



新坐标金融系列精品课程

# 金融数学引论与基础

张永林  
著



清华大学出版社

The Mathematics of Finance



新坐标 金融系列精品课程

# 金融数学引论与基础

张永林 著

The Mathematics of Finance

清华大学出版社  
北京

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用清华大学核研院专有核径迹膜防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

### 图书在版编目(CIP)数据

金融数学引论与基础/张永林著. —北京:清华大学出版社,2005.2

(新坐标金融系列精品课程)

ISBN 7-302-10003-9

I. 金… II. 张… III. 金融—经济数学—教材 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 124310 号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地址:北京清华大学学研大厦

邮编:100084

客户服务:010-62776969

责任编辑:刘志彬

版式设计:肖米

印刷者:北京市清华园胶印厂

装订者:三河市金元装订厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开本:148×210 印张:6.875 字数:180千字

版次:2005年2月第1版 2005年2月第1次印刷

书号:ISBN 7-302-10003-9/F·1014

印数:1~4000

定价:15.00元

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103或(010)62795704



## PREFACE

1. 本书是学习金融数学的基础书籍,也是学习高级经济学的基础参考书。在本书基础上,可以继续学习更高深的数理金融学与计量金融学。金融数学既是经济学专业与管理学专业讲授的课程,也是数学科学专业学生喜欢的课程。目前,国外在金融数学方面的教学与研究发展得非常快,国内还需要一定的过渡阶段。

全书内容共6章。第1、2章内容是金融数学研究中所需要的经济原理、货币资产理论和金融原理的综合性基础。第3、4、5章是本书的核心部分。第6章是时间序列与金融计量学的基础介绍。本书内容涵盖了金融数学基本的和主要的理论与模型。

本书特点有:内容比较系统全面,具有自封闭性;基础性强,涵盖面宽;适合于本科高年级学生和研究生使用,更适合于自学;为学习经济学、金融学和相关专业的研究人员提供简明够用的基础性参考书。

本书强调对经济与金融原理和理论要有深刻的理解,在此基础上注意数理和计量分析方法的掌握与运用;强调模型与公式的原理背景和来龙去脉;推导过程尽可能简单易懂,密切结合实际应用。

因为本书是“引论与基础”,所以在每章开始都有“引

AC 105/05

言”部分。在引言中,既有对全章内容比较详细的导论性综述,又有对原理和思想的讨论与综合,其目的是一方面给读者提供关于本章内容的概览,另一方面为读者探讨该章理论与模型的深刻内涵做一个提要。为了给读者提供有针对性的参考资料,本书把参考文献放在了每章的结尾。每章后面的思考问题都是经典问题。

学习本书需要具有微积分、线性代数和不基于测度论的概率论与随机过程方面的知识。

2. 金融数学现在已经发展为一门独立的专业,它包括数理金融分析、金融计量学和金融风险与收益分析。金融数学是运用数学工具和模型分析方法研究人们的消费与投资决策;各种金融资产的价值评估与选择;风险处理与收益优化;资产组合与市场效率等问题。把有关金融产品的行为分析和活动结果进行严谨的数学处理,使之严格和科学。应该强调指出,人类经济社会的活动行为,在因果之间、变量与因变量之间其量化关系是很难研究的。我们都知道,支出非常容易计算,但效用的度量却非常困难;成本非常容易统计,但产出的社会价值却难以测度。因变量与自变量之间的关系的不确定性和复杂性给经济学与金融学的量化研究提出了诸多的难题和挑战,金融数学为此提供了必要的分析方法和研究工具。

自理查德·H. 戴 1982 年在《美国经济评论》上发表 Irregular Growth Cycles (The American Economic Review, 72, 4. 6 ~ 414, 1982) 一文后,非线性分析在一般经济研究中一直没有得到很好发展。但是,近十多年来,非线性分析在金融研究中却应运而生。这是由于金融问题研究的需要。至于经济学研究如何应用数学,也取决于需求。过去人们一直认为,量化分析不能用来解决定性问题的研究,可是,“线性定价分析”却被用来研究金融市场的效率性问题,并且可以用数据进行检验。“博弈论”今天被广泛应用到军事、外交和贸易谈判等社会问题的研究中。

当然,经济研究中的数理和计量分析必须有实际意义。近来,金融数学发展特别快速。其中出现了大量的数学和物理方法。有些工



作把金融中的不确定性和风险等完全处理为自然界的运动。这就忽视了对金融原理的理解。在金融市场上,人们不是束手无策。投资不是随意掷硬币。风险和效率与市场结构密切相关。很多金融风险可以通过资产的选择与组合去分散和降低。当风险不能被分散和转移时,需要用“风险报酬”去激励投资。资产定价就是对那些不能分散和转移风险的投资品进行价值评估。

3. 金融数学(包括数理金融分析和金融计量学)被很多读者认为是比较难学。这其中有数学基础的原因。更主要的原因在于对其经济理论的理解和金融原理与数学思维的结合上。

我们知道,金融研究必然涉及不确定性和时间这两个基本因素。金融数学在处理这两个外生因素时沿用了一般的经济分析,把不确定性在原理上抽象为潜在的“自然状态”,然后,引入数学中的“随机变量”来表述这些潜在的“自然状态”。这样,概率论和随机过程就非常自然地应用到金融研究中(见第1章)。金融决策的成本和效益是随时间分布的;金融系统在不同时间和空间中提供资源转移的服务;金融市场有“单期”和“多期”之分。金融学研究这些问题时,对“连续”的时间,一般采用数学中的动态优化方法。对“离散”的时间,一般采用“时间序列分析”(见第2章和第6章)。

金融研究必然涉及资产价值评估和价格分析。资产定价也许是金融数学最精彩的部分。也是金融研究的核心工作。资产定价模型依据的是“总消费—资产组合”原理。即把消费选择与资产选择和就业等都统归为“总消费”,在总消费中通过每项资产的收益与总消费的效用之间的比较(方差和协方差)来研究资产的价格和投资的收益。金融数学则把这个基本原理抽象为“资产预期收益率与消费预期边际效用”之间的一般均衡分析(见第4章)。在这个一般均衡下的资产组合中,不仅有同一时期的(也就是静态的)消费选择与投资选择之间的均衡关系,也有不同时期之间的均衡关系(跨时期均衡和时代交叠均衡),还有不同资产之间的均衡。这样,就很自然地用利率、收益和效用之间的关系(公式)来描述资产价值。利率、价格和资

产供求都有升有降,对此,应该很自然地联想到随机过程分析是研究金融问题的有力工具。如果分别用  $P_t$  和  $P_{t-1}$  表示股票在两个时期的市场价格,把利率和其他对股价变化有影响的经济因素用误差  $\epsilon_t$  来表示,那么,就可以用非常简单的关系:  $P_t = P_{t-1} + \epsilon_t$  来表示金融市场价格的升降变化。“随机游走模型”和“股票价格漂移模型”都建立在这个最简单的形式之上(见第2章和第5章)。

金融研究必然涉及投资的收益、风险和市场效率等方面的分析。这是金融学的基本内容之一。金融学是怎样来研究(不能分散与转移)风险资产的价值评估和不同资产之间的风险衡量的呢?又是怎样通过资产的收益和风险来研究市场的效率的呢?显然,从一般常理上来讲,组合中各种资产的平均收益越高越好;单个资产的收益与组合的平均收益之间的差越小越好。非常明显,前者反映了资产组合的收益,也表述和决定了资产价值,而后者则反映了资产的风险和市场效率。平均收益和利率是决定资产价格和评估资产价值的基础,单个资产的收益与组合的平均收益之间的差是衡量投资风险与市场效率的基础。如果资产组合的平均收益已经确定,那么,投资者都希望单个资产的收益与组合的平均收益之间的差最小;如果单个资产的收益与资产组合的平均收益之间的差是确定的,那么,人们都希望资产组合的平均收益实现最大化。这就是金融研究中的“均值一方差定价原理”(见第4章和第5章)。

怎样根据这个原理来研究股票、期权和债券的价值呢?人们就想到把资产组合的平均收益表述为概率中的“期望均值”,把单个资产的收益与组合的平均收益之间的差表述为概率中的方差,这样,就可以把新古典的预期效用  $\max_w E[u(c, w)]$  转化为  $\max_w E[u(\mu_w, \sigma_w^2)]$ 。其中的  $c$  表示消费,  $w$  表示资产选择;  $\mu_w$  表示资产收益的期望均值,  $\sigma_w^2$  表示资产收益的方差。应该看到,这样的转化是多么巧妙而又有价值!

哈里·马科威茨(1952,1959)、J.托宾(1958)和莫迪利亚尼一米



勒(1973)用“均方差效率”原理来研究金融市场的效率性问题。罗伯特·C.莫顿用均值、方差和协方差等数据去检验市场效率性。就是当均值给定时方差越小越好,或者方差限定时均值越大越好。并且证明,在有效率的市场上,莫迪利亚尼—米勒定理、市场有效性假说与无套利原则是一致的。数学和计量模型应用到如此地步,人们能不为之震撼?

金融数学和金融工程现在在国内发展也很快,本书为此提供一个基础。错误一定不少,请多指正。

## 致谢:

作者在此由衷敬谢导师——南开大学经济学院薛敬孝教授和清华大学经济管理学院李子奈教授。感谢他们至今给予的多年的悉心指教和关怀。

作者多次得到中国社会科学院数量经济技术经济研究所周方教授,北京大学光华管理学院秦宛顺教授、靳云汇教授的指导和帮助,在此敬谢。

本书在写作和出版过程中,得到北京师范大学经济工商管理学院李翀教授与贺力平教授的大力帮助,在此致谢。

张永林

2004年9月于北京





# CONTENTS

序言 .....	I
<b>第 1 章 不确定经济与一般均衡 .....</b>	<b>1</b>
1.1 引言 .....	1
1.2 不确定性与状态相依商品的市场 .....	4
1.3 不确定环境中的阿罗—德布罗均衡 .....	9
1.4 资产市场与阿罗—德布罗均衡 .....	13
1.5 不完全市场 .....	18
思考题 .....	20
参考文献 .....	22
<b>第 2 章 时间与资源配置 .....</b>	<b>23</b>
2.1 引言 .....	23
2.2 跨时期消费与个人投资 .....	26
2.3 跨时期生产与企业融资 .....	33
2.4 世代交叠模型 .....	41
2.5 代际交换中的货币与资产 .....	49
2.6 随机游走模型 .....	54
思考题 .....	61
参考文献 .....	64



<b>第 3 章 现代货币金融理论与效用模型</b>	65
3.1 引言	65
3.2 含有货币的效用函数模型	68
3.3 现钞在先模型	74
3.4 货币搜索模型	79
思考题	87
参考文献	88
<b>第 4 章 金融市场与资产组合</b>	91
4.1 引言	91
4.2 金融市场与金融资产	93
4.3 金融市场结构与资源配置效率	101
4.4 单时期资产选择与组合	105
4.5 多时期资产选择与二叉树模型	112
4.6 资产组合理论与资产定价原理	116
思考题	120
参考文献	121
<b>第 5 章 资产定价理论与模型</b>	125
5.1 引言	125
5.2 金融资产定价原理	129
5.3 资本资产定价模型(CAPM)	135
5.4 期权定价与 Black-Scholes 公式	144
5.5 二叉树模型与期权定价	153
5.6 套利定价模型与完全市场	161
5.7 债券收益分析与债券定价模型	168
思考题	174
参考文献	175



<b>第 6 章 时间序列与金融计量分析</b> .....	179
6.1 引言 .....	179
6.2 关于时间序列分析的一个简单综述 .....	181
6.3 差分方程与确定性时间序列 .....	187
6.4 随机时间序列分析 .....	195
6.5 时间序列分析与现代金融研究 .....	199
思考题 .....	206
参考文献 .....	206

# 第 1 章

## CHAPTER 1

# 不确定经济与一般均衡

## 1.1 引言

金融学研究人们在不确定环境中如何进行资源的时间配置。有说法称金融学是不确定市场中的新古典经济学版本(《新帕尔格雷夫经济学大辞典》第2卷“Finance”词条)。本章内容主要把一般均衡分析引入不确定条件下的交换经济和资产市场,以便在消费和生产的均衡模型中把金融经济和一般商品经济结合起来,通过均衡分析来揭示金融原理。一般均衡分析不仅是主流经济学的基本研究框架,也是金融学和金融数学的研究基础。

如果从金融学来理解一般均衡分析模型,那么,均衡的价格体系就是无套利的经济系统(莫迪利亚尼—米勒定理,市场有效性假说,都是这个命题的翻版。)。这意味着,通过市场交易,人们可以自己保险其中某些事件的发生。如果这些事件包括影响消费和生产收益的不确定性,那么人们也可以用适当的选择来进行调整。所有的证券都可

以用实物来标价。

众所周知,一种给定的资产,其价格由两种关系决定:一种是与不确定性的关系,也就是人们所说的风险;另一种是与其他资产的价值关系,也就是人们所说的收益。所以,多种资产的选择和定价必然涉及不确定经济环境中的一般均衡分析。另外,资产的选择和个人的金融行为也是一种资源重新配置的活动,金融资产和其他资产(实物)统一组合,金融市场与产品市场和劳动市场这三个市场统一。因此,学习金融数学需要掌握一般均衡分析。该章内容为金融数学研究和模型分析提供必要的微观基础。

在 1.2 节中,主要是引入了“状态相依商品”和“状态相依的效用”概念。把经济环境的不确定性用技术、禀赋和偏好等潜在的“状态”来描述。通过把技术、禀赋和偏好等经济因素和它们之间的相互依赖关系抽象为“自然状态”,然后用“状态”的概念表述经济环境的不确定性。如果说状态的具体内涵究竟包括哪些实际意义,那么从经济学来讲,物质世界由三组变量来描述:(1)由经济行为者控制(选择)的决策变量;(2)任何经济个体不能控制的环境变量;(3)由决策变量和环境变量共同控制的所有其他变量。在现实中,对社会与经济环境对经济行为者来说主要是不确定的,不确定环境中的潜在因素和环境会给经济活动带来风险。所以,很多选择和决策都涉及风险因素。在解决了不确定性的表述之后,用“状态相依商品”和“状态相依的效用”研究不确定市场中人们的选择和物品的价值。状态相依的效用函数是研究不确定环境中选择的非常有用的基本工具。在技术上,该节则是把风险和状态这些外生因素抽象为“随机变量”,以便为后面构建模型服务。

在 1.3 节中,给出了状态相依的阿罗—德布罗均衡定义。理解不确定经济中的阿罗—德布罗均衡,关键是要把握其思想:第一,在不确定环境中,商品(广义资产)的获得及其价值(效用)既依赖于潜在的和随机的外生状态(当然商品向量之间又存在价值的相依性),所以,选择和判断商品的价值,首先要弄清它们与状态之间的关系。

这些关系随着状态的不同变化而变化。这些关系通过某些内在的均衡关系决定和影响不同物品的价值。第二,在状态相依的阿罗—德布罗均衡中,在理性预期或自我实施的假设下,可以通过不确定性因素消除后的现期交易来实现有效的交易均衡。就是说,人们在做选择时,首先要考虑风险的概率分布或收益的可获得性,然后才依据资源之间的相对稀缺性做出选择决策。

在传统的分析中,从偏好公理到一般均衡,交易中的偏好和选择,商品和禀赋的价值等都是与自然状态无关的,在完全竞争的环境中,人们无须先考虑物品的可获得性。

1.4节讨论资产市场与拉德勒均衡,专门分析资产市场的交易均衡,用拉德勒均衡代替阿罗—德布罗均衡。主要是用拓展的一般均衡分析来研究资产价格决定的基础。

首先讨论资产的概念。在严格意义上,某种资产被视为在一定时期内获得一定数量物品或货币的权利。其中,获得的物品或货币在数量和价值上都依赖于所发生的状态。这也是状态相依商品概念在研究资产问题中的根本运用。然后引入拉德勒均衡的概念。拉德勒均衡的深刻含义(思想)在于:消费选择与资产选择有关;市场结构(不确定环境中“状态”)与资产组合的效率有关。拉德勒均衡强调,个人对资产的选择首先与消费和市场结构有关。这不仅是由于在消费与投资之间有内在的选择关系,也是由于资产与商品之间有内在的价值关系。拉德勒均衡也给我们提出了非常困难的研究工作。这就是,如果在各状态之间转移资产的可能性受到限制,那么,就不能通过更适当的资产组合把风险进行更有利的分散,于是,福利就要受到损失。此时的拉德勒均衡不一定是帕累托最优的。如果资产结构是完全的,或者市场结构是完全的,拉德勒均衡与阿罗—德布罗均衡统一。所以,拉德勒均衡揭示了一个非常重要的金融原理:在一般情况下,通过资产组合分散风险是否能提高福利(收益),要看组合是否受到限制,即市场与资产的结构是否具有完全性。

在1.5节中,简单地介绍了不完全市场的概念。其目的在于指

出：在系统研究资产决定的各种理论和模型分析之前，合理地表述现实的不完全市场中资源的配置结果是非常必要的；在 1.4 节中指出拉德勒均衡不一定是帕累托最优的，因此，分析市场环境 with 资产组合的效率问题非常有实际意义；1.4 节有结论证明，当市场或资产结构是完全时，拉德勒均衡与阿罗—德布罗均衡有等价性，那么，当市场或资产结构不完全时，拉德勒均衡是不是某种状态下的帕累托最优呢？回答这个问题在理论上与实际上都是非常必要的。

## 1.2 不确定性与状态相依商品的市场

在现实中，社会与经济环境都是不确定和相对未知的，所以，很多经济选择和决策都涉及风险因素<sup>①</sup>。本节主要讨论的是风险选择的结果可以进行货币度量的不确定性。其中，风险并不都是坏事，风险也可以使人们获得收益，即风险报酬。这种研究是许多金融和资产组合理论的基础。这种研究的思想是，决策者不仅关心选择的货币性收益，也关心影响这些收益的潜在事件，或者说自然状态；这些自然状态在决策者的选择中是随机的外生变量，决策者的选择方案依赖于这些外生的自然状态；因此，决策者在选择之前和选择之中都必须分析这些自然状态的概率分布，然后才能做出选择方案的比较。

注意，本节对不确定环境中市场中基本元素和变量的表述方法在第 4 章中尤为重要。

### 1.2.1 不确定性的自然状态描述

我们都知道，保险单支付可能依赖于某一事件的发生，公司股票货币支付依赖于经济是处于萧条还是处于繁荣之中，因此，选择中的随机结果是由于某些潜在的因素和环境引起的。经济研究把这

---

<sup>①</sup> 要注意，严格意义上不确定性与风险不是一回事。风险是对不确定性的某种概率测度，是对不确定性的比较。风险可能是由于未知确定因素所导致。

些潜在的因素或情况称为“状态”，或自然状态。把状态集合记为  $S$ ，<sup>①</sup>并将某一特定的状态记为  $s \in S$ 。为简化起见，假定状态集合是有限的，其中的每一状态  $s$  都有一个明确的客观发生概率  $\pi_s > 0$ 。（以后一定要注意  $s$  和  $S$  在行文和公式中的大写和小写之分）

这样，具有非负货币收益的风险就可以被描述为将潜在自然状态的实现值映射到可能的货币支付集合  $\mathbb{R}^+$  上的一个函数。 $\mathbb{R}^+$  是正实数集合。把这个函数称为随机变量。

**定义 1.2.1** 随机变量是一个将状态映射到货币性结果的函数  $g: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ 。即对于任意的  $s \in S$ ，有  $g(s) \in \mathbb{R}^+$ 。

这就把不确定性表述为一种状态，把风险表述为随机变量。

## 1.2.2 状态相依商品和状态相依商品空间

现在，关注一个有  $L$  种商品、 $I$  个消费者和  $J$  个生产者的经济环境。该经济环境是不确定的。其经济环境的不确定性用技术、禀赋和偏好的状态来描述。换句话说，通过把技术、禀赋和偏好等经济因素和相互依赖关系抽象为自然状态，然后用状态的概念来表述经济环境的不确定性。

**定义 1.2.2** 对于每一物品  $l=1, 2, \dots, L$  和状态  $s=1, 2, \dots, S$ ，一单位的状态相依商品是，当且仅当状态  $s$  发生时才获得一单位物品  $l$  的权利 (entitlements)。相应地，一个状态相依商品向量是

$$x = (x_{11}, \dots, x_{L1}, \dots, x_{1S}, \dots, x_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS}$$

其经济含义是，当  $s$  发生时获得商品向量  $(x_{1s}, \dots, x_{Ls})$  的权利。其中  $\mathbb{R}^{LS}$  为  $LS$  维向量空间。

注意，上面向量的角标中  $S$  为大写，而下面向量的角标中  $s$  为小写。以后经常有此种情况。它们的经济含义是不相同的。前者是  $S$

<sup>①</sup> 注意，所谓的状态集合就是概率论中的样本空间  $\Omega, \Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^S$ ，而其中的“状态”就是样本空间中的“事件”。在这里，为了在行文中标记简便和使模型中的公式书写简化起见，把  $\Omega$  记为  $S, \omega_i$  记为  $s$ 。在第 4 章我们还要用  $\Omega, \Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^S$  表示状态集合。



组状态相依的商品向量,而后者是当  $s$  发生时获得了其中的第  $s$  组商品向量。

也可以把一个状态相依商品向量理解为  $S$  组随机变量,其中当状态  $s$  发生时的随机变量就为  $(x_{1s}, \dots, x_{Ls})$ 。其中的相依性和随机性都是因为物品的可获得性和各物品间的价值相关性不确定,都依赖于所发生的状态  $s$ 。具体地说,这里的相依性和随机性依赖于技术、禀赋和偏好的不确定性。

现在,可以用状态相依商品向量来表述经济行为人的活动与自然状态的关系。例如,对伞的需求依赖于天气的情况。消费者的个人禀赋也可以用状态相依商品向量来表示。消费者  $i \in I$  的禀赋为

$$w^i = (w_{i1}^1, \dots, w_{i1}^L, \dots, w_{iS}^1, \dots, w_{iS}^L) \in \mathbb{R}^{LS}$$

其经济含义是,如果状态  $s$  发生,那么消费者  $i$  拥有的禀赋向量  $(w_{iS}^1, \dots, w_{iS}^L) \in \mathbb{R}^L$ 。在广义上,禀赋与商品或资产都有某些等价关系。

### 1.2.3 状态相依的效用

消费者的偏好也依赖于自然状态。例如,消费者对吸烟的偏好依赖其身体的健康状况。如果记“ $<_i$ ”为  $i \in I$  定义在消费集  $X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$  上的偏好关系,那么有

**定义 1.2.3** 如果对于每个  $s \in S$ ,存在着函数  $u_{is}: x_i \subset \mathbb{R}^{LS} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,使得对于任意的  $x_i \in X_i$  和  $x'_i \in X_i$ ,当且仅当

$$\sum_s \pi_{is} u_{is}(x_{1s}^i, \dots, x_{Ls}^i) \leq \sum_s \pi_{is} u_{is}(x'_{1s}^i, \dots, x'_{Ls}^i)$$

时,有  $x_i <_i x'_i$ 。其中  $x_i = (x_{1s}^i, \dots, x_{Ls}^i)$ 。

定义 1.2.3 是说,首先分配给状态  $s \in S$  一个概率  $\pi_{is}$ ,然后在状态  $s$  存在着一个状态相依的效用函数  $u_{is}$ ,  $u_{is}$  对于物品向量赋予了实值,用这个实值来比较偏好关系“ $<_i$ ”。在定义 1.2.3 中,之所以首先分配给状态  $s \in S$  一个概率  $\pi_{is}$ ,是因为现在研究的是不确定性环境中的选择,偏好与状态有关,但是状态  $s \in S$  在选择中是外生变量,不能纳入选择的方案中,所以,必须先明确状态发生的概率,然后才