高等学校经典教材配套辅导丛书

经济应用数学基础（一）

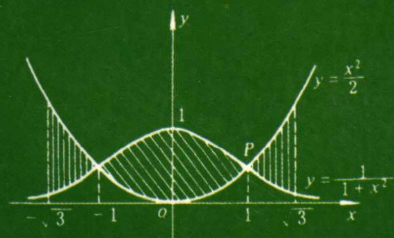
微积分

辅导及习题精解

人大修订本

吴　红　滕加俊　编著

◆ 名师执笔
◆ 精准解答
◆ 知识归纳
◆ 习题全解
◆ 经典考题



陕西师范大学出版社

等学校经典教材配套辅导丛书

经济数学基础
微 积 分
辅导及习题精解

吴 红 滕加俊 编著

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0049

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础:微积分辅导及习题精解/吴红,滕加俊 编著. —西安:陕西师范大学出版社,2005.2

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7－5613－3260－2

Ⅰ.经…　Ⅱ.①吴…②滕…　Ⅲ.①经济数学－高等学校－教学参考资料　②微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007390 号

责任编辑 史　进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 850×1168　1/32
印　　张 18.375
字　　数 365 千
版　　次 2005 年 3 月第 1 版
印　　次 2005 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 21.80 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070－00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)
E-mail:if-centre@snuph.com

前　言

《微积分》是经济数学中一门很重要的基础课，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。为了帮助广大学生扎实地掌握《微积分》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据赵树嫄编写的经济应用教学基础(一)—《微积分》编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成

1. 概念、定理及公式：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

2. 重点、难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此我们对课后习题给出了详细的解答。由于微积分解题方法多种多样，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其它方法留给读者自己去思考。

4. 考研试题精解：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握微积分的基本内容和解题方法。

本教材由吴红、汤光华、滕兴虎、周华任、罗剑、廖洪林等同志编写，全书由滕加俊统稿。在本教材的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者
2005.2.20

目 录

第一章 函 数

第二章 极限与连续

第三章 导数与微分

第四章 中值定理、导数的应用

第五章 不定积分

第六章 定 积 分

第七章 无 穷 级 数

第八章 多 元 函 数

第九章 微分方程与差分方程简介

第一章　函　　数

【基本要求、重点与难点】

（一）基本要求

1. 了解集合的概念，掌握集合的描述及运算；
2. 理解函数的定义及概念，会求函数的定义域；
3. 掌握函数的表示法和函数的简单性质；
4. 理解并掌握反函数，复合函数的定义；
5. 熟练掌握基本初等函数并了解初等函数的概念.

（二）重点

1. 函数的定义，会求函数的定义域；
2. 函数的基本性质；
3. 初等函数.

（三）难点

1. 复合函数.

【主要概念及公式】

（一）集合

1. 集合的定义

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总. 构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号括起来.

(2) 描述法:设 $p(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则,A 为满足 $p(a)$ 的一切 a 构成的集合
则记为

$$A = \{a \mid p(a)\}.$$

(3) 全集与空集

由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记为 U.

注:全集是相对的,一个集在一定条件下是全集,在另一条件下就可能不是全集.不包含任何元素的集合称为空集,记作 Φ.

4. 子集

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即"如果 $a \in A$,则 $a \in B$",则称 A 为 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 读作:A 包含于 B 或 B 包含 A.

子集的性质

(1) $A \subset A$,

(2) $\Phi \subset A$,

(3) 如果 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$. 传递性.

5. 集合的运算

设 A、B 是两个集合,定义

(1) 并集:$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

(2) 交集:$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$

(3) 差集:$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \bar{\in} B\}$

(4) 补集:$A' = \{x \mid x \in U$ 且 $x \bar{\in} A\}$

6. 集合的运算律

(1) 交换律:①$A \cup B = B \cup A$

②$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律：①$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

②$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律：①$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

②$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) 摩根律：①$(A \cup B)' = A' \cap B'$

②$(A \cap B)' = A' \cup B'$

7. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B. $x \in A, x \in B$，所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积. 记为 $A \times B$ 即：

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

（二）实数集

1. 有理数与无理数统称为实数，全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

2. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上的点（不论 x 在原点左边还是右边）与原点之间的距离.

绝对值及其运算的性质

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) 如果 $a > 0$，则下面两个集合相等.

$$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$$

(6) 如果 $b>0$,则下面两个集合相等.

$$\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x>b \text{ 或 } x<-b\}$$

(7) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

(8) $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

(9) $|xy|=|x| \cdot |y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

3. 区间

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

4. 邻域:称实数集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta, \delta>0\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

称集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$ 为以 x_0 为中心,半径为 δ 的空心邻域.

(三) 函数的关系

1. 函数的定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f,使每一个数 $x \in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数.

记作

$$y=f(x), \qquad x \in D.$$

x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，记作 $D(f)$. 全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$，称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$.

2. 函数表示法

(1) 公式法(又称解析式法) 把一个函数关系用一个解析式表示的方法；

(2) 表格法；

(3) 图形法.

3. 函数的几种简单性质

(1) 函数的奇偶性.

给定函数 $y = f(x)$.

① 如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

② 如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数关于原点对称，偶函数关于 y 轴对称.

(2) 函数的周期性.

对于函数 $y = f(x)$，如果存在正的常数 a，使 $f(x) = f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数，其中满足这个式子的最小正数 a，称为函数的周期.

(3) 函数的单调性.

给定函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内有定义. 对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的(或称单调递增)；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$ 则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的(或称单调递减).

(4) 函数的有界性.

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对任意的 $x \in (a,b)$，若存在 $M > 0$，使 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 有界.

否则不存在这样的 M,则称为无界.

(四) 反函数与复合函数

反函数:直接函数 $y=f(x)$,如果对每一个 $y\in \mathbf{Z}(f)$ 有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应,其对应规则记作 f^{-1},这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数,记为:$y=f^{-1}(x)$. 反函数关于 $y=x$ 对称.

复合函数:设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$,$Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

(五) 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数

(1) 常量:$y=c$

(2) 幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)

(3) 指数函数:$y=a^{x}$($a>0,a\neq 1$)

(4) 对数函数:$y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)

(5) 三角函数:$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$

(6) 反三角函数:$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x,y=\operatorname{arcsec} x,y=\operatorname{arccsc} x$.

(六) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切函数,统称为初等函数.

【重点、难点解答】

1. 定义域的求法.

函数的自变量的取值范围,称为函数的定义域,确定函数的定义域,常用下面几条原则:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 负数不能开偶次方根,即:偶次根号下的被开方数应大于或等于零.

(3) 对数函数的真数应大于 0;

(4) $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 中 $|x| \leqslant 1$.

2. 判别两函数是否相同.

两函数是同一函数必须满足如下二个要求,缺一不可.

(1) 定义域相同;

(2) 对应法则相同.

二条件全满足方表示为同一函数,否则称两个函数不相同.

3. 函数的奇偶判别,应注意两个方面.

第一,函数的定义域必须是关于原点对称的,否则为非奇非偶函数.

第二要满足奇偶条件.

即

$$f(-x) = f(x)$$

为偶函数或

$$f(-x) = -f(x)$$

为奇函数.

有时

$$f(x) + f(-x) = 0$$

也是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

4. 反函数的求法.

(1) 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出.

即

$$x = f^{-1}(y)$$

(2) 把 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x, y 互换位置

得

$$y = f^{-1}(x)$$

即为所求反函数.

注意：只有一一对应的函数才有反函数.

5. 函数的值域的求法.

我们知道函数的反函数是相互的，反函数的定义域即为原函数的值域. 所以求函数的值域只须求反函数的定义域即可.

6. 复合函数，是本章的难点.

(1) 在解题过程中，一般将函数的自变量用另一个函数的解析式整体代入. 这种方法较简单有效，又称为代入法.

(2) 注意各函数的定义域的各区间段，分析判别中间变量的定义域，值域来求复合函数.

习题一全解

(A)

1. 按下列要求举例.

(1) 一个有限集合；

解 $A = \{1,2,3\}$

(2) 一个无限集合；

解 $B = \{x \mid x > 5\}$

(3) 一个空集；

解 $C = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \text{ 为实数}\}$

(4) 一个集合是另一个集合的子集；

解 $A_1 = \{a,b,c,d\}$， $A_2 = \{a,b,c\}$， $A_2 \subset A_1$

2. 用集合的描述法表示下列集合.

(1) 大于 5 的所有实数集合；

解 $A = \{x \mid x > 5, x \in \mathbf{R}\}$

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合；

解 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<25, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合；

解 $A=\{(x,y)\mid y=x^2$ 且 $x-y=0, x, y\in\mathbf{R}\}$

3. 用列举法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合；

解 因为 $x^2-7x+12=0$， $(x-4)(x-3)=0$

所以解得

$$x=4,\qquad x=3$$

故所求集合

$$A=\{3,4\}$$

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合；

解 因为

$$\begin{cases}y=x^2\\x-y=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases},\qquad\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

所以所求集合

$$B=\{(0,0),(1,1)\}$$

(3) 集合 $\{x\ \big|\ |x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$；

解 因为

$$|x-1|\leqslant 5$$

即

$$-5\leqslant x-1\leqslant 5$$

所以

$$-4\leqslant x\leqslant 6$$

因此所求集合为

$C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. 下列哪此集合是空集?

$A = \{x \mid x + 1 = 0)$,

$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x$ 为实数$\}$,

$C = (x \mid x > 1$ 且 $x < 0\}$,

$D = \{x \mid x > 0$ 且 $x < 1\}$,

$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1$ 且 $x + y = 3, x, y$ 均为实数$\}$.

解 $A = \{x \mid x = -1\} \neq \varnothing$

$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x$ 为实数$\} = \varnothing$

$C = \{x \mid x > 1$ 且 $x < 0\} = \varnothing$

$D = \{x \mid x > 0$ 且 $x < 1\}$

$= \{x \mid 0 < x < 1\} \neq \varnothing$

对集合 E

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

得

$$x^2 + (3 - x)^2 = 1$$

即

$$x^2 - 3x + 4 = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$$

所以

$x^2 + 3x + 4 = 0$ 无实根

所以

$$E = \varnothing$$

5. 写出 $A = \{0,1,2\}$ 的一切子集.

解 A 的一切子集为 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$

6. 如果 $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2\}$, 下列各种写法, 哪些是对的?哪些不对?