新编数学习题集系列丛书

Mathematics

微分几何
习题集

杨文茂 傅朝金 程新跃 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

新编数学习题集系列丛书

Mathematics

微分几何习题集

杨文茂　傅朝金　程新跃　编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微分几何习题集/杨文茂,傅朝金,程新跃编著.— 武汉：武汉大学出版社,2005.1

新编数学习题集系列丛书

ISBN 7-307-04322-X

Ⅰ.微… Ⅱ.①杨… ②傅… ③程… Ⅲ.微分几何—习题 Ⅳ.O186.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080379 号

责任编辑：夏炽元　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：湖北省民政印刷厂

开本：787×980　1/16　印张：12.25　字数：217 千字

版次：2005 年 1 月第 1 版　　2005 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04322-X/O・304　　定价：18.00 元

前　　言

微分几何是数学的一个重要分支,它是以微积分为工具研究空间形式的几何学科.

经典的微分几何主要内容是曲线论与曲面论.本书为高等院校微分几何课程的教学参考书.书中系统地介绍了三维欧氏空间中曲线与曲面的基本理论与习题,其内容以局部几何性质为主,但也涉及一些整体几何性质.

全书共分四章.第一章作为预备知识,介绍了向量的代数运算与向量函数的微分和积分运算.第二章叙述曲线的基本理论,包括曲线的基本公式与曲线的存在惟一定理以及各种特殊的曲线.第三章叙述曲面的基本理论,包括曲面的第一、第二与第三基本齐式,与曲面有关的各种曲率及曲面上的各种特殊曲线,还有曲面的基本公式、基本方程以及曲面的存在惟一定理以及各种特殊的曲面.第四章简单介绍了曲线和曲面的一些整体的理论和习题.

在叙述几何理论的内容提要时,本书力求做到全面系统并高度概括,在许多地方通过列表格来展示各有关概念之间的内在联系.例如,关于曲线论的第二章的 2.3 节、2.6 节;关于曲面论的第三章的 3.4 节、3.6 节等处.对书中的习题都作出了答案、提示或解法,便于参考.希望本书无论对微分几何课的教者或学者都有所裨益.

编著杨文茂
于仰恩大学
2004 年 11 月

目　　录

第一章 预备知识

1.1 向量的代数运算

一、内容提要

1. 向量的线性运算与向量的乘法运算

设 $\boldsymbol{V}^3$ 或 $\boldsymbol{R}^3$ 是一个3维的欧氏向量空间.我们用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示空间的向量,而用 $\lambda,\mu,\upsilon,\cdots$ 表示实数或纯量.下面将列举关于向量的线性运算与乘法运算,以及这些运算所具有的规律.

(1) 线性运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,从 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算称为加法.数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,从 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 到 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的运算称为数乘.向量的加法与数乘合称为向量的线性运算,具有如下运算规律.

加法交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

加法结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

数乘结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\mu\boldsymbol{a}$;

数乘关于数的分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

数乘关于向量的分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(2) 乘法运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的乘法有两种,分别称为内乘或外乘,所得结果前者为一数量,后者为一向量,分别称为内积与外积.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积记为 $\boldsymbol{ab}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,定义为

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$,定义为

(ⅰ) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

(ⅱ) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$;

(ⅲ) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 依次构成右手系,当 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$,规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 或 $(\boldsymbol{abc})$,或 $\boldsymbol{abc}$,它定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

关于向量的乘法运算具有如下运算规律:

内积交换律 $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$;

数乘与内积的结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{ab})$;

内积分配律 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$;

数乘与外积的结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

外积分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

外积反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

混合积关于三个向量改变次序的规律如下:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \quad \text{或} \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}).$$

混合积分配律 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

混合积的绝对值 $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,而 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 的符号为正或负表示三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 依次构成右手系还是左手系.

2. 在正交坐标系中用坐标作向量的运算

设在欧氏空间 $\boldsymbol{V}^3$ 或 $\boldsymbol{R}^3$ 中选取正交标架 $\{0;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$,即基向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是正交单位且构成右手系的向量:

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1, \quad \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{ij}=0,$$

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1.$$

对于任意向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,称 x,y,z 为 $\boldsymbol{a}$ 在正交标架中(或正交坐标系中)的坐标,记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

设向量

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3).$$

利用坐标作向量的运算有如下公式:

公式 1.1 两向量的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

公式 1.2 数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

公式 1.3 两向量的内积 $\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

公式 1.4 两向量的外积

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

公式 1.5　三向量的混合积

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. 三个向量构成正交基的条件

引理 1.6(用内积表示)　设在向量空间 V^3 中三个非零向量 e_1,e_2,e_3,则

e_1,e_2,e_3 组成正交基$\longleftrightarrow e_ie_j=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3,$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j,\end{cases}$$

且 e_1,e_2,e_3 依次构成右手系或左手系$\longleftrightarrow(e_1,e_2,e_3)=1$ 或 -1.

引理 1.7(用外积表示)　设在向量空间 V^3 中三个非零向量 e_1,e_2,e_3,则

$$e_1,e_2,e_3\text{ 组成正交基}\longleftrightarrow\begin{cases}e_1\times e_2=\pm e_3,\\ e_2\times e_3=\pm e_1,\\ e_3\times e_1=\pm e_2,\end{cases}$$

且 e_1,e_2,e_3 依次构成右手系或左手系$\longleftrightarrow$等式右边都取“+”或“−”.

4. 关于向量的一些公式

公式 1.8(Cauchy-Schwarz 不等式)　关于两个向量的内积,有

$$|ab|\leqslant|a||b|,$$

当且仅当 a 与 b 平行时,等号成立.

关于两个向量的外积,也有

$$|a\times b|\leqslant|a||b|,$$

当且仅当 a 与 b 垂直时,等号成立.

公式 1.9(三个向量的二重外积公式)

$$a\times(b\times c)=(ac)b-(ab)c.$$

公式 1.10(Lagrange 公式)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad}\\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd}\end{vmatrix},$$

特别地,式中令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$,得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ab})^2.$$

公式 1.11 (四个向量的三重外积公式)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}.$$

公式 1.12 (四个向量的一个线性关系式)

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=0.$$

公式 1.13 (五个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_5)$$
$$+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{a}_5)=0.$$

公式 1.14 (行列式乘法公式,六个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\end{vmatrix}.$$

公式 1.15 (六个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)\\ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)\end{vmatrix}.$$

公式 1.16 (五个向量的一个数量式)

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2).$$

5. 利用向量的运算表示它们之间平行,垂直或共面的条件

引理 1.17 向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\leftrightarrow\boldsymbol{ab}=0$.

引理 1.18 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

引理 1.18′ 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\leftrightarrow\exists\lambda,\mu$,且$(\lambda,\mu)\neq0$,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0.$$

引理 1.19 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

引理 1.19′ 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\leftrightarrow\exists\lambda,\mu,\upsilon$,且$(\lambda,\mu,\upsilon)\neq0$,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\upsilon\boldsymbol{c}=0.$$

二、习题

1. 证明公式 1.8: $|\boldsymbol{ab}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

2. 证明三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|.$$

3. 证明二重外积公式 1.9 与 Lagrange 公式 1.10 之间的等价性.

4. 利用坐标法分别直接证明公式 1.9 与 1.10.

5. 证明公式 1.11:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}.$$

6. 证明公式 1.12:

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=0.$$

7. 证明公式 1.13:

$(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_5)+(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)(\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_5)-(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{a}_5)=0.$

8. 证明公式 1.14:

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\end{vmatrix}.$$

9. 证明公式 1.15:

$$(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{c}_2)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2) & (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)\\ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2)\end{vmatrix}.$$

10. 证明公式 1.16:

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2).$

11. 证明公式

$(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2.$

12. 证明公式

$$(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{a})=0.$$

13. 已知三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$,证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)}$$

满足公式

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij},i,j=1,2,3.$$

三、习题解法、提示与答案(向量的代数运算)

1. $|\boldsymbol{ab}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$

2. $$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2&=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{ab}+|\boldsymbol{b}|^2\\&\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2\\&=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2.\end{aligned}$$

3. 公式 1.10→公式 1.9:设 $\boldsymbol{r}$ 为任意向量,则根据三个向量混合积的性质与公式 1.10,我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\boldsymbol{r}&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\\&=-(\boldsymbol{ba})(\boldsymbol{cr})+(\boldsymbol{ca})(\boldsymbol{br})\\&=[(\boldsymbol{ca})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{bc})\boldsymbol{c}]\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{r}$ 为任意向量，故上式中左、右两个方括号中向量相等，即公式1.9 成立.

公式 1.9→公式 1.10:利用公式 1.9 以及三个向量混合积的性质,我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\\&=\boldsymbol{a}[(\boldsymbol{bd})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{bc})\boldsymbol{d}]\\&=(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})-(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}),\end{aligned}$$

即为公式 1.10.

5. 利用公式 1.9.

6. 将$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$先写成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合,再写成 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的线性组合.

7. 用公式 1.12,在其中,令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}_4$.

8. Ⅰ法　用坐标法证明,此式是行列式乘法公式.

Ⅱ法

$$右=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\end{vmatrix}+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1\end{vmatrix}+$$

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2\end{vmatrix}\quad（按第一行展开）$$

$$\begin{aligned}&=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1)[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)]+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2)[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)]\\&\quad+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3)[(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)]\quad（公式 1.10）\\&=(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)[(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)]+(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3)(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)]\\&=(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)[(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{a}_1]\quad（利用下面习题 11）\\&=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)=左.\end{aligned}$$

9. 利用公式 1.10,在其中,令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}_2$.

10. 利用公式 1.14.

11. 当$(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\neq0,\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2$ 不共面,将 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$a = \lambda b_2 \times b_3 + \mu b_3 \times b_1 + \upsilon b_1 \times b_2,$$

再确定系数 λ, μ, υ，当$(b_1 b_2 b_3) = 0$ 显然成立.

1.2 向量函数的微分与积分运算

一、内容提要

1. 向量函数的求导及运算规律

设以纯量 $t \in I = [t_0, t_1]$为自变量的向量函数 $\boldsymbol{r}(t) \in \mathbf{V}^3$，于是

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I.$$

向量 $\boldsymbol{r}(t)$对 t 的导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right), t \in I.$$

关于向量函数求导法则满足如下运算规律:

设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 都是t 的向量函数，而 λ 为 t 的纯量函数，

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\right) + \left(\boldsymbol{u}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{w}\right) + \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\right).$$

对于以多个纯量为自变量的多元向量函数，例如 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$，$u \in [a, b]$，$v \in [c, d]$，向量函数 $\boldsymbol{r}(u, v)$关于 u 或v 求偏导的法则也具有如上运算规律.

引理 2.1 $\boldsymbol{r} = \mathrm{const}^{*} \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 0$

2. 向量函数的积分及运算规律

(1)不定积分

---

* 关于此类等式，如果左边为向量(或纯量)，则 const 表示常向量(或常数).

在 I 上的两个向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 与 $\boldsymbol{U}(t)$，如果 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}$，称 $\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的一个原函数，且称

$$\int \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{c}$$

为 $\boldsymbol{u}(t)$ 的不定积分，其中 $\boldsymbol{c}$ = const.

求一个函数的不定积分的方法称为积分法或求积. 关于求积有如下运算规律

$$\int [\boldsymbol{u}(t) \pm \boldsymbol{v}(t)]\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \pm \int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int c\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = c\int \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t, c = \text{const},$$

$$\int \boldsymbol{c}\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{c}\int \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t, \boldsymbol{c} = \text{const},$$

$$\int \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{c} \times \int \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t, \boldsymbol{c} = \text{const}.$$

(2) 定积分

如果对于区间 $I=[a,b]$ 上的向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 的积分和在 I 上分法无穷细密过程中有极限，则称这极限为函数 $\boldsymbol{u}$ 在 I 上的定积分，记为

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}(\xi_i)\Delta t_i.$$

其中 T 表示分法

$$T: t_0 = a < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b,$$
$$t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i, \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$
$$\lambda(T) = \max \Delta t_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

关于一个向量函数的定积分及其原函数之间有如下引理.

引理 2.2 设 $\boldsymbol{U}(t)$ 为 $\boldsymbol{u}(t)$ 的一个原函数，则 $\boldsymbol{u}(t)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{U}(b) - \boldsymbol{U}(a).$$

(3) 向量函数的 Taylor 公式

对于纯量函数，在微分学中我们知道，不但有Taylor公式而且还有各种形式的中值定理. 但是对于向量函数，中值定理一般不成立（见本节习题 2），但仍有如下 Taylor 公式.

公式 2.3 （Taylor公式） 设向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 在区间 I 上存在直到 n 阶的连续导数，当 $t_0 \in I, t_0+\Delta t \in I$，则有

$$\boldsymbol{u}(t_0+\Delta t) = \boldsymbol{u}(t_0) + \boldsymbol{u}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots$$

式中 $u^{(i)}=\dfrac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}t^i}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为满足 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$ 的向量.

如果在正交坐标系中向量函数用坐标表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

上述公式也可写为

$$\boldsymbol{u}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{u}(t_0)+\boldsymbol{u}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\Delta t)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)}\boldsymbol{u}^{n-1}(t_0)(\Delta t)^{n-1}+\frac{1}{n!}\boldsymbol{R}_n(\Delta t)^n,$$

其中

$$\boldsymbol{R}_n=\left(x^{(n)}(t_1),y^{(n)}(t_2),z^{(n)}(t_3)\right),$$
$$t_0\leqslant t_1,t_2,t_3\leqslant t_0+\Delta t.$$

虽然有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0),$$

但一般说来 t_1,t_2,t_3 各不相同，没有一个同时适合三个函数 x,y,z 的中间值.

(4) 几种特殊向量函数满足的微分方程

引理 2.4(定长向量函数) 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间 I 上的可微函数，则

$$|\boldsymbol{u}|=\mathrm{const}\leftrightarrow \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'=0,\forall t\in I.$$

引理 2.5(定方向向量函数) 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间上 I 的可微函数，则

$$\boldsymbol{u}\parallel \boldsymbol{c}(\text{固定的非零向量})\leftrightarrow \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}'=0,\forall t\in I.$$

引理 2.6(平行于定平面的向量函数) 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 是区间 I 上二阶可微的向量函数，则

$$\boldsymbol{u}\parallel \pi(\text{固定的平面})\leftrightarrow(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'')=0,\forall t\in I$$

或 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{c}$(固定的非零向量)$\leftrightarrow(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'')=0,\forall t\in I$.

二、习题

1. 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，且 $\boldsymbol{r}(t_0)\neq 0$，证明存在一个包含 t_0 的闭区间，使得在此闭区间上都有 $\boldsymbol{r}(t)\neq 0$.

2. 试举例说明对于一个在闭区间 $I=[a,b]$ 上可微的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 一般不成立中值定理

$$\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)(b-a),a<\xi<b.$$

3. 证明对于向量函数的定积分满足不等式

$$\left|\int_a^b\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b\left|\boldsymbol{r}(t)\right|\mathrm{d}t.$$

4. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是可微的向量函数，求下列各纯量函数的导数

(1) $\boldsymbol{r}^2$;　　(2) $|\boldsymbol{r}|$;

(3) $\boldsymbol{r}'^2$;　　(4) $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')$;　　(5) $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')$.

5. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是可微的向量函数，求下列各向量函数的导数

(1) $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$;　　(2) $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$;

(3) $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{r}''$;　(4) $(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'''$.

6. 求向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 为常向量的条件.

7. 求向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 为定长向量的条件.

8. 求下列向量微分方程的解

(1) $\boldsymbol{r}'=0$;　　(2) $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{a}(=\text{const})$;

(3) $\boldsymbol{r}'=t\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}=\text{const}$;　　(4) $\boldsymbol{r}'=\lambda\boldsymbol{r},\lambda=\text{const}$.

9. 求向量微分方程的解

$$\boldsymbol{r}''+p\boldsymbol{r}=0,p=\text{const},$$

分别就 $p>0$、$p=0$ 或 $p<0$ 进行讨论.

10. 不用作出解，直接证明向量微分方程组

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2'=-\boldsymbol{e}_1$$

在初始条件

$$\boldsymbol{e}_1|_0=\boldsymbol{i},\boldsymbol{e}_2|_0=\boldsymbol{j}$$

下的解为正交单位向量组，其中 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=1,\boldsymbol{ij}=0$. 另外验证下列圆向量函数

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}\cos t+\boldsymbol{j}\sin t,$$

$$\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{i}\sin t+\boldsymbol{j}\cos t$$

正是方程在所设初始条件下的解.

11. 证明方程组

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}_2'=-\boldsymbol{e}_1$$

在初始条件

$$\boldsymbol{e}_1|_0=\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2|_0=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$$

下的解为下列椭圆向量函数

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t,$$

$$\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{a}\sin t+\boldsymbol{b}\cos t.$$

12. 证明椭圆向量函数 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 满足

$$\boldsymbol{e}_1(t+\alpha)=\boldsymbol{e}_1(t)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2(t)\sin\alpha,$$

$$\boldsymbol{e}_2(t+\alpha)=-\boldsymbol{e}_1(t)\sin\alpha+\boldsymbol{e}_2(t)\cos\alpha.$$

13. 证明椭圆向量函数 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 满足

(1) $2\boldsymbol{e}_1(t)\cos\alpha = \boldsymbol{e}_1(t+\alpha) + \boldsymbol{e}_1(t-\alpha)$,

$2\boldsymbol{e}_2(t)\sin\alpha = \boldsymbol{e}_1(t+\alpha) - \boldsymbol{e}_1(t-\alpha)$.

(2) $\int \boldsymbol{e}_1(t)\cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2(2t) + \boldsymbol{c}$.

14. 求积分

$$\int \mathrm{e}^{at}\boldsymbol{e}_1(bt)\mathrm{d}t,$$

式中 $\boldsymbol{e}_1(t) = (\cos t, \sin t)$.

15. 证明三个向量函数 $\boldsymbol{e}_i(t), i = 1,2,3$,构成正交基的充要条件是它们的导向量满足微分方程及初始条件

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(t)\boldsymbol{e}_j, \quad i,j = 1,2,3 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \mid_0 = \delta_{ij} \tag{2}$$

其中系数 $a_{ij}(t)$ 满足方程

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \quad i,j = 1,2,3 \tag{3}$$

16. 证明曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos t + \boldsymbol{b}\sin t + \boldsymbol{c}$ 是一个椭圆.

17. 证明曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\operatorname{ch}t + \boldsymbol{b}\operatorname{sh}t + \boldsymbol{c}$ 是一个双曲线.

18. 证明曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}t^2 + \boldsymbol{b}t + \boldsymbol{c}$ 是一条抛物线.

19. 利用关于向量函数的求导,证明椭圆的光学性质:椭圆上任意点的切线平分这切点的两条焦半径夹角的相邻补角.

20. 类似上题证明双曲线的光学性质:双曲线上任意点的切线平分这切点的两条焦半径的夹角.

21. 类似上题证明抛物线的光学性质:抛物线上任意点的切线平分这切点的焦半径与通过切点平行于抛物线轴的直线所成的夹角.

三、习题解法、提示与答案(向量的微分运算)

1. 对 $f(t) = |\boldsymbol{r}(t)|$ 利用连续函数的相应性质.

2. 例如在平面上的向量函数 $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t)$,取 $I = [-a, a], 0 < a < \frac{\pi}{2}$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(a) - \boldsymbol{r}(-a) &= (\cos a, \sin a) - (\cos(-a), \sin(-a)) \\ &= (0, 2\sin a), \\ \boldsymbol{r}'(\xi) &= (-\sin\xi, \cos\xi).\end{aligned}$$

公式 $\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}'(\xi)(b-a)$ 为

$$(0, 2\sin a) = (-\sin\xi, \cos\xi)2a,$$