高等学校统编教材

自动控制原理

下　册

（第2版）

李友善　主编

国防工业出版社

自动控制原理

下　册

（第 2 版）

李友善　主编

国防工业出版社

北　京

内容简介

《自动控制原理》修订版分上、下两册出版，其中上册集中阐述古典控制理论，下册较完整地介绍与讨论现代控制理论的基本内容，基本理论与基本概念。修订版下册共五章，其中较全面介绍有关线性系统理论的内容，主要阐述最优控制的基本理论以及简要介绍动态系统辨识与状态估计的基本理论与方法。每章后附有一定数量的习题。

本书可作为高等院校自动控制、船电工业自动化、计算机应用、热工仪表、液压控制等专业《自动控制原理》课的教材，也可供有关的科技人员参考。

自动控制原理
下　册
（第2版）
李友善　主编
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码　100044）
涿中印刷厂印刷
新华书店经售

开本 787×1092　1/16　印张 20　465 千字
1990年4月第2版　2002年8月第8次印刷　印数:61901－63900册

ISBN 7-118-00620-3/TP·81　定价:20.00元
（本书如有印装错误，我社负责调换）

出版说明

根据国务院国发〔1978〕23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前　言

本书是在李友善主编的《自动控制原理》下册1981年第一版的基础上，根据七年来各使用院校的教学实践以及教者与读者提出的宝贵建议，通过认真推敲由原编者重新修订的，仍由李友善任主编。

在本书的修订过程中，除继续保留原版的特色外，对现代控制理论部分进行了全面改写与充实，加强了对基本内容、基本理论与基本概念的介绍与阐述，俾使读者在体系上对现代控制理论及其在工程上的应用建立起一个完整的概念。

修订版下册集中介绍与讨论现代控制理论，共五章，其中第九章线性系统的状态空间分析，第十章李雅普诺夫稳定性分析，第十一章线性系统的状态空间综合法等三章较全面介绍有关线性系统理论方面的内容，其教学时间分配分别建议为10学时，5学时与15学时。第十二章最优控制主要阐述最优控制的基本理论，这部分可讲授10至15学时。第十三章动态系统辨识与状态估计简要介绍有关动态系统辨识与状态估计——Kalman滤波的基本理论与方法，该章可用10至15学时来讲授。

修订版下册仍由朱克定教授主审。在修订版的编写与出版过程中，得到中国船舶工业总公司、国防工业出版社与哈尔滨工业大学有关领导同志的关怀与支持，以及船舶电气化与自动化教材编审组同志们的鼓励与协助，对此，编者一并表示衷心的谢意。

由于编者水平有限，在修订版中可能出现的不妥之处，敬请读者不吝赐教与指正。

编　者

1989年1月

目　录

第九章　线性系统的状态空间分析法 …… 1
§1　引言 …… 1
§2　线性定常系统的状态空间描述 …… 2
§3　线性定常系统的分析 …… 15
§4　线性时变系统的分析 …… 49
§5　线性离散系统的分析 …… 57
§6　线性连续状态方程的离散化 …… 68
习题 …… 73
第十章　李雅普诺夫稳定性分析 …… 77
§1　李雅普诺夫意义下的稳定性 …… 77
§2　判别系统稳定性的李雅普诺夫方法 …… 80
§3　应用李雅普诺夫方法分析线性系统稳定性 …… 84
§4　应用李雅普诺夫方法分析非线性系统稳定性 …… 91
习题 …… 96
第十一章　线性系统的状态空间综合法 …… 99
§1　线性系统的能控性与能观测性 …… 99
§2　线性系统的结构分解 …… 129
§3　线性系统的状态反馈与输出反馈 …… 131
§4　线性系统的状态观测器 …… 144
§5　线性系统的解耦 …… 156
§6　线性系统的实现 …… 163
习题 …… 173
第十二章　最优控制 …… 177
§1　最优控制的一般提法 …… 177
§2　应用变分法求解无约束的最优控制问题 …… 180
§3　极小值原理 …… 194
§4　线性二次型最优控制问题 …… 205
§5　动态规划 …… 221
习题 …… 234
第十三章　动态系统辨识与状态估计 …… 237
§1　预备知识 …… 237
§2　动态系统辨识 …… 254
§3　状态估计 …… 275
习题 …… 295
附录　数学基础——矩阵 …… 297
主要参考文献 …… 314

第九章　线性系统的状态空间分析法

§1　引　　言

一、古典控制理论与现代控制理论

古典控制理论是指以传递函数为基础的分析与设计控制系统的理论。本书第一章至第八章的内容便属于这种理论。应用古典控制理论分析与设计控制系统时，主要考虑的只是系统的输入、输出与误差（或偏差）信号，所采用的方法主要是频率响应法和根轨迹法。这两种工程方法对分析与设计单输入-单输出系统是完全合适的。

古典控制理论的局限性在于它主要适用于单输入-单输出的线性定常系统。对于时变系统、复杂的非线性系统和多输入-多输出系统则无能为力。因此，基于古典控制理论的频率响应法和根轨迹法对于最优控制系统与自适应控制系统的设计便不能奏效。这是因为这些较为复杂的系统绝大多数为时变系统和（或）非线性系统。

目前，控制系统的发展趋势是朝着控制任务更加复杂和控制精度要求越来越高的方向发展。这样一些复杂系统大多是多输入-多输出的、时变的和（或）非线性的。由于对控制系统的性能指标提出越来越严格的要求，从而系统的复杂程度也因之而越来越高；又因为近年来电子数字计算机的问世，也需要一种适合应用数字计算机分析与设计复杂系统的理论与方法，因此建立在状态空间概念之上的现代控制理论便发展了起来。

现代控制理论较古典控制理论有许多突出的优点。比如，现代控制理论适用于多输入-多输出系统，这些系统可以是线性的也可以是非线性的；可以是定常的也可以是时变的；而古典控制理论只适用于线性定常、单输入-单输出系统。现代控制理论采用的分析方法主要是时域的，而古典控制理论采用的分析方法则主要是复域的。时域分析法对于控制过程来说是直接的，而复域分析法是间接的。应用古典控制理论设计控制系统，因建立在试探的基础之上，故通常得不到最优控制；而应用现代控制理论一方面能使设计者针对给定的性能指标可用更一般的输入函数代替所谓“典型输入函数”，(如阶跃函数，脉冲函数，正弦函数等）来实现最优控制系统的设计，另一方面还可比较容易地考虑初始条件。

二、状态·状态变量·状态向量·状态空间

所谓“状态”，乃是指系统的运动状态。控制系统的状态由描述系统的最小一组变量来确定，只要知道了在 $t=t_0$ 时刻的这组变量和 $t\geqslant t_0$ 时刻的输入函数，便完全能够确定在任何 $t\geqslant t_0$ 时刻上系统的行为。基于状态的概念，控制系统在时刻 t 的行为是由其 t_0 时刻的行为和 $t\geqslant t_0$ 时刻的输入唯一确定，而与 t_0 时刻前的行为和输入无关。在分析线性定常系统时，通常取参考时刻 t_0 为零。决定控制系统状态的变量称为状态变量。

在控制系统中，状态变量并非一定是系统的输出，也并非一定要求在物理上能控或能观测。决定系统状态的状态变量不是唯一的。

若完全描述一个给定系统的动态行为需要n个状态变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，并将这些状态变量看做向量$X(t)$的各个分量，即

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

则向量$X(t)$称为状态向量。一旦给定$t\geqslant t_0$时刻的输入向量$u(t)$，以及初始状态向量$X(t_0)$，在任何$t\geqslant t_0$时刻的系统状态便唯一地为状态向量$X(t)$所确定。

以状态向量$X(t)$的各个分量x_1，x_2，…，x_n做轴构成的n维空间称为状态空间。任意状态$X(t)$都可用状态空间中的一个点来表示。

§2　线性定常系统的状态空间描述

一、状态变量的选取

设有多输入-多输出控制系统，其方框图示于图9-1。图中u_1，u_2，…，u_r为被控过

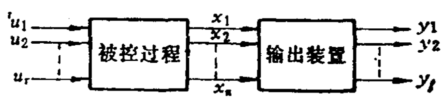

图9-1　多输入-多输出系统方框图

程P的输入，或称作用函数；x_1，x_2，…，x_n为描述被控过程状态的状态变量；y_1，y_2，…，y_l为系统输出。应用状态空间法分析与设计多输入-多输出控制系统，将被控过程的作用函数u_1，u_2，…，u_r，状态变量x_1，x_2，…，x_n及系统输出函数y_1，y_2，…，y_l分别写成向量形式，即

$$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{9-1}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9-2}$$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} \tag{9-3}$$

通常，向量U、X及y均为时间t的函数。采用向量表示法，对于分析与设计多输入-多输出系统是很方便的。

设在时间间隔$[t_0, T]$作用到被控过程P的作用函数向量U为已知。为该被控过程选取向量$X(t_0)$，如果向量$X(t)(t \geqslant t_0)$唯一地由向量$X(t_0)$及$U(t_0, T)$所确定，则向量$X(t)$便可选作被控过程P的状态向量，它的各个分量$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$便是状态变量。

由有限个集中参数元件组成的系统，其运动状态可用n阶微分方程描述，而n阶微分方程还可写成由n个一阶微分方程构成的方程组来表示。通过向量表示法，这个描述n阶微分方程的方程组可化成一阶矩阵微分方程。假如向量的各个分量为选定的一组状态变量时，则上述一阶矩阵微分方程称为系统的状态方程。

二、作用函数不含导数项时n阶线性系统的状态空间表达式

设单输入-单输出线性系统的运动状态由下列n阶常微分方程来描述，即

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u \tag{9-4}$$

式中 y，$y^{(i)}(i=1, 2, \cdots, n)$——分别为系统输出函数及其各阶导数；

u——系统的作用函数；

$a_1, a_2, \cdots, a_n$——常系数。

式(9-4)为作用函数u不含导数项的n阶常微分方程，其中作用函数u及输出函数y并其各阶导数$y^{(i)}(i=1, 2, \cdots, n)$均为时间$t$的函数。

从式(9-4)不难看出，对于上述线性系统，若已知初始条件$y(0)$，$y^{(i)}(0)(i=1, 2, \cdots, n-1)$及$t \geqslant 0$时刻的作用函数$u$，则该系统在任何$t \geqslant 0$时刻的行为便可完全得到确定。因此，在这种情况下，可以选取y及$y^{(i)}(i=1, 2, \cdots, n-1)$为系统的状态变量。但需指出，根据上述方法选取的状态变量并不是唯一的，也就是说系统的状态变量并不一定要求是其输出函数及其各阶导数。

下面讨论选取输出函数y及其各阶导数$y^{(i)}(i=1, 2, \cdots, n-1)$为状态变量时线性系统状态空间表达式的建立。选

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=y\\
&x_2=\dot{x}_1=\dot{y}\\
&x_3=\dot{x}_2=y^{(2)}\\
&\quad\cdots\cdots\\
&x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}
\end{aligned}\right\} \tag{9-5}$$

为系统的状态变量，则式(9-4)所示n阶常微分方程可改写成由n个一阶常微分方程构成的方程组，即

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2\\
&\dot{x}_2=x_3\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\dot{x}_{n-1}=x_n\\
&\dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+u
\end{aligned}\right\} \tag{9-6}$$

将方程组(9-6)通过向量写成矩阵方程的形式，便得出如下的一阶矩阵微分方程，即

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u \tag{9-7}$$

若记

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix} \qquad \dot{X}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

则式（9-7）可改写成

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{9-8}$$

其中 X，$\dot{X}$ 分别为状态向量及其一阶导数，均为 n 维列向量；A 为 $n\times n$ 常系数矩阵，称为系统矩阵；B 为 $n\times 1$ 常系数矩阵，称为输入矩阵或控制矩阵。式（9-8)所示一阶矩阵微分方程为通过状态向量 X 及作用函数 u 表示的一阶微分方程。这便是线性系统的状态方程。

将由 $y=x_1$ 表示的系统输出方程通过状态向量 X 表示时，得到

$$y=(1\ \ 0\ \cdots\ 0)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{9-9}$$

若记

$$C=(1\ \ 0\ \cdots\ 0)$$

则式（9-9）可改写成如下的输出方程，即

$$y=CX \tag{9-10}$$

其中 C 为 $1\times n$ 常系数矩阵，称为输出矩阵。

式（9-8）所示状态方程及式（9-10）所示输出方程是应用状态空间法分析与设计控制系统时描述系统动态特性的状态空间表达式。

例1 设控制系统的运动方程为

$$y^{(2)}+3\dot{y}+2y=u \tag{9-11}$$

试写出该系统的状态空间表达式。

解 选取

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

为系统的状态变量，则运动方程（9-11）通过状态变量 x_1 及 x_2 可改写成如下方程组，即

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

由上列方程组直接写出系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu$$

其中系统矩阵及控制矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

系统的输出方程为

$$y = CX$$

其中输出矩阵为

$$C = (1 \quad 0)$$

例2 设某控制系统的方框图如图 9-2 所示。试写出该系统的状态空间表达式。

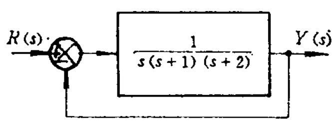

图9-2 控制系统方框图

解 由图 9-2 求得给定控制系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

根据上列闭环传递函数求得给定系统的运动方程为

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2\dot{y} + y = r \tag{9-12}$$

选取

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = y^{(2)}$$

为系统的状态变量，则由给定系统的运动方程（9-12）通过状态变量 x_1、x_2 及 x_3 可分别写出如下状态方程及输出方程，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y=(1\ 0\ 0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

三、作用函数含导数项时n阶线性系统的状态空间表达式

当描述单输入-单输出线性系统运动状态的 n 阶常微分方程含有作用函数的导数项时，即

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \tag{9-13}$$

便不再可能像式（9-5）那样选取系统的输出函数 y 及其导数 $y^{(i)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 作为状态变量。这是因为若取

$$x_1=y$$
$$x_2=\dot{x}_1=\dot{y}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}$$

为系统的状态变量，则在根据式（9-13）写出的包含 n 个一阶常微分方程的方程组

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_n=-a_nx_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1x_n+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \tag{9-14}$$

中，当作用函数 u 在 $t=t_0$ 时刻出现一个有限跳跃，如 u 是一个阶跃函数，于是 $\dot{u}$ 便是在 $t=t_0$ 时刻出现的 δ 函数，以及 $u^{(i)}(i=2,3,\cdots)$ 将是在 $t=t_0$ 时刻上的高阶脉冲函数。这样，式(9-14)表示的状态轨迹在 $t=t_0$ 时刻上将产生无穷大跳跃。因此，即使在已知作用函数 u 的情况下，$t\geqslant t_0$的系统状态也不可能由选定的状态向量X唯一确定，即在这时可能得不到唯一的解。因此在线性系统的运动方程中含有作用函数的导数项时，不能将系统的输出函数 y 及其导数 $y^{(i)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 直接选作系统的状态变量，因为这组变量不具备在已知系统输入和初始状态条件下完全确定系统未来运动状态的特性。

综上分析可见，对于式（9-13）所示系统，选取状态变量的原则应是，在由包含状态变量的 n 个一阶微分方程构成的系统状态方程中，任何一个微分方程均不含有作用函数的导数项。

根据上述原则选定系统状态变量的一种可能方法是，选取

$$\left.\begin{aligned} x_1&=y-b_0u \\ x_2&=\dot{x}_1-h_1u \\ x_3&=\dot{x}_2-h_2u \\ &\cdots\cdots \\ x_n&=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u \end{aligned}\right\} \tag{9-15}$$

作为系统的状态变量，其中

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= b_1 - a_1 b_0 \\ h_2 &= (b_2 - a_2 b_0) - a_1 h_1 \\ h_3 &= (b_3 - a_3 b_0) - a_2 h_1 - a_1 h_2 \\ &\cdots\cdots \\ h_n &= (b_n - a_n b_0) - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_2 - \cdots - a_2 h_{n-2} - a_1 h_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{9-16}$$

通过式（9-15）表示的状态变量，可将系统的运动方程（9-13）写成如下状态方程，即

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + h_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + h_2 u \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + h_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + h_n u \end{aligned}\right\} \tag{9-17}$$

其中 h_i（$i=1, 2, \cdots, n$）由式（9-16）确定。将状态方程（9-17）写成矩阵方程形式，得到

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} u \tag{9-18}$$

由式（9-15）求得系统的输出方程为

$$y = x_1 + b_0 u$$

写成矩阵方程形式，得到

$$y = (1\ \ 0\ \cdots\ 0\ \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + b_0 u \tag{9-19}$$

在式（9-18）及（9-19）中，若记

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = (1\ \ 0\ \cdots\ 0\ \ 0), \quad \boldsymbol{D} = b_0$$

则系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B}u \tag{9-20}$$

$$y = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{D}u \tag{9-21}$$

其中矩阵$\boldsymbol{D}$在一般情况下称为直接传递矩阵。

需要指出，线性系统运动方程不含作用函数的导数项与包含作用函数的导数项时相应状态方程的差别，从式（9-7）及（9-18）看出，只在于控制矩阵B有所不同，而系统矩阵A对二者来说则完全相同；其输出方程的差别在于，含作用函数的导数项时在b_0不为零情况下增加直接传递项Du。

例3 设控制系统的运动方程为

$$y^{(3)}+9y^{(2)}+8\dot{y}=u^{(2)}+4\dot{u}+u \tag{9-22}$$

试写出该系统的状态空间表达式。

解 将式（9-22）与式（9-13）对照，求得

$$a_1=9,\ a_2=8,\ a_3=0$$

$$b_0=0,\ b_1=1,\ b_2=4,\ b_3=1$$

由式（9-16）计算出

$$h_1=1,\ h_2=-5,\ h_3=38$$

根据上列各项数据，按式（9-15）求得该系统的状态变量为

$$x_1=y$$

$$x_2=\dot{x}_1-u$$

$$x_3=\dot{x}_2+5u$$

通过上列状态变量，根据式（9-17）写出系统的状态方程为

$$\dot{x}_1=x_2+u$$

$$\dot{x}_2=x_3-5u$$

$$\dot{x}_3=-8x_2-9x_3+38u$$

或写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-8&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-5\\38\end{bmatrix}u$$

系统的输出方程为

$$y=(1\ \ 0\ \ 0)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

例4 试写出图 9-3 所示系统的状态空间表达式。

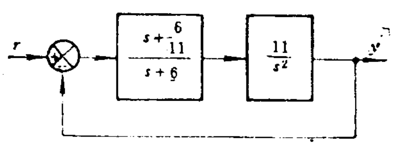

图9-3 控制系统方框图

解 由图 9-3 求得给定系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

由上列闭环传递函数求得描述给定系统运动状态的常微分方程为

$$y^{(3)}+6y^{(2)}+11\dot{y}+6y=11\dot{r}+6r \tag{9-23}$$

将式（9-23）与式（9-13）进行比较，得到

$$a_1=6,\quad a_2=11,\quad a_3=6$$

$$b_0=0,\quad b_1=0,\quad b_2=11,\quad b_3=6$$

由式（9-16）计算出

$$h_1=0,\quad h_2=11,\quad h_3=-60$$

根据上列数据，按式（9-15）选取系统的状态变量为

$$x_1=y$$

$$x_2=\dot{x}_1$$

$$x_3=\dot{x}_2-11r$$

通过上列状态变量，根据式（9-17）写出给定系统的状态方程为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=x_3+11\,r$$

$$\dot{x}_3=-6x_1-11x_2-6x_3-60\,r$$

或写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 11\\ -60\end{bmatrix}r$$

系统的输出方程为

$$y=(1\ \ 0\ \ 0)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

当线性系统的运动方程含有作用函数的导数项时，还可用不同于上述的另一种方法求取其状态空间表达式。设控制系统的运动状态由式（9-13）描述，其方框图如图 9-4 所示。当将图 9-4 作如图 9-5 的等效变换，并引进新的中间变量 z 之后，可将常微分方

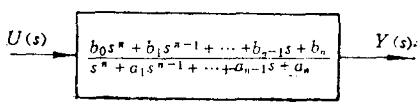

图9-4　控制系统方框图

程（9-13）改写成由下列两个常微分方程构成的方程组，即

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=u \tag{9-24}$$

$$y=b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{z}+b_nz \tag{9-25}$$

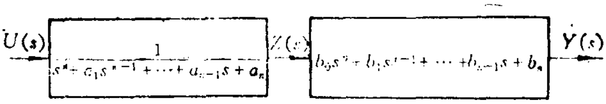

图9-5　图9-4所示方框图的等效变换

其中方程（9-24）描述作用函数 u 与中间变量 z 间的运动状态，是一个不含作用函数导数项的常微分方程；方程（9-25）表示输出函数 y 与中间变量 z 间的函数关系。对于式（9-24），可选取

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = z \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \cdots\cdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} = z^{(n-1)} \end{array}\right\} \tag{9-26}$$

为状态变量，其状态方程求得为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{9-27}$$

根据式（9-24）～（9-26）求得输出方程为

$$y = b_0(-a_n \ -a_{n-1} \ \cdots \ -a_1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u + (b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9-28}$$

若系数 $b_0 = 0$，则式（9-28）表示的输出方程变为

$$y = (b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9-29}$$

需指出，将式（9-18）与（9-27）以及将式（9-19）与（9-28）进行比较可见，对含有作用函数导数项的运动方程（9-13）分别应用上述两种方法求得的状态方程与输出方程在形式上不完全相同，但由于是同一个系统的状态空间表达式，所以在同一作用函数作用下分别基于上述两种方法求得的系统输出应是相同的。

例 5 试根据式（9-27）及（9-28）写出方程（9-22）所描述系统的状态空间表达式。

解 根据方程（9-22）的系数

$$a_1 = 9, \ a_2 = 8, \ a_3 = 0$$

$$b_0 = 0, \ b_1 = 1, \ b_2 = 4, \ b_3 = 1$$

由式（9-27）及（9-28）分别求得系统的状态方程及输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \ 4 \ 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

四、作用函数不含导数项时多输入-多输出 n 阶线性系统的状态空间表达式

设有图 9-1 所示多输入-多输出 n 阶线性定常系统，并设一组变量 x_1，x_2，…，x_n为该系统的状态变量，通过状态变量描述系统运动状态的方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1r}u_r\\\dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2r}u_r\\&\cdots\cdots\cdots\\\dot{x}_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\cdots+b_{nr}u_r\end{aligned}\right\}\tag{9-30}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 及 $b_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,r)$ 均为常系数。将方程组 (9-30) 改写成矩阵方程形式，得到

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BU}\tag{9-31}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\qquad\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_n\end{bmatrix}$$

分别为系统的状态向量及其一阶导数，均为 n 维列向量；

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\vdots&\vdots\quad\ \vdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}$$

为系统矩阵，它是 $n\times n$ 常系数矩阵；

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1r}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nr}\end{bmatrix}$$

为控制矩阵，它是 $n\times r$ 常系数矩阵；

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\cdots\\u_r\end{bmatrix}$$

为作用函数向量，它是 r 维列向量。方程 (9-31) 便是以 X 为状态向量的描述多输入-多输出线性定常系统的状态方程。

当图 9-1 所示多输入-多输出线性定常系统的输出函数 $y_i(i=1,2,\cdots,l)$ 与状态变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 间的函数关系通过下列方程组描述时，即

$$\left.\begin{aligned}y_1&=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_{1n}\\y_2&=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n\\&\cdots\cdots\cdots\\y_l&=c_{l1}x_1+c_{l2}x_2+\cdots+c_{ln}x_n\end{aligned}\right\}\tag{9-32}$$