无线电外弹道测量结果统计处理基础

[苏] Б·Ф·日丹纽克 著

宇航出版社

无线电外弹道测量结果统计处理基础

〔苏〕Б.Ф.日丹纽克 著
阮崇德 王迺斌 译
徐绍荣 校

宇航出版社

内 容 提 要

本书介绍了统计处理试验数据的基本方法，在统计处理弹道测量结果基础上给出了一些测定飞行器运动的方法。

本书供设计和使用弹道测量设备的专业人员和大学生使用，对于在工作中使用统计处理数据的工程技术人员也不无裨益。

Основы статистической обработки траекторных измерений
Б.Ф.Жданюк
чздательство《Советское Радио》
1978 .Г.

无线电外弹道测量结果统计处理基础

〔苏〕Б.Ф.日丹纽克 著
阮崇德 王迺斌 译
徐绍荣 校

宇航出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
北京农机学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张:15.5 字数：385千字
1987年2月第一版 1987年2月第一次印刷
印数：1—1200 统一书号：15244·0030 定价：3.20元

译　　序

研究无线电外弹道测量结果统计处理方法的目的，在于确定飞行器落点精度和入轨精度，并在此基础上分析研究产生落点误差和入轨误差的原因。但是，由于无线电外弹道测量结果的统计处理工作是一项规模宏大的系统工程，它涉及到无线电的各个领域，涉及到光学，大地测量学，还涉及到各种数学方法等研究领域，因此必须有牢固的理论基础，以指导这项工作。为此目的，作者编写了这份系统性的理论教材，供参加弹道测量工作的技术人员学习使用。正如作者自已在前言中所介绍的：“虽然本书的主要任务是对研究的问题进行数学研讨，但是所采用的方法并不是纯理论性的，因为每一个问题都充分建立在弹道测量实践的基础之上。”书中所给出的实例对参加弹道测量工作的技术人员是一份宝贵的资料，书中所提出的弹道测量规划理论可供研究弹道测量规划和靶场布局的技术人员参考。本书既然是一本研究统计处理原理的文献，因此，一切研究统计理论的数学工作者也会对它有兴趣的。

译　者

1984,6,9　于北京

前　言

随着导弹和航天技术的发展、多种用途的航天器的发射、愈益完善的电子计算机的出现和统计概率方法的实际应用，用统计处理无线电外弹道测量值，以测定飞行器运动参数的工作得到了很大的发展。

现代无线电外弹道测量设备发展的特点是飞行器的运动参数的测量过程与测量结果的数学处理方法密切相关，并且相互影响。这就使许多设计和使用无线电外弹道测量设备的专家对研究根据测量结果测定飞行器运动的方法更感兴趣。

本书介绍了根据试验数据对参数作统计估算的基本方法。着重研究在统计处理无线电外弹道测量值的基础上应用这些方法对飞行器运动参数作最佳估计。虽然本书的主要任务是对研究的问题进行数学研讨，但所采用的方法并不是纯理论性的，因为每一个问题都充分建立在弹道测量实践的基础之上。

书末附有编写本书时所用过的以及为了更深入地理解我们所研讨的问题而推荐的文献目录。

本书在编写时出现过以下一些问题：对于飞行器运动参数测量误差的概率特性的估计方法研究不够；对于发现并排除异常测量结果的方法研究不够；在研究按弹道测量结果测定飞行器运动的方法时缺乏通用的分类法和术语等。作者在归纳材料时是根据自己的教学工作和参予研究工作的经验阐述问题的，因此并非所有的定义和用语都是不可移易的，其中有些定义和用语无疑尚需商榷。因此，读者对该书提出的意见，作者将欣然接受。

作者感谢苏联科学院通讯院士А.Ф.博戈莫洛夫（Богомолов）审阅本书手稿并提出了许多有益的意见和建议，衷心感谢技术科学博士Д.А.波戈列洛夫（Погорелов），感谢В.П.科瓦连科（Коваленко）、Г.В.奥布列兹科夫（Обрезков）、А.П.富尔索夫（Фурсов）、А.А.雅科夫列夫（Яковлев）、В.Д.亚斯特列博夫（Ястребов）等副博士，他们的宝贵意见和建议对于本书的定稿有很大帮助。

目　　录

第一部分　按测量结果估计参数的方法

第二部分 按外弹道测量结果测定飞行器的运动

1. 基本概念

1.1 根据弹道测量结果测定飞行器运动问题的提出

无线电外弹道测量的目的是测定飞行器① 的实际运动参数，以保证飞行器的飞行试验和实际应用。因此，必须从最优完成这个任务的角度出发来设计和使用测量设备、确定测量总体的结构与工作原理。

根据弹道测量结果测定飞行器运动参数时应考虑如下诸要素：

—— 飞行器运动的数学模型；

——确定被测函数与飞行器运动参数之间关系的测量方程；

——描述测量误差的函数形式和测量误差统计特性的试验条件；

——估计未知参数的最优准则。

下面对以上概念分别加以说明。

运动模型

现在，数学模型的概念在工程控制论中用得很广。B.B.纳利莫夫(B.B.Налимов) 对建立和使用数学模型的方法进行了详细的分析[1]。在这一文献中指出，可以把科学定律的概念与数学模型的概念对比一下。当需要降低对被观测现象的数学描述的要求时就要作这种对比。科学定律在当时的知识水平上具有某种绝对范畴的性质。它或者绝对正确，或者完全不正确，而予以否决。对用来描述那些组建得不完善的系统（这类系统有时也称为大系统）的数学模型提出的要求则是另一种性质的。因为这里要考虑许许多多不同因素的作用。这些因素产生性质不同，但是密切地相互作用的过程。此时就谈不上什么绝对范畴了。数学模型仅能提供关于组建得不完善的一个系统的特性方面的某种表述。该系统的同一些情况可以用同时都能成立的不同的模型来描述。

数学模型建立在全面分析系统性能和广泛利用先前所作统计研究结果的基础之上。它应当相当完备，以便能正确描述系统；但同时又应当相当简单，以便使得到的算法能在计算机上实现。

飞行器的运动极为复杂，因为它是在与运动参数，飞行环境，飞行器结构，飞行器控制

① 在本书中，飞行器指的是弹道式导弹、弹道式导弹的头部和人造地球卫星。

系统以及其它一些因素有关的力系作用下发生的。飞行器运动过程的复杂性造成了对它进行全面充分研究的困难。因此，在进行理论研究的时候，可以用某种简化的模型来代替飞行器的实际运动过程，用表明飞行器运动过程基本规律的一定的方程组来描述飞行器的运动模型。

根据无线电外弹道测量结果测定飞行器运动时采用的运动模型，可分为动力学的和运动学的两种。是否考虑飞行器的惯性（质量）和飞行器在飞行中所受作用力，是对运动模型进行这种分类的根据。下面我们将看到，正是这种情况在测定飞行器运动时起了决定性的作用。

如果在给定的时间区间 t 内能求出飞行器质心在选定座标系中的相位座标(运动参数)与时间 t 的关系式 $\mathbf{X}=\{x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\}$；$(\dot{x}_l=dx_l/dt \quad l=1, 2, 3)$，则可认为飞行器的质心运动是已知的。

未知运动参数 $\mathbf{X}(t)=\{x_1(t), x_2(t), \cdots, \dot{x}_3(t)\}$ 可通过对下列相应的飞行器运动微分方程组进行积分的方法求得：

$$d\mathbf{X}/dt=f(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}, t), \tag{1.1}$$

式中 $\mathbf{\Lambda}=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$——表征飞行器、飞行器控制系统和飞行器周围环境的某些常值参数向量。求解方程组（1.1）时，必须知道与瞬时 $t_0 \in T$ 相应的常值参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R$ 和对应于某一时刻 $t_0 \in T$ 的运动初值条件 $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$。这时可以认为，对任意瞬时 $t \in T$ 来说，运动参数 $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ 都是运动初值条件 x_{j0}，$\dot{x}_{j0}(j=1, 2, 3)$ 和常值参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的函数，

（1.1）型微分方程组是飞行器运动的动力学模型。

建立飞行器运动的动力学模型的基本步骤如下：

——建立飞行器及其在飞行中所受作用力的模型；

——选择同实际目标固联的参考系（我们所研究的正是飞行器相对于该目标的运动）；

——写出表达运动基本规律的原始向量关系式；

——选择座标系；

——将原始向量关系投影到选定的座标系诸轴上，并写出标量运动方程。

在解决所研究运动的具体问题时，选择飞行器及其所受作用力的模型应保证使运动的数学模型能以给定精度描述飞行器的实际运动。可以在过去研究飞行经验的基础上作出假设，而必要时可在解题的过程中进行修正。在建立模型时，首先是要考虑决定飞行器运动的主要因素，并排除次要因素。

在对弹道测量值进行数学处理的基础上测定飞行器运动的绝大多数实际问题中，可以把飞行器看作是常质量的或变质量的刚体，而且在整个飞行过程中认为飞行器的对称轴始终与其质心速度向量相一致。在这种情况下，飞行器的运动可以看成是“质点运动方式”，即只研究飞行器质心的运动。本书采用的就是这种质点运动的方式。

我们所研究的飞行器（弹道式导弹、弹道式导弹的头部和人造地球卫星）是作近地飞行的。因此，这类飞行器的运动适于在与地球固联的参考系中测定。选择起始向量关系——基本

运动规律和座标系（将这些向量投影到该座标系的轴上）的目的，是研究飞行器的运动和确保简便地计算飞行器的运动。

如果作用在飞行器上的各种力都可用已知的确定型关系式来描述，我们便称给定的T区间内飞行器运动的动力学模型为确定型模型。在这种情况下，公式中用以计算由作用于飞行器上的力产生的加速度的全部或部分参数λ_1，λ_2，…，λ_k值，可以是未知的，或者给得不够准确。

确定型动力学模型常常用来测定自由飞行（弹道飞行）段的人造地球卫星、弹道式导弹的头部和其它飞行器的运动。这时大气对于飞行器运动的影响可看作是确定型现象。例如可将气动迎面阻力公式中的空气密度以指数关系的形式表示为系数已知或未知的飞行器在地球上空的高度的函数。

可以想象，在上述假设的条件下采用确定型模型来测定飞行器的运动，并不总是能满足精度要求的。例如空气密度的随机变动会引起飞行器航迹发生很大的变化，特别是在长时间飞行情况下影响更大。在这种情况下，为了根据在足够长的时间区间内观测飞行器的无线电外测系统的测量结果测定飞行器的运动，可以采用含有随机量或随机函数的动力学模型，即随机型运动模型。

因此，如果在统计处理测量结果前，先验地认为飞行器是在随机力系作用下运动的（哪怕其中只有一个力是含有随机量或随机函数的），那么，为了按无线电外弹道测量结果来测定飞行器的运动，便应当采用飞行器的随机型动力学模型。

飞行器的随机型动力学模型也可以用（1.1）型方程表示，但是在这种情况下，参数λ_1，λ_2，…，λ_k中，那些表征在随机模型中用随机函数描述的飞行器所受作用力的参数应当代之以决定这些函数的常参数Λ_s，$S=1，2，\cdots，m$。

对微分方程组（1.1）进行积分，是不会有太大困难的。因此，可以认为，如果根据统计处理无线电外弹道测量结果的方法能求出运动初值条件x_{10}，x_{20}，x_{30}，$\dot{x}_{10}$，$\dot{x}_{20}$，$\dot{x}_{30}$和未知参数λ_i或Λ_s（$i=1，2，\cdots，k$；$s=1，2，\cdots，m$）的值，便可采用确定型的模型或随机型的动力学模型来测定飞行器的运动。

但是，在处理无线电外弹道测量结果的实践中，经常出现在测量之前没有关于飞行器所受作用力的先验信息的情况。比如，在观测飞行器的受控运动时（弹道式导弹或航天器运载火箭的主动段、航天器在机动飞行段的运动等等）并不总是具备关于控制力变化规律的先验信息。这时可用装在飞行器上的惯性传感器测出与外力（如发动机推力和气动力）成比例的量。所得的测量结果可用于动力学运动模型。由于测量误差具有随机性质，动力学模型也就成为随机型模型。

如果所测得的是飞行器运动的位置参数或位置和速度参数（相座标），但缺乏飞行器上的某些主要作用力的先验信息或因某些原因未用这些信息，便可使用运动学模型来测定飞行器的运动。这里提一下，运动学是力学的一个分支，它研究物体在空间运动的几何特性，而不考虑其惯性（质量）和作用在物体上的力。因此，我们把未用飞行器质量及其作用力数据而写出的飞行器相座标向量与时间的关系式$\mathbf{X}(t)=\{x_1(t)，x_2(t)，\cdots，\dot{x}_3(t)\}$称之为飞行器运动的运动学模型。

这个关系式常常以多项式的形式表示：

$$x_i(t)=\sum_{k=0}^{n_i} a_{ki}t^k,\ i=1,\ 2,\ 3, \tag{1.2}$$

或

$$x_i(t)=\sum_{k=0}^{n_i} C_{ki}\varphi_k(t),\ i=1,\ 2,\ 3, \tag{1.3}$$

式中 $\varphi_k(t)$——一组线性独立函数。

当用（1.2）或（1.3）式的运动学模型来测定飞行器运动时，必须规定好多项式的幂 n_i，并求出逼近所测相座标的这些多项式的系数值 a_{ki} 或 C_{ki}。在规定平滑多项式的幂时，一般采用统计假设检验理论。用统计处理测量结果的方法可求出系数 a_{ki} 或 C_{ki} 的值。

因此，在采用上述动力学或运动学模型的基础上测定飞行器的运动参数时，必须相应地求出运动的初值条件 x_{10}，x_{20}，x_{30}，$\dot{x}_{10}$，$\dot{x}_{20}$，$\dot{x}_{30}$，未知参数 λ_i（Λ_s）或系数 a_{ki}（C_{ki}）。以上数值称为模型参数，并用 q_j 表示。

根据所采用的模型，可以对测定飞行器运动的方法进行分类。动力学模型通常用于测定飞行器在可用已知数学关系描述的力系作用下发生的无控运动。而测定飞行器的受控运动时，最常用的是运动学模型。

测量方程，飞行器运动的被测参数与瞬时参数之间的函数对应可用下列测量方程求得：

$$\mathbf{Z}=\Phi(\mathbf{X},\ t), \tag{1.4}$$

式中 **Z**——被测参数的 m 维向量。

被测参数是指径向距 D、高低角 γ、方位角 A、方向余弦 $\cos\theta_x$，$\cos\theta_z$、径向距变化率 $\dot{D}$ 等。

方程（1.4）按其性质来说是几何学和运动学的关系式。我们假设，这些关系式列得同实际的关系式完全一样。

试验条件　在数理统计学中，试验条件应理解为测量误差与被测参数之间的组合（相关）方式和测量误差的统计性质。在一般情况下，测得的参数向量 **H** 与被测参数 **Z** 和测量误差向量 $\Delta\mathbf{H}$ 成函数相关：$\mathbf{H}=\zeta(\mathbf{Z},\ \Delta\mathbf{H},\ t)$。

我们只研究 $\zeta(\mathbf{Z},\ o,\ t)=\mathbf{Z}(t)$ 情况下的测量误差同被测参数的组合方式。

实践中用得最广的相加的方法即 $\mathbf{H}(t)=\mathbf{Z}(t)+\Delta\mathbf{H}(t)$。可以满足这一条件。

分布律 $F(\Delta h_1,\ \Delta h_2,\ \cdots,\ \Delta h_N)$ 是随机测量误差统计性质的全面的表征。但是由于求算随机测量误差的分布函数很复杂，所以研究人员一般只能用前两个因素：数学期望向量 $\mathbf{M}[\Delta\mathbf{H}]$ 和测量误差的相关矩阵 $\mathbf{K}_H$。

因为在无线电外弹道测量结果中含有随机误差，所以在根据观测飞行器的结果测定飞行器的运动时，必须采用数理统计的方法。实际上这里可以用各种不同的方法对测量结果进行统计处理：用最小二乘法，或最大似然法，或最大后验概率法等等。具体采用什么方法，要根据未知参数的先验信息、测量误差与被测参数的组合方法（测量误差相加，或成某种非线性测量函数关系）及测量误差统计性质而定。使用上述信息的充分程度决定着未知参数最优估计

准则 $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{H})$ 的选择。

为了按外弹道测量结果测定飞行器运动，提出了下列命题。

已知：飞行器运动的数学模型 $\mathbf{X}=f(\mathbf{X}, \lambda, t)$ 或 $\mathbf{X}=\theta(c, t)$；测量方程 $\mathbf{Z}=\varphi(\mathbf{X}, t)$；试验条件 $\mathbf{H}=\zeta(\mathbf{Z}, \Delta\mathbf{H})$ 和分布函数 $F(\Delta h_1, \Delta h_2, \cdots, \Delta h_N)$ 或数学期望 $\mathbf{M}[\Delta\mathbf{H}]$ 和测量误差的相关矩阵 $\mathbf{K}_H$；测量采样 $\mathbf{H}=\{h_1, h_2, \cdots, h_N\}$，求最佳估值 $\hat{\mathbf{X}}$（就所选定的准则 $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{H})$ 而言）。

在根据外弹道测量结果测定飞行器的运动时，首先应当研究是否存在解，而且是不是唯一的解，即是否可能根据已有的测量结果来测定所选飞行器运动数学模型的参数。

我们从可观测性理论的角度来着手解决这一问题，即把飞行器看成是一个动力学系统并采用动力学系统可观测性理论的数学工具。

这里提示一下，如果所研究的系统中的过程是连续过程，并且系统中产生的变化可用状态向量函数分量的导数求算，导数在每一瞬时仅与这些分量的大小有关，则这种系统称作动力学系统。飞行器的运动过程具有全部上述性质，因此可以把飞行器看成是动力学系统。于是也就可以用有关的动力学系统的状态向量来表征飞行器的运动。

根据系统输出信号的测量结果来测定动力学系统状态的可能性称为动力学系统的可观测性。适应于用无线电外弹道测量结果测定飞行器的运动参数（动力学系统的状态向量函数），可观测性表征着有关动力学系统状态向量集与测量采样集相互之间的单值关系。显而易见，在根据试验数据实际测定飞行器的运动时，系统可观测性的检验问题应当作为一个首要问题来解决。

选取未知参数估计质量最佳化准则的方法有两种：①用测量结果的全部采样进行统计处理；即当全部测量结果都进入计算机存储器之后进行处理；②对采样量不断增加的测量值进行处理，这样可以随着测量值的不断进入而求算出未知参数的估值。选用第一种方法还是第二种方法，这决定着解题的计算步骤。

由此可见，根据外弹道测量结果测定飞行器运动的过程一般包括以下几个主要步骤：

——选择飞行器的运动模型；

——检验根据给定的测量采样测定飞行器运动的可能性；

——假设试验条件；

——选择测量结果的统计处理方法（即选择估计未知参数的最优准则）；

——选择对未知参数最优估计的方法；

——估计未知参数及其精度；

——检验所采用的飞行器运动模型与实际运动的相符程度和所假设的试验条件与实际条件的相符程度。

实现上述步骤时有两个主要问题：①选取飞行器运动的数学模型；②给出模型未知参数的先验数据和测量误差概率特性的先验数据。

经过统计处理和理论归纳的根据试验数据测定飞行器运动所得的结果，可以揭示飞行器运动过程的最根本的性质，定量地评定影响飞行器运动的诸因素，并弄清哪些因素必须在测定飞行器运动时予以考虑，从而能更加正确地建立飞行器的运动模型。

必须指出，按无线电外弹道测量结果测定飞行器实际运动的工作，要求预先对一系列问

题进行理论研究，诸如：必须制定最佳测量大纲，即确定测量设备的种类，所需的测量次数和采样步长；确定设置测量设备的地点；在分析测量站址的大地测量误差对测定飞行器运动精度影响的基础上，提出对大地测量联测的精度要求等等。特别要注意求算测量误差的概率特性的问题。制定有科学根据、能有效地利用全部测量结果的测量大纲，是无线电外弹道测量规划理论要解决的基本问题之一。只有在全面应用工程控制论、无线电外弹道测量设备的设计与使用的理论、飞行器弹道学、数理统计学、计算数学和试验设计理论的基础上才能解决这个问题。

现在还不可能全面研究最佳实现按无线电外弹道测量结果测定飞行器运动过程而必须解决的一切问题。本书只是试图提出最佳规划无线电外弹道测量和使用其测量结果的某些主要问题，并研究解决这些问题的方法。本书的内容和结构，正是按上述解决测定飞行器运动问题的步骤和方法而定的。

1.2 估值及其性质

设已知某变量 a 的 N 个单独测量值 h_1，h_2，…，h_N，测量结果是随机量，且其数学期望值是$M[h_i]=a$，$i=1$，2，…，N。

按测量值的采样h_1，h_2，…，h_N估计被测量的真值 a，这就是说：

(a) 找出一个能很好逼近 a 值的测量函数 $\psi(h_1, h_2, \cdots, h_N)$（这个函数叫 a 值的总估值，或者就叫 a 值的估值）；

(б) 找出以给定概率P覆盖真值 a 的区间范围（$\psi-\varepsilon_1$；$\psi+\varepsilon_2$）。这种估值叫做置信估值，概率P叫估值的置信度，区间（$\psi-\varepsilon_1$；$\psi+\varepsilon_2$）叫做置信区间。

估值 $\hat{a}=\psi(h_1, h_2, \cdots, h_N)$ 是一个随机量，它取决于测量结果的具体采样和函数 ψ 的形式（即取决于测量结果的统计处理方法）。为了比较用各种不同的统计处理方法求得的估值，一般采用以下的估值基本特性：

<u>无偏性</u>　假如 $\hat{a}$ 是统计处理N个测量采样得到的a的估值，并且$M[\hat{a}]=a$，即估值的数学期望等于 a 的真值，则这样的估值就叫做无偏估值。

某些参数的无偏估值有时是测量结果的相当复杂的函数。在这种情况下，为了简化计算，可采用当测量采样N增加时，偏倚的绝对值迅速减小，而当$N\to\infty$时，偏倚的绝对值趋向于零的估值，这种估值即称为渐近无偏估值。

<u>有效性</u>　在对给定的测量采样采用各种可能的统计处理方法中，假如估值 $\hat{a}$ 的方差为最小，即$D[\hat{a}]=\min$，$\hat{a}$ 便称为有效估值。

如果$\lim\limits_{N\to\infty} D[\hat{a}]=\min$，则估值$\hat{a}$称为渐近有效估值。

<u>一致性</u>　如果无限增大测量采样N，估值 $\hat{a}$ 按概率趋向于 a 值，即当 $\varepsilon>0$ 的值任意小时均能满足条件

$$\lim_{N\to\infty} P(|\hat{a}-a|<\varepsilon)=1,$$

则该估值 $\hat{a}$ 便叫做一致估值。

例　我们讨论下面的估值问题。一颗人造地球卫星作圆轨道运行。当它在海洋上空运行时借助高度计以 N 个点测得飞行高度为 h。设 h 为真实飞行高度，测得的高度值为 $h_i=h+\delta h_i$，$i=1,2,\cdots,N$，其中测量误差的数学期望 $M[\delta h]=0$，而方差 $D[\delta h]=\sigma^2$。求卫星飞行高度的估值 $\hat{h}$。

我们取测量结果的算术平均值作为被测量 h 的估值 $\hat{h}$，

$$\hat{h}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h_i。$$

现在来分析该估值的性质。

估值的数学期望

$$M[\hat{h}]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}M[h_i]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h=h。$$

因此，估值 $\hat{h}$ 是无偏估值。估值 $\hat{h}$ 的方差

$$D[\hat{h}]=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}D[h_i]=\frac{\sigma^2}{N}, \qquad \lim_{N\to\infty}D[\hat{h}]=0,$$

即估值 $\hat{h}$ 是渐近有效估值。

我们用切贝舍夫不等式来检验估值 $\hat{h}$ 是否符合一致性条件。这个不等式证明，ε 为任意正数，随机变量 X 与其数学期望 m_x 的偏差不小于 ε 的概率上限为 D_x/ε^2：

$$P(|X-m_x|\geqslant\varepsilon)\leqslant D_x/\varepsilon^2,$$

式中 D_x——随机量 X 的方差。

上述例子中的随机量 $\hat{h}$ 可用数学期望 $M[\hat{h}]=h$，方差 $D[\hat{h}]=\sigma^2/N$ 表征，于是切贝舍夫不等式为：

$$P(|\hat{h}-h|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sigma^2/\varepsilon^2N,$$

由此得出结论，$\hat{h}$ 是一致性估值。

求算向量 $\mathbf{a}$ 的估值 $\hat{\mathbf{a}}$ 的统计特性与求算标量估值统计特性的方法相同。下面即为向量估值的统计特性。

无偏性　$M[\hat{\mathbf{a}}]=\mathbf{a}$。向量估值的精度可用估值相关矩阵的全部元素来表征。这就必须借助于某些广义指标来对估值进行比较。最常用的广义指标是估值相关矩阵的迹（对角元素的和）或行列式。

假如广义方差（估值相关矩阵 $\mathbf{K}_{\hat{a}}$ 的行列式）最小，则估值 $\hat{\mathbf{a}}=\|\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n\|^T$（上角标"$T$"表示转置）称之为一致有效估值。

当被估向量 $\mathbf{a}$ 的分量具有各种不同的物理意义和量纲时，这些参数的估计精度的广义指标宜采用标量 $D=\mathbf{J}^T\mathbf{K}_{\hat{a}}\mathbf{J}$（$\mathbf{J}$ 是预先给定的向量，其维数与向量 $\mathbf{a}$ 的维数相等）。采用了

这个准则，就可以考虑每一个带有相应“权”值的被估参数 a_j（$j=1, 2, \cdots, n$）对用方差 D表征的解题精度的影响。

例如，根据弹道测量结果，可以估算某初始时刻 t_0的飞行器质心运动的初值条件 x_0，y_0，z_0，v_{x0}，v_{y0}，v_{z0}。

运动初值条件的估值 $\hat{x}_0$，$\hat{y}_0$，$\hat{z}_0$，$\hat{v}_{x0}$，$\hat{v}_{y0}$，$\hat{z}_{z0}$ 可用来预报飞行器的运动。运动预报精度可用某瞬时 t 飞行器质心在弹道上的位置点的散布方差来表征。方差的表达式为 $D=\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\hat{Q}}$，其中

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}=\left\| \frac{\partial L}{\partial x_0} \quad \frac{\partial L}{\partial y_0} \quad \frac{\partial L}{\partial z_0} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{x0}} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{y0}} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{z0}} \right\|$$

是某瞬时 t 飞行器质心在弹道上的位置对运动初值条件的偏导数的矩阵；$\mathbf{K}_{\hat{Q}}$是飞行器质心运动初值条件估值的相关矩阵。

<u>一致性</u>　如果能满足条件

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\{\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a}\}<\varepsilon\right)=1$$

（式中$\{\cdot\}$是向量的范数），则向量 $\mathbf{a}$ 的估值 $\hat{\mathbf{a}}$叫做一致性估值。

这里提示一下，满足下列条件的实数$\{\mathbf{a}\}$称为向量 $\mathbf{a}$ 的范数：

1)　$\{\mathbf{a}\}>0$，若 $a\neq 0$和$\{0\}=0$时；

2)　$\{c\mathbf{a}\}=|c|\{\mathbf{a}\}$，$c$ 为任意乘数时；

3)　$\{\mathbf{a}+\mathbf{b}\}\leqslant\{\mathbf{a}\}+\{\mathbf{b}\}$。

最常用的向量范数如下：

1.　第一范数（立方的）：

$$\{\mathbf{a}\}_1=\max_i |a_i|。$$

因为满足条件$\{\mathbf{a}\}_1\leqslant 1$ 的实空间点集可构成一个单位立方体 $-1\leqslant a_i\leqslant 1$（$i=1, 2, \cdots, n$），所以称该范数为立方范数。

2.　第二范数（八面体的）：

$$\{\mathbf{a}\}_2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|。$$

因为$\{\mathbf{a}\}_2\leqslant 1$ 的向量集可构成n 维类似八面体，所以称该范数为八面体范数。

3.　第三范数（球形的或欧基里德的）：

$$\{\mathbf{a}\}_3=\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right]^{1/2}=|\mathbf{a}|。$$

$\{\mathbf{a}\}_3\leqslant 1$ 的向量集可在空间构成半径为一个单位的球体。不难验证，上述三个例子中的范数均能满足公理的要求。

显然，在选择估值时，应当着重采用在其它条件相同时能求得无偏、有效和一致性估值的那种统计处理试验数据的方法。

在测量结果的处理工作中常常要用随机向量$\mathbf{Y}$ 的分量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 构成线性组合：

$$U_i = d_{i1}Y_1 + d_{i2}Y_2 + \cdots + d_{im}Y_m,\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k, \tag{1.5}$$

式中d_{ir}为常量。

引用向量

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{k1} = \| U_1 U_2 \cdots U_k \|^{\mathrm{T}}$$

和矩阵$D = D_{km}$，关系式（1.5）可写成

$$\mathbf{U} = D\mathbf{Y}, \tag{1.6}$$

式中$\mathbf{U}$——随机向量$\mathbf{Y}$的线性向量函数。

定理1.1 向量$\mathbf{U} = D\mathbf{Y}$是k维随机向量，其数学期望为

$$M[\mathbf{U}] = M_{\mathrm{U}} = D\mathbf{A}, \tag{1.7}$$

相关矩阵为

$$\mathbf{K}_{\mathrm{U}} = D\mathbf{K}_{\mathrm{Y}}D^{\mathrm{T}}, \tag{1.8}$$

式中 $\mathbf{A}$——$\mathbf{Y}$ 随机向量分量的数学期望列向量；

$\mathbf{K}_{\mathrm{Y}}$——随机向量 $\mathbf{Y}$ 的相关距阵。

证明：

$$M[\mathbf{U}] = M[D\mathbf{Y}] = DM[\mathbf{Y}] = D\mathbf{A},$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{U}} = M[(\mathbf{U} - D\mathbf{A})(\mathbf{U} - D\mathbf{A})^{\mathrm{T}}] = M[D(\mathbf{Y} - \mathbf{A})(\mathbf{Y} - \mathbf{A})^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}]$$

$$= DM[(\mathbf{Y} - \mathbf{A})(\mathbf{Y} - \mathbf{A})^{\mathrm{T}}]D^{\mathrm{T}} = D\mathbf{K}_{\mathrm{Y}}D^{\mathrm{T}}。$$

如果在向量 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ 邻域内容许将方程（1.9）线性化，定理1.1 的 结 果便可以近似地推广到非线性函数的情况，$U_i = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_m), i = 1, 2, \cdots, k,$ （1.9）

按台劳公式将函数 f_i 展开，精确到一次项，得

$$U_i = f_i(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_m)$$

$$\approx f_i(a_1, a_2, \cdots, a_m) + \sum_{r=1}^{m}\left\{(Y_r - a_r)\frac{\partial f_i}{\partial Y_r}\bigg|_{\mathrm{A}}\right\}。$$

于是随机向量$\mathbf{U}$的数学期望向量为

$$M[\mathbf{U}] = \left\| \begin{matrix} f_1(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m) \\ f_2(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m) \\ \vdots \\ f_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m) \end{matrix} \right\|,$$

而相关矩阵 $\mathbf{K}_{\mathrm{U}} = \mathbf{F}\mathbf{K}_{\mathrm{Y}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ 中含有元素

$$K_{\mathrm{U}_s,\mathrm{U}_l} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left\{(Y_r - a_r)(Y_j - a_j)\ \frac{\partial f_s}{\partial Y_r}\bigg|_{\mathrm{A}}\frac{\partial f_l}{\partial Y_j}\bigg|_{\mathrm{A}}\right\},$$

$$l,\ s = 1,\ 2,\ \cdots,\ k;$$

$$\mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1}\Big|_{\mathrm{A}} \frac{\partial f_1}{\partial Y_2}\Big|_{\mathrm{A}} \cdots \frac{df_1}{\partial Y_m}\Big|_{\mathrm{A}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial Y_1}\Big|_{\mathrm{A}} \frac{\partial f_k}{\partial Y_2}\Big|_{\mathrm{A}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial Y_m}\Big|_{\mathrm{A}} \end{matrix} \right\|。$$

1.3 参数的置信区间估计法

应用数理统计方法，可以根据测量值的采样结果求算未知参数的估值：随机量的数学期望、方差和其它数字表征。这些数字表征值相对于其真值的散布，可用相应的无偏估值的方差来表征。但是知道方差还并不能确定采用这样或那样的估值所求得的数字表征值在给定的测量次数下能比表征值的真值差多少，也就是说还不能知道误差 $\delta\hat{x}_i = \hat{x}_i - x_i$ 会有多大。

由于未知参数的估值是随机量，所以不能准确指出误差 $\delta\hat{x}_i$ 的值。但是如果已知测量结果的分布律，就可以对这一误差的概率特性做出判断。

作为随机变量的未知参数的估值，可以通过其分布律而得到充分的表征。知道统计数字表征的分布律，就可以求出这些由实验得到的数值偏离相应表征真值的概率，也即所得结果的置信程度。求算所得未知量数值的置信度的这种方法，是以以置信区间估计参数为基础的。

置信区间可以理解为具有两个随机端点，并且能以足够高的概率P（置信概率）“覆盖”未知参数的未知真值的区间。

我们用一个根据标量 x 的直接测量值 x_i（$i=1, 2, \cdots, N$）来求解 x 值的最简单的例子，扼要地分析一下置信区间估计的实质。例中测量值无系统误差；测量值的随机误差按正态律分布，并且是独立的，用方差 σ^2 表征，而方差 σ^2 的值未知。

假设未知参数x及其方差σ^2的估值可分别用下列关系式求算：

$$\hat{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad ; \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2 \ 。$$

数理统计理论可以证明，$\hat{\sigma}^2$是随机量，在统计上与x相独立，其分布为$\dfrac{\sigma^2}{N-1}\chi^2_{N-1}$，而自变量

$$t_{N-1} = (\hat{x} - x)\sqrt{N}/\hat{\sigma} \tag{1.10}$$

按学生氏分布律分布，其自由度为$N-1$（自由度是测量的数减去被估参数的数）[2]。学生氏分布与 σ^2 无关，而且只是自变量 t 和自由度数$N-1$ 的函数。

知道估值 $\hat{x}$和$\hat{\sigma}^2$的分布律，就可以用置信区间估计法估算 x 和 σ^2 。

对学生氏分布而言，有一个自由度为 $N-1$ 和概率为 P 的双值表〔2—4〕。给出$N-1$和P值，即可从表中找到t_P，使

$$P(|t_{N-1}| < t_P) = P(\hat{x} - t_P\hat{\sigma}/\sqrt{N} \leqslant x \leqslant \hat{x} + t_P\hat{\sigma}/\sqrt{N}) = P。 \tag{1.11}$$

因此，区间$\{\hat{x} - t_P\hat{\sigma}/\sqrt{N};\ \hat{x} + t_P\hat{\sigma}/\sqrt{N}\}$以$P$概率覆盖未知量 x。

在利用 χ^2 分布表的基础上可以估计方差 σ^2。这个分布表（见附录1）也是双值的：自由度数 $\mu = N-1$ 和概率P，包括 γ_1 和 γ_2 值，它们满足以下条件：

$$P(\gamma_1\hat{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \gamma_2\hat{\sigma}) = P。 \tag{1.12}$$

由此可知，区间$\{\gamma_1\hat{\sigma};\ \gamma_2\hat{\sigma}\}$以$P$概率覆盖未知值$\sigma$。

由上述关系式可见，利用置信区间估计的方法同利用点估值的方法相比，所需的补充计算要少些。