，这事写为

$$N \ni 1 \text{ 或者 } 1 \in N. \tag{2.6}$$

若用符号表示，就可写为

$$N \ni a \text{ 或者 } a \in N. \tag{2.7}$$

对于上述的 a, b, c 也可写为

$$a, b, c \in N. \tag{2.8}$$

* 例如，引用文献写成 H.Weyl(1952)，即为 1952 年出版的 H.Weyl 文献。

这里当然不限于全体自然数，我们把要研究的对象物全体叫做集合。

若再回过来考察以上的符号，就能改写为下列形式。这就是说，

假设（a 和 b 是自然数）*

$$a, b \in N, \tag{2.9}$$

若（a 和 b 相加得 c）

$$c = a + b,$$

于是，c（仍是自然数）即为

$$c \in N。 \tag{2.10}$$

2.1.1 半　群

这里试对以上的关系式作些解释。

上一小节，我们只考虑了加法运算，而通常用的算术叫做四则运算，即包括加减乘除四则运算。加法是其中的一种运算。这里使用运算一词，系指在某种情况下任何一个元与另一个元的结合，结合又可是任何一种关系，它不限于四则运算，可按任何的法则进行。

由此可对群下一个定义，但群的定义不是一次能够写完整的，首先必须先对半群**下定义。

N 表示自然数的集合，下面来考察一下任意的集合 S。设 a 和 b 是 S 的元，即

$$a, b \in S。 \tag{2.11}$$

若在 a 和 b 间进行一定的运算后得 c，且

$$c \in S, \tag{2.12}$$

若这时用符号 $\circ$ 表示运算，则为

$$c = a \circ b。 \tag{2.13}$$

假如把 a 和 b 运算的结果再对 c 运算，与 b 和 c 运算的结果再对 a 运算两者相等，即成立

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \tag{2.14}$$

时，这叫做结合律。

定义：在集合 S 中，由 $\circ$ 表示它运算的定义并对该 S 任意的元 a, b, c 使式（2.14）结合律成立，这时 S 叫做对 $\circ$ 构成半群。

假如 a 对 b 的运算结果与 b 对 a 的运算结果相等，写为

$$a \circ b = b \circ a, \tag{2, 15}$$

这叫做交换律。这时 a 和 b 对运算 $\circ$ 是可换的，并且若对 S 任意的元交换律成立，这时 S 叫做可换半群。

这里再来看一下刚才讨论过的自然数集合，N 对加法 $+$ 构成半群且满足交换律，所以它是可换半群。

2.1.2 群

介绍了半群后，才能定义群。但对群下定义除要有半群定义外，还需要介绍单位元和逆元。

---

* 括弧中的解释与下式含义相同，这里用了文字和式子两种形式，以后仅用式子表示。

** 半群与马尔可夫过程的解析有关。