大学数学学习方法指导丛书（Ⅲ辑）

线性代数

姚慕生 编著

复旦大学数学系主编

复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

大学数学学习方法指导丛书(Ⅲ辑)

线 性 代 数

复旦大学数学系　主编

姚慕生　　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/姚慕生编著. —上海:复旦大学出版社,2004.12
(大学数学学习方法指导丛书(Ⅲ辑))
ISBN 7-309-04225-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 姚… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 106211 号

线性代数

姚慕生 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 陈 萍
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海第二教育学院印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 16.25
字 数 301 千
版 次 2004 年 12 月第一版第一次印刷
印 数 1—6 000

书 号 ISBN 7-309-04225-5/O·333
定 价 25.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。
版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书是大学本科线性代数的学习参考书，其中汇集了线性代数的诸多典型例题，分类讲述了各种问题的解题方法，以期提高学生分析问题和解决问题的能力. 在每一章中都配有相应的训练题，读者可以通过这些训练题的练习检验自己的学习效果(所有训练题都附有答案). 本书不仅适合初学者作为提升自己知识水平和能力的参考书. 也适合志在考研的学生作为复习参考书.

序　言

10多年前，我系几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书．丛书出版后颇受欢迎，不久书市即告售罄．其后，兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购，出版社也多次与我们联系再版事宜，只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务，无暇顾及修订工作．近年来，随着学科的发展，课程建设又提上了议事日程．我系一些重要基础课的新教材陆续问世，与此同时，不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿．在复旦大学出版社的促进下，推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了．

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期．科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的进展，大大拓广了数学科学的范围和领域．在不少场合，数学已经从科学研究的幕后，大步跨上了技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙．这就导致社会对其成员数学能力要求的指标不断提高，期望涌现出更多的数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才．相应地，数学教育的目标，也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练．卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争作好准备．

数学的理论是美妙的，引人入胜；数学的方法是精巧的，丰富多彩；但学好数学却必须付出艰辛的劳动．在教学过程中，我们经常遇到这样的学生：他们能背出一些基本的公式，却做不了略有变化的演算，他们能记得住一些基本的定理，却给不出稍分层次的推理．有些学生依然留恋早年接受的、为应试而被不恰当地夸大了的"题型教学"，不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了．这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩，他们对数学知识只停留于形式的理解，并未达到实质的掌握．其实，与大多数其他学科相比，数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会．在任何一门数学课程的学习过程中，起主导作用的并非教师，而是学生．学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程．学生应当按自己的认识去解释、分析所学的内容，用新的观点去改造原有的理解，从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印．只有通过深入的思考，将吸收的新知识有机地融入原有知识结

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

构中，用心灵的创造来体验数学，对抽象的对象建立起直观的理解，才能真正地学好数学．我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪．

虽然，学习数学的方法因人而异，但是，数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的．首先，要学好一门数学课程，毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想．这就是说，既要深入理解有关主要对象的概念和性质，又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起，从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升，融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神．其次，数学思想是通过特定的数学方法来实现的，每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具，也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据．从猜想的形成、分析的展开，到计算、推理的实施、提炼、拓广的升华，数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值．再次，每门数学课程都有不少特殊的数学技巧．它们不仅显示了运算与论证的灵活性，而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素．一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想象和敏锐的观察．数学技巧的介绍与训练，对学生思维的引发、开拓和深化有十分重要的意义．总之，数学思想、数学方法和数学技巧三位一体，共同构成了有血有肉的一门门数学课程．因此，要学好数学，也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下功夫．

正是基于上述认识，在这套丛书中，每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论，同时，还配置了一定数量的习题．希望读者可参照这个内容的三部曲，通过对数学思想、方法和技巧的思考与消化，把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶．

编写这套丛书的作者们都具有丰富的教学经验，他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要：无论是学生在学习相应课程时同步使用，还是在学完一门课程后作总复习的参考，抑或为报考研究生而作考前准备，都将从中获得较大的收获．我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流．

复旦大学数学系将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划之中．数学系、所的许多教授对如何编好这套丛书提出一系列中肯的建议，为提高丛书质量创造了有利条件．复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血．我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意．

限于水平，这套丛书的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正．希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套丛书日趋成熟．

复旦大学数学系

教学指导委员会

2004 年 9 月

前　言

线性代数是大学数学基础课的一门必修课程. 这门课程的特点是概念性强，内容比较抽象，一些初学的同学往往在解题上遇到困难. 另外，线性代数也是研究生入学考试课程之一. 编者近年来参与了部分研究生入学考试的辅导工作，不无惊讶地发现，有相当一批平时成绩不错的学生在高等数学的考研考试中败下阵来，特别是线性代数往往只得了很少的分数. 究其原因，我发现主要是他们缺乏应有的训练. 大学学习和中学学习有所不同，大学更强调学生的主动性. 大学里的老师在课堂上往往只把课程的主要内容、主要思路交代清楚就完了，他们一般不会也不可能花大量的时间去教学生如何解题. 老师布置的习题也往往注重于对课堂内容的理解方面，大多是一些比较基本的训练题. 而要学好一门课，光做这些习题是完全不够的. 这就需要学生在课外自己去阅读参考书籍，找习题进行练习，分析思考各种问题，达到融会贯通，举一反三的境界. 大家都知道，要学好数学，必须多做练习. 但是有的同学习题做了不少，仍收获不大. 这就有一个方法问题. 古人云：学而不思则罔. 只有勤于思考，才能抓住规律，提升自己的理解力. 为了帮助学习者在学习线性代数的过程中掌握线性代数的思想方法，编者认为有必要将自己多年来在教学上积累的典型题例加以分类整理，以学习方法指导的形式为学习者提供一个学习训练与提高的机会，这就是本书的编写宗旨.

编者希望本书提供给读者的不仅仅是一些习题的简单汇编，而是要提供分析问题和解决问题的方法. 因此编者有意将一些类型相同的例题放在一起，希望学习者通过阅读这些例题自己就能找出解题规律来. 编者也常常用不同的字体将这类问题的解决方法作了介绍，请读者注意阅读. 每一章之后，都有相当数量的习题让读者练习，这些习题和例题是配套的，只要理解了例题中的方法，解这些习题应该不成问题. 所有的习题都有答案供读者参考.

这是一本旨在提高学生能力和知识水平的书，因此一些比较简单的习题就不再收录. 尽管如此，初学者仍可以毫无困难地读懂本书的内容. 本书还适合考研的学生复习使用，事实上，书中有不少例题就是历年的考题. 编者深信，只要能够掌握书中提供的各种解题方法，对付考研应如“囊中探物”.

编者
2004 年 9 月

目　录

第 1 章

行 列 式

§1.1 基本概念

1.1.1 行列式的定义

1. 行列式的概念

n^2 个数(或称元素)依次排成 n 行、n 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式.

2. 余子式

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式，划去 $|A|$ 的第 i 行及第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的先后顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，这个行列式称为 $|A|$ 的第 (i, j) 个元素的余子式，记为 M_{ij}.

3. 行列式的归纳法定义

定义 设 $|A|$ 是如(1.1)式所示的行列式，若 $n=1$，即 $|A|$ 只含一个元素 a_{11}，则定义 $|A|$ 的值就等于 a_{11}. 假定对 $n-1$ 阶行列式的值已定义好，那么对任意的 i, j，$|A|$ 的第 (i, j) 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 已经定义好，定义 $|A|$ 的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.2}$$

4. 代数余子式

设 $|A|$ 是如(1.1)式的 n 阶行列式，M_{ij} 是 $|A|$ 的第 (i, j) 元素的余子式，定义

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$|A|$的第(i,j)元的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.3}$$

5. 定理

设$|A|$是如(1.1)式的 n 阶行列式,则对任意 $j(1\leqslant j\leqslant n)$,

$$|A|=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}, \tag{1.4}$$

或用代数余子式表示为

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \tag{1.5}$$

(1.4)式、(1.5)式称为行列式按第 j 列展开. 由对称性,行列式也可以按行展开:

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}, \tag{1.6}$$

或用代数余子式表示为

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}. \tag{1.7}$$

6. 行列式的另一种定义

设$|A|$是 n 阶行列式,它的第(i,j)个元素是 a_{ij},定义$|A|$的值为

$$\sum_{(k_1,\cdots,k_n)}(-1)^{N(k_1,\cdots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n},$$

其中 $N(k_1,\cdots,k_n)$表示排列$(k_1,\cdots,k_n)$的逆序数,求和是对所有的排列.

1.1.2 行列式的性质及行列式的计算

1. 行列式的性质

性质 1 行列式转置后的值不变,即$|A'|=|A|$.

性质 2 以某个常数 c 乘以行列式的某一行(或某一列),所得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

性质 3 行列式的两行(或两列)对换,行列式的值改变符号.

性质 4 如果一个行列式的某两行(或某两列)成比例,则行列式的值等于零.

性质 5 若行列式的某一行(或某一列)元素 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$,则该行列式可分解为两个行列式之和,其中一个行列式的相应行(或列)的元素为 b_{ij},另一个行列式的相应行(或列)的元素为 c_{ij},用式子来表示就是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对列也有类似等式成立.

性质 6 将行列式的某一行(或某一列)乘以常数 c 以后加到另外一行(或列)上去,行列式的值不变.

2. 行列式的计算

如果用定义来计算行列式,除了极少量的行列式可以比较容易算出外,大多数行列式的计算十分繁琐. 行列式的计算主要是运用它的性质来进行计算.

1.1.3 一些常用行列式

1. 上(下)三角行列式

上三角行列式或下三角行列式的值都等于主对角线上元素的积:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 范德蒙(Vander Monde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}^{n} (x_i - x_j).$$

3. 分块行列式

$$\begin{vmatrix} A & M \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|,$$

A,B 为方阵.

1.1.4 克莱姆(Cramer)法则

设有 n 个未知数,n 个方程式的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知数.

上述方程组的系数行列式记为$|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次替换$|A|$的第一列元素,便得到一个行列式:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再将 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次替换$|A|$的第二列元素,得到行列式$|A_2|$:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

不断这样做下去,即用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 依次替换 A 的第三列,第四列,…,第 n 列,便得到$|A_3|,|A_4|,\cdots,|A_n|$.

若行列式$|A|$的值不等于零,则该方程组有且只有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

§1.2 例题解析

1.2.1 用性质可化为三角行列式或可降阶的行列式

某些行列式利用性质6消去某一行(或某一列)的大部分元素后,可以直接化为三角行列式或可以降阶. 这类行列式的计算通常比较容易. 下面是几个典型的例子.

例 1.1 计算 n 阶行列式:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 将第一行依次加到其他行上便得到一个上三角行列式且主对角线上元素依次为 $1,2,\cdots,n$. 因此 $|A|=n!$.

下面是所谓的爪型行列式,它也可以化为三角行列式来计算.

例 1.2 求下列 $n+1$ 阶行列式的值($a_i\neq 0$):

$$|A|=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解 第 i ($i=2,\cdots,n+1$)列乘以 $-a_{i-1}^{-1}$ 加到第一列上,得到

$$|A|=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=(a_1a_2\cdots a_n)\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\right).$$

例 1.3 计算 n 阶行列式($a_i \neq 0$)：

$$|A|=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}.$$

解 第一行乘以(−1)依次加到其余各行上去得到一个爪型行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}-1\right).$$

1.2.2 按某一行(列)展开法

将行列式按某一行(或某一列)展开也是计算行列式的重要方法. 这种方法常在某一行(列)元素零比较多或在某些理论证明题中运用.

例 1.4 求下列行列式的值：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开得

$$|A|=a\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

再将得到的两个行列式分别按第一列和第一行展开：

$$|A|=a^2\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}-ca\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-bc)\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}-ca\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-bc)a\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}-(a^2-bc)c\begin{vmatrix} b & 0 \\ c & a \end{vmatrix}-abc(a^2-bc)$$

$$=a^5-4a^3bc+3ab^2c^2.$$

例 1.5 计算下列 n 阶行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开经计算得

$$|A|=a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}=a^n-a^{n-2}.$$

例 1.6 设有斐波那契(Fbonacci)数列：$F_1=1, F_2=2, \cdots, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. 求证：

$$F_n \text{ 是 } n \text{ 阶行列式}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

证明 显然 $F_1=1, F_2=2$. 将 F_n 按第一列展开，再将 -1 的余子式展开即得

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

例 1.7 设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数，

$$F(t)=\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com