强非线性振动的定量方法

The Definite Quantitative Methods for Strongly Non-Linear Vibration

陈树辉　刘世龄　张佑启　徐　兆　著

广东科技出版社

强非线性振动的定量方法

The Definite Quantitative Methods for Strongly Non-Linear Vibration

陈树辉　刘世龄　张佑启　徐　兆　著

广东科技出版社
广　州

图书在版编目（CIP）数据

强非线性振动的定量方法/陈树辉等著．—广州：广东科技出版社，2004.10

ISBN 7-5359-3380-7

Ⅰ．强…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．非线性振动-定量分析　Ⅳ．O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 072641 号

出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路 11 号　邮码：510075）
E-mail：gdkjzbb@21cn.com
http：//www.gdstp.com.cn
经　　销：广东新华发行集团
印　　刷：广东信源彩色印务有限公司
（广州天河高新技术工业园建工路 17 号　邮码：510630）
规　　格：787mm×1 092mm　1/16　印张 17.25　字数 360 千
版　　次：2004 年 10 月第 1 版
2004 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：108.00 元

广东优秀科技专著出版基金会

内容简介

本书是作者长期以来在强非线性振动领域科研成果的系统总结。四位作者的科研成果“强非线性振动的增量谐波平衡法和推广的摄动方法”荀获1999年国家自然科学奖三等奖。本书主要取材于该得奖项目发表于本专业著名国际杂志上的40多篇论文。书中全面地介绍求解强非线性振动周期解的增量谐波平衡法(IHB法)和各种推广的摄动方法,包括改进的L-P法、椭圆函数L-P法、推广的KBM法、推广的平均法、推广的L-P法、推广的多尺度法和摄动—增量法等等。这些方法为研究各种强非线性振动问题提供了强有力的工具。

书中对每种方法都力求阐明其创新思想,简要给出其公式推导,举出其应用实例,并介绍国际上与其相关方法的最新研究动态。

本书可供广大从事非线性振动研究、教学和工程设计的教师、研究生和科研技术人员阅读参考。

Brief Introduction

This book represents an overall summarization of a series of scientific research achievements by the authors over a long period of time in the field of strongly non-linear vibration. As a highlight of the achievements, "Incremental Harmonic Balance Method and Generalized Perturbation Methods for Strongly Non-Linear Vibration" was a Third-Prize winner awarded by the prestigious China National Natural Science Prize Committee in 1999. Most articles included in the book reflecting the key award-winning theory and methods can be found in various international journals. It is a comprehensive illustration of the incremental harmonic balance method and various generalized perturbation methods, including the modified L-P method, the elliptic L-P method, the generalized L-P method, the generalized KMB method, the generalized averaging method, the generalized multiple scales method and the perturbation-incremental method, etc. It is the authors' hope that these methods will serve as instrumental tools in solving various strongly non-linear vibration problems.

As readers will find in the book, all methods are illustrated with clarity, explicitness, and innovative elaborations. The process of formula derivation is also briefly explained with practical instances. In addition, some latest international developments in the field are also introduced.

The book can be a resourceful reference for students, instructors, engineers and research workers, who are engaged in their study and application of the strongly non–linear vibration theory.

前 言

非线性振动是从 20 世纪 20 年代开始迅速发展起来的一门学科。非线性分析是现代科学基础研究的主要方向之一。

求解非线性振动的方法,有经典的摄动法,包括 Lindstedt-Poincaré 方法(L-P 法)、多尺度法、渐近法(含平均法,KBM 法)等。这些方法只适用于弱非线性振动;对于强非线性振动,它们就显得无能为力了。

随着科学技术的飞速发展,高强度材料、新型结构型式的不断出现,机械系统越来越复杂,精密实验室的隔振、防振要求,高层建筑和桥梁结构的防震设计等,所有这些都使强非线性振动问题日益突出。因此,发展强非线性振动的新理论,寻找新方法是当前非线性振动理论和应用研究的重要一环。

本书是作者长期以来在非线性振动特别是强非线性振动这一领域科研成果的系统总结。该科研成果"强非线性振动的增量谐波平衡法和推广的摄动方法"1999 年获国家自然科学奖三等奖。我国著名力学家、中国科学院院士钱令希教授高度评价该成果,称其"对于推动非线性振动理论为工程服务有重要贡献, 对于计算力学理论和方法的发展也有重要意义,应属于国际先进水平";另一位著名力学家、中国科学院院士胡海昌教授也高度评价该成果,称其"在理论上也有重要贡献","具有重要工程意义,对推动多自由度、强非线性振动理论在多种工程技术领域中的应用有重大贡献,达到国际先进水平"。本书就是取材于该得奖项目中发表于本专业著名国际杂志上 (如 ASME Journal of Applied Mechanics; International Journal of Non-Linear Mechanics; Journal of Sound and Vibration 等) 的 40 多篇论文。10 多种求解强非线性振动系统的方法,归纳为六章,再加上第一章的经典摄动法,全书共分七章。作者分章阐述每种方法的基本思想,公式推导和应用例题。重点突出每种方法的创新之处,并总结各种方法的优、缺点。每章都综述国内外在该领域的研究进展,便于读者全面了解、掌握和应用。

第一章介绍 4 种经典的摄动方法,它们是以后各章的理论基础。新的摄动方法是在经典的摄动方法的基础上推广、发展起来的。

第二章介绍多维 L-P 法。该法把经典 L-P 法推广至多自由度系统。通过引进新变量来表示不同的尺度,这些尺度可以是同一量级的尺度,也可以是不同量级的尺度。这样就适合于分析概周期振动和内部共振问题。

第三章介绍改进的 L-P 法。该法把只适合于弱非线性振动的经典 L-P 法推广到适合于强非线性振动。各种经典的摄动法,都是适用于派生系统为线性的系统。但它们要求系统的非线性部分必须含小参数。要扩展它们的应用范围,可通过参数变换把对旧参数而言是大参数的强非线性系统转化为对新参数而言是小参数的系统。改进的 L-P 法就是这样,经选择适当的参数变换后,再应用经典的 L-P 法。

第四章介绍椭圆函数摄动方法。这类方法适用于派生系统为具有椭圆函数解的非线

性微分方程的系统。可以说，经典摄动法是在线性系统的解附近摄动，所以只能适用弱非线性振动；而椭圆函数摄动方法是在强非线性系统的解附近摄动，所以适用于强非线性振动。与经典摄动法相对应，这类方法有椭圆函数 L-P 法、椭圆函数平均法、椭圆函数 KBM 法、椭圆函数摄动法、椭圆函数谐波平衡法。我们把它们归纳在这一章，每种方法逐一予以阐释。

第五章介绍广义谐波函数法。椭圆函数法只适用于派生系统具有椭圆函数解的系统，然而这类系统是有限的。对于派生系统为一般非线性微分方程的系统，我们可通过引进广义谐波函数来表示派生方程的解。普通的三角函数(圆函数)和椭圆函数都是广义谐波函数的特殊情形。在此基础上发展起来的与经典摄动法相对应的新的摄动法，包括推广的 L-P 法、推广的多尺度法、推广的平均法和推广的 KBM 法，我们把它们归纳在这一章逐一阐释。

第六章介绍增量谐波平衡法(IHB 法)。该法是增量法和谐波平衡法的有机结合，是一个半解析半数值的方法。本章首先介绍 IHB 法的基本原理，解题步骤；其次介绍 IHB 法在多自由度系统、平面杆件系统的应用；接着再介绍弹性系统非线性振动的幅度增量变分原理，它是 IHB 法的理论基础；此外，还介绍 IHB 法在参变振动、概周期振动、分段线性系统的非线性振动中的应用；最后总结 IHB 法的发展及其在各类型方程，各类工程结构，各种非线性问题中的应用。IHB 法与有限元法相结合，与快速傅里叶变换(FFT)算法相结合，与时间变换相结合(IHBT)可以解决大型的复杂的实际工程问题，是一个深受工程界欢迎的具有强大生命力的方法。

第七章介绍摄动—增量法。摄动法与增量法结合，可以发挥两种方法各自的优点，避免各自的缺点。低阶的摄动解可以作为增量法的初值。增量法可求得任意大参数的并可以准确到预先指定精确度的解。本章先介绍该法的原理，解题步骤，接着介绍该法在半稳定极限环及其分叉值，同、异宿轨线及其分叉值和二次动力系统极限环的计算。

本书承蒙广东优秀科技专著出版基金会全部资助出版，作者深表感谢。本书第一作者陈树辉也得到国家自然科学基金项目(19772075)的资助，这对本书的完成有重要意义，作者借此表示衷心的感谢。中山大学李岳生教授、蔡承武教授、张展霞教授等对本书的出版给予热情的关心和积极的支持，作者对他们谨表示深切的谢意。

限于作者的水平，本书内容难免有错漏之处，敬请指正。

作　者

2003 年 6 月于中山大学

作者简介

陈树辉 1944年7月出生，广东省潮安县人，汉族。1969年毕业于中山大学数学力学系力学专业，1990年获香港大学博士学位。现任中山大学物理科学与工程技术学院副院长、应用力学与工程系系主任、教授、博士生导师；中国力学学会理事、广东省力学学会副理事长、广东省振动工程学会副理事长；教育部高等学校教学指导委员会力学专业分委员会委员；《振动与冲击》杂志编委。长期从事非线性振动理论研究，在国内外重要杂志上发表论文50多篇，曾获国家自然科学三等奖、教育部科技进步三等奖、广东省自然科学三等奖。

目 录

第一章
经典摄动方法

一般来说，振动系统总是非线性的，线性系统只是一种简单模型。如果线性理论能反映我们要考察的物理现象的定性性质和适当的定量结果，我们就把它当做线性系统来处理；否则，就要将其作为非线性系统来研究。

在数学上，非线性振动系统是用非线性微分方程来描述的。由于非线性项的出现，叠架原理不能成立，所以研究非线性振动比研究线性振动要复杂得多。对非线性微分方程而言，除极少数可以求出精确的解析解外，目前还没有适用于各类方程的通用的精确解析解法，一般情况下只能用近似方法求解。理论研究有两种基本方法，一种是定性方法，另一种是定量方法。相平面法即几何方法，就是一种定性方法，它用相平面上的轨线来表示系统的运动，从而作出定性的分析，判断系统的运动规律与振动特性。其理论基础是微分方程定性理论。本专著不涉及定性方法。

定量方法主要可分为三大类。

第一类是数值方法，即直接对微分方程采用时间积分法，如 Runge-Kutta(R-K)方法。数值方法可以较准确地给出某一时刻的位移、速度、加速度的数值，但是不能提供解的表达式，因而不能给出解的全貌，人们难以对系统全局的性质作出分析。

第二类是摄动方法。这类方法把微分方程的解近似地表示为某一参数的幂级数形式。通过比较同阶小参数的系数，把原来的非线性常微分方程化为一组关于各阶近似解的线性常微分(或偏微分)方程，这组方程可以逐个求解。在早期的直接展开法(基本摄动法)中，参数的幂级数的表达式只局限于某一区域有效，而在另外的区域由于幂级数不一致性而失效。为了拓广幂级数一致性的适用范围，人们从物理、工程、应用数学等不同领域发展了各种技术，从而形成了各种方法。其中最有影响、最成系统的有 Lindstedt-Poincare(L－P)法，多尺度法和渐近法。Nayfeh, A. H. 在其几本关于摄动法的专著中已有详细的论述，见 Nayfeh(1973, 1981), Nayfeh, et al(1979)。本章以下各节主要参考 Nayfeh 这三本专著，详细介绍这三种方法的基本思想，并指出每种方法的优缺点。

第三类方法是谐波平衡法。此法把微分方程周期解展开成傅氏(Fourier)级数，通过比较方程中谐波项的系数，把原来的非线性常微分方程化为以傅氏系数为未知量的非线性代数方程组，然后采用熟知的求解非线性方程组的方法如迭代法或 Newton-Raphson (N-R)方法求解。此法的优点是概念直观，易于应用，有解析表达式，适合于与计算机数值方法结合起来形成半解析半数值的方法。

定量方法除上述三大类方法外，还有其他的方法，如直接变分法、频闪变换法等。

以上各种方法都有自己的特点，并且在应用中也有许多发展和推广，同时也都有一定的局限性。本章重点介绍几种经典的摄动法，因为它们都是最基本、而且应用最广的摄动法。它们都具有摄动法本质上的缺点，只适合于弱非线性系统。第二章至第五章所介绍的各种适合于强非线性振动的方法，分别是上述摄动方法的推广。

§1.1 直接展开法

最原始的摄动法就是采用直接展开法。

考虑拟线性自治系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{1.1.1}$$

其中,ε 为小参数,$f(x,\dot{x})$是关于 x 与 $\dot{x}$ 解析的非线性函数。当 $\varepsilon = 0$ 时,微分方程(1.1.1)成为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.1.2}$$

它是我们熟知的线性振动理论中的简谐振动微分方程,称之为(1.1.1)式的派生方程。派生方程的解称为派生解,派生方程所描述的系统称为派生系统。

假设方程(1.1.1)存有周期解,原始的求解方法是把方程的解直接展开为 ε 的幂级数,即

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots, \tag{1.1.3}$$

其中 $x_i(t)(i=0,1,2,\cdots)$是 t 的函数,与 ε 无关。$x_o(t)$就是系统的派生解。

把(1.1.3)式代入(1.1.1)式的左端,有

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0^2 x &= (\ddot{x}_0 + \varepsilon\ddot{x}_1 + \varepsilon^2\ddot{x}_2 + \varepsilon^3\ddot{x}_3 + \cdots) + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \cdots) \\ &= \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \varepsilon^2(\ddot{x}_2 + x_2) + \varepsilon^3(\ddot{x}_3 + x_3) + \cdots.\end{aligned}$$

将(1.1.3)式代入 $f(x,\dot{x})$,并将它在 $x_0,\dot{x}_0$ 附近展开为 ε 的幂级数,即

$$\begin{aligned}f(x,\dot{x}) = {}& f(x_0,\dot{x}_0) + \varepsilon\left[x_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}}\right] + \\ & \varepsilon^2\left\{x_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2!}\left[x_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x^2} + \right.\right. \\ & \left.\left.\dot{x}_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}^2} + 2x_1\dot{x}_1\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x\partial \dot{x}}\right]\right\} + \cdots,\end{aligned}$$

其中 $\partial f(x_0,\dot{x}_0)/\partial x$ 表示 $\partial f(x,\dot{x})/\partial x$ 在 $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ 处的值,其他类同。这样,将(1.1.3)式代入(1.1.1)式,可得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \varepsilon^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) + \varepsilon^3(\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3) + \cdots = \\ &\varepsilon f(x_0,\dot{x}_0) + \varepsilon^2\left[x_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}}\right] + \\ &\varepsilon^3\left[x_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x} + \dot{x}_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} + \right. \\ &\left.\frac{1}{2!}\left(x_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x^2} + \dot{x}_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}^2} + 2x_1\dot{x}_1\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x\partial \dot{x}}\right)\right] + \cdots.\end{aligned}$$

方程两端 ε 同次幂的系数必须相等,这样就得到方程组

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \tag{1.1.4}$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f(x_0,\dot{x}_0), \tag{1.1.5}$$

$$\ddot{x}_2+\omega_0^2x_2=x_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x}+\dot{x}_1\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial\dot{x}},\tag{1.1.6}$$

$$\ddot{x}_3+\omega_0^2x_3=x_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x}+\dot{x}_2\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2!}\left(x_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x^2}+\dot{x}_1^2\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial\dot{x}^2}+2x_1\dot{x}_1\frac{\partial^2 f(x_0,\dot{x}_0)}{\partial x\partial\dot{x}}\right).\tag{1.1.7}$$

$$\vdots$$

以上各方程都是线性微分方程,并且分别是关于 x_i 的微分方程,可以逐个求解。从方程(1.1.4)可求得 x_0,把 x_0 代入方程(1.1.5)的右端,可以求得 x_1,把 x_0、x_1 代入方程(1.1.6)的右端进而求得 x_2。$x_3,x_4,\cdots$可依次类推求得。

这就是原始的摄动法,称为直接展开法。摄动法的思想可以溯源于 19 世纪天文学家的天体计算。就目前所知,最早是 Poisson(1830 年左右)在研究天体运动时,把天体(例如地球)的运动,用微分方程的形式

$$\ddot{x}_i=Z_{i0}+\varepsilon Z_{i1}+\varepsilon^2Z_{i2}+\cdots,\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.1.8}$$

来表示。式中 ε 是一个小参数,x_i 是天体的坐标,而 $Z_{i0},Z_{i1}\cdots$是 x_i 的函数,代表其他天体的引力。研究地球运动时,Z_{i0}代表太阳对地球的引力,是主要项,而 $\varepsilon Z_{i1},\varepsilon^2Z_{i2},\cdots$则代表其他行星对地球的引力,是微小项,称为“摄动”。这一思想使 Poisson 假设所求微分方程的解可表示为级数的形式

$$x_i(t)=x_{i0}(t)+\varepsilon x_{i1}(t)+\varepsilon^2x_{i2}(t)+\cdots.\tag{1.1.9}$$

把(1.1.9)式代入原微分方程组(1.1.8),令两边 ε 的同次幂系数相等,便得到一系列微分方程,可依次解得 $x_{i0}(t),x_{i1}(t),\cdots$。

原始的摄动法就是在形式上直接采用 Poisson 的求解过程。但是,问题是在什么条件下,方程(1.1.1)具有周期解,且能像 Poisson 那样将解写成 ε 的幂级数形式? Poincaré(1892)对此作了证明,证明了(1.1.3)形式解的合理性,指出:如果微分方程的非线性项是包含着小参数的解析函数,那么它的解就是对此小参数解析的,即可展开成小参数的幂级数,并且当小参数充分小时,级数是收敛的。

在实际计算中,通常只取级数开头几项,因为计算工作量随着阶次的增高而迅速加大,而且变得繁复。因此,当级数解项数 $i\to\infty$时,是否收敛并不重要,重要的是当 i 取一定值时,级数解的渐近性。为此,要求级数解(1.1.3)一致有效。如果保留级数(1.1.3)式至 $i=N$ 项,后面的项全部截去,由此引起的误差只与 ε 的$N+1$ 次幂同阶,即满足

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^ix_i(t)+O(\varepsilon^{N+1}),\text{当 }\varepsilon\to0,\tag{1.1.10}$$

那么级数(1.1.3)式就是一个 Poincaré 渐近级数。这时,级数中的每一项只是它前面一项的微小修正。

实际系统所包含的小参数 ε 有一定的数值,不可能任意地小,所以按小参数 ε 直接展开的级数解常常只能在自变量 t 的某个区间内具有渐近性,即(1.1.3)表示的解只能在自变量的某个区间内才是一致有效的。下面通过一个简单的例子来具体说明这一点。

【例】 用直接展开法求 Duffing 方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{a}$$

满足初始条件

$$x(0) = a, \dot{x}(0) = 0 \tag{b}$$

的解。

解 方程(a)可以写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^3, \tag{c}$$

这里 $f(x,\dot{x}) = -x^3$，于是由方程(1.1.4)至(1.1.6)可得

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3, \\ &\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3x_1 x_0^2. \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

根据初始条件(b)，各阶近似解的初始条件对应为

$$\left.\begin{aligned} &x_0(0) = a, \dot{x}_0(0) = 0, \\ &x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, (i = 1,2,\cdots). \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

由式(d)的第一个方程，并考虑到相应的初始条件，可得

$$x_0(t) = a\cos\omega_0 t \tag{f}$$

将(f)式代入(d)式的第二个方程，利用 $\cos^3\omega_0 t = \frac{1}{4}(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t)$，得

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{3}{4}a^3\cos\omega_0 t - \frac{1}{4}a^3\cos 3\omega_0 t. \tag{g}$$

考虑到初始条件(e)，方程(g)的解为

$$x_1(t) = -\frac{3}{8\omega_0}a^3 t\sin\omega_0 t + \frac{1}{32\omega_0^2}a^3(\cos 3\omega_0 t - \cos\omega_0 t), \tag{h}$$

再将所得的 x_0 及 x_1 代入(d)的第三个方程，可以求得 x_2 的解。如果我们只要求精确到 ε 阶的近似解，那末

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + \varepsilon\left[-\frac{3}{8\omega_0}a^3 t\sin\omega_0 t + \frac{1}{32\omega_0^2}a^3(\cos 3\omega_0 t - \cos\omega_0 t)\right]. \tag{i}$$

从所得的结果可以看出，(i)式中右端第二项有 $t\sin\omega_0 t$ 的因子，这样的项称为久期项(Secular term). 由于存在久期项，近似解(i)式将随时间 t 的增大而增大，当 $t\to\infty$ 时，其值趋于无限大。这是不符合实际的。事实上，方程(a)有首积分

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{\varepsilon}{4}x^4 = E. \tag{j}$$

因此，$\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 < E$。可见，对任意的 t 值，精确解 $x(t)$ 都是有界的。近似解(i)式仅在较短的时间内可以应用，即只有当 $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$ 时才有渐近性。t 与 $\frac{1}{\varepsilon}$ 同阶时渐近性就丧失。因为这时第二项与第一项同阶，违反 εx_1 是 x_0 的微小修正的渐近条件。

可以看出，如果继续求解 $x_2, x_3, \cdots$ 各阶近似解，将出现形如 $t^m\sin\omega_0 t, t^m\cos\omega_0 t$ 的