计算机控制系统学习指导

陈忠信
王醒华
高金源 编

中央广播电视大学出版社

计算机控制系统学习指导

陈忠信
王醒华　编
高金源

中央广播电视大学出版社

(京)新登字163号

计算机控制系统学习指导

陈忠信　王醒华　高金源　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北 京 联 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 9.5　千字 229

1989年 10 月第 1 版　1992年 10 月第 2 次印刷

印数　3001～5500

定价 3.85 元

ISBN 7-304-00444-4/TP·25

前　言

计算机控制系统(或称数字控制系统)是一门新兴的学科,它是在控制理论及计算机,特别是微型机技术迅速发展的基础上形成的,因此,它具有理论性强,涉及知识面广,工程实践性强等特点。学员在学习该课时会遇到较多的困难,为了减少学员的困难,帮助大家较容易地掌握计算机控制系统课的重点、难点,特编写本学习指导。

本书的编写体制与主教材《计算机控制系统》完全一致。前三章为计算机控制系统的理论基础,也是经典自动控制原理的延伸;第四、五章是计算机控制系统的设计基础,在这两章中,除提供了模拟化设计及离散域设计的理论方法之外,还给出了计算机辅助分析及设计的具体方法,读者若有 PC 机或 Apple Ⅱ型计算机,只需再复制几片程序软盘(可与中央电大电气工程系联系),即使不懂得计算机语言,也可用书中教给的步骤自如地分析设计自己的计算机控制系统;第六、七、八章是计算机控制系统的工程实现部分,其中第六章重点叙述了在系统实现中的编排实现方法及量化效应对系统精度及稳定性的影响,第七、八章结合具体系统重点讨论了系统的硬件及软件实现。以使读者对系统工程实现的全过程有所了解。该学习指导中所叙述的内容是《计算机控制系统》课中的重点,希望读者能结合主教材的学习重点掌握。

本书的第一、二、三章由陈忠信编写,第四、五章、附录 1 及附录 2 的实验一、二、三由王醒华编写,第六、七、八章及附录 2 中的实验四由高金源编写,全书由陈忠信统稿。

本书因编写时间不够充分,作者水平有限,不妥和错误之处请读者指正。

编　者

1989年 6 月

目　录

第一章　计算机控制系统概述

1-1　基本要求

（一）了解计算机控制系统的发展概况；

（二）熟悉连续控制系统与计算机控制系统的区别及计算机控制系统的结构特点；

（三）了解计算机控制系统的分类方法及分析设计方法。

1-2　内容提要

（一）计算机控制系统是在计算机本身的迅速发展及自动控制理论飞速发展的基础上发展起来的。开始时主要用于军事中导弹和飞机的控制，以后又在工业过程控制中得到了广泛的应用，并可分为四个发展阶段：五十年代到六十年代初为第一阶段。此时计算机主要用于对系统的参数进行巡回检测及数据处理，此时的计算机控制系统主要是操作指导系统；从六十年代初开始将计算机用于直接数字控制（DDC）；到六十年代末开始了小型计算机控制阶段；七十年代初期进入了微型计算机阶段。

与计算机本身的发展相适应，数字控制理论诸如采样问题、差分方程的求解、变换方法、现代控制理论在计算机控制系统中的应用等理论问题都得到长足的发展。

（二）连续控制系统和计算机控制系统的根本区别是：连续控制系统的控制器是模拟式的它处理的是连续信号。计算机控制系统的控制器是数字机，所处理的信号是数字信号。所以要引入 A/D 及 D/A 变换器，用以完成对模拟信号的接口。

计算机控制系统的主要优点是：

1. 由于计算机的运算速度快，精度高并有丰富易变的逻辑判断功能，所以能实现复杂的控制规律，从而可达到较高的控制质量；

2. 由于计算机具有分时操作的功能，所以一台计算机能代替多台常规控制仪表，控制多个回路，因此控制系统的功能/价格的比值高；

3. 具有很强的灵活性和适应性；

4. 系统中无漂移，抗干扰、抗噪声能力强；

5. 引入微机，特别是单片机后，计算机控制系统的体积大大减小。

（三）计算机控制系统有多种分类方法。按数字机参与控制的方式可分为：计算机巡回检测和数据处理系统；操作指导控制系统；直接数字控制系统（DDC）；计算机监督控制系统（SCC）；计算机分级控制系统；分布控制系统。按控制规律来分，计算机控制系统可分为：程序控制系统；顺序控制系统；PID 调节系统；串级控制系统；前馈控制系统；最优控制系统；自适应控制系统等。

（四）计算机控制系统的分析和设计方法可分为以下两类：

1. 在连续域进行设计；

2. 在离散域直接设计。

这两种设计方法将在第四、第五章详细论述。

第二章　计算机控制系统中的信号

2-1　基本要求

（一）了解计算机控制系统内信号的种类及特性；

（二）弄清信号的采样过程，熟记采样定理；

（三）熟悉信号的恢复条件；

（四）掌握零阶保持器的工作原理，熟记零阶保持器的传递函数；

（五）一般了解模拟信号整量化的概念及方法。

2-2　内容提要

（一）自动控制系统中的信号形式基本上有以下几种：

从时间上来区分有：连续时间信号；离散时间信号。

从信号的幅值表示形式来区分有：幅值模拟信号；幅值离散信号；二进制编码信号。

上述信号之间的变换通常由 D/A 变换器、A/D 变换器、采样/保持(S/H)器来完成。

（二）在离散系统中，要把时间上连续的信号转换成时间上离散的脉冲序列，这种转换过程称为采样过程。为了由采样信号恢复连续信号，对采样周期 T 有一定的限制，这种限制条件就是采样定理。

1. 采样过程

由于 δ 函数具有采样性质，它能把连续函数在某些时刻的值采出来。采样开关闭合一次，相当于在该时刻作用一个单位脉冲，采样开关以 T 为周期闭合，由此形成一个单位脉冲序列，用 $\delta_T(t)$ 表示，则有

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \tag{2-1}$$

采样器输入输出的关系可表示为

$$e^*(t)=e(t)\cdot\delta_T(t)=e(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \tag{2-2}$$

式中　$e(t)$——采样器输入端的连续信号

$e^*(t)$——采样器输出端的时间离散信号

由于 $e(t)$ 只在脉冲发生的时刻 $kT(k=0,1,2,\cdots,\infty)$ 才在输出端有效，并记为 $e(kT)$，称为 $e(t)$ 的采样值，所以可将采样器输出信号 $e^*(t)$ 写成

$$e^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT) \tag{2-3}$$

或

$$e^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT) \tag{2-4}$$

2. 采样信号的复域及频域特性

对(2-4)式作拉氏变换得

$$E^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs} \tag{2-5}$$

$E^*(s)$称为采样信号的离散拉氏变换，可以证明它有两个重要性质：

(1) 若 $L[e^*(t)]=E^*(s)$，则

$$E^*(s+jm\omega_s)=E^*(s) \tag{2-6}$$

式中　ω_s 为采样角频率　$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

$m=\pm1,\pm2,\cdots$

即离散拉氏变换是 T 的周期函数 。

(2) 若离散拉氏变换与拉氏变换的乘积再离散化，则离散拉氏变换可以从离散符号中提取出来，即

$$[E^*(s)\cdot G(s)]^*=E^*(s)\cdot[G(s)]^*=E^*(s)\cdot G^*(s) \tag{2-7}$$

对于稳定的系统，采样信号 $e^*(t)$的拉氏变换式 $E^*(s)$ 的全部极点均在 S 平面的左半部，故可用 $j\omega$ 代替 $E^*(s)$中的 S，可得 $e^*(t)$的富氏变换式

$$E^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E(j\omega+jn\omega_s) \tag{2-8}$$

式中 $E(j\omega)$是连续信号 $e(t)$的富氏变换，即连续信号 $e(t)$的频谱，$E^*(j\omega)$ 是采样信号 $e^*(t)$的频谱。

由(2-8)式明显看到，当 $n=0$ 时

$$E^*(j\omega)\big|_{n=0}=\frac{1}{T}E(j\omega) \tag{2-9}$$

称为离散频谱的主频谱。

当 $n\neq0$ 时，派生出以 ω_s 为周期的高频分量(参看教材图 2-19)。

为了使 $n=0$ 项的原信号频谱 $E(j\omega)$不发生畸变，需使采样频率 ω_s 足够高，以便拉开各派生副频谱之间的距离，使其彼此间不相重叠。相邻两频谱的不重合的条件是 $\omega_s\geqslant2\omega_{\max}$(这里 $\omega_{\max}$ 是原信号频谱的最高有效角频率)。反之，当 $\omega_s<2\omega_{\max}$ 时就会发生混叠现象。

3. 采样定理

如果一个信号不包含高于 $\omega_{\max}$ 的频率分量，那么就完全可以用周期为 $T<\pi/\omega_{\max}$ 的均匀采样值来描述。

另一叙述方法是：若对一个具有有限频谱($|\omega|<\omega_{\max}$)的连续信号 $e(t)$进行采样，当采样频率满足

$$\omega_s\geqslant2\omega_{\max}$$

时，则采样信号 $e^*(t)$能无失真地恢复到原来的连续信号 $e(t)$。$\omega_{\max}$ 为信号 $e(t)$的频谱的最高有效频率，ω_s 为采样频率。

4. 信号恢复的条件

(1) 原信号的频谱 $E(j\omega)$ 必须是有限频谱，即 $\omega_{max}<\infty$；

(2) 满足采样定理，即 $\omega_s \geqslant 2\omega_{max}$；

(3) 必须用理想低通滤波器滤掉 $E^*(j\omega)$ 中的所有派生副频谱分量。

但上述三个条件都难以实现，因此只能近似恢复，为此需在系统中引入前置滤波器及后置滤波器、零阶保持器。

5. 零阶保持器

零阶保持器的方程为

$$e_k(t)=e(kT) \qquad kT\leqslant t<(k+1)T \tag{2-10}$$

可知零阶保持器是把前一采样时刻 kT 的采样值 $e(kT)$ 恒定不变地保持到下一采样时刻 $(k+1)T$。

零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{2-11}$$

在(2-11)式中用 $j\omega$ 代替 s，则可得到零阶保持器的频率特性

$$G_h(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \tag{2-12}$$

应用欧拉方程，上式可化为

$$G_h(j\omega)=\frac{2\pi}{\omega_s}\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)}e^{-j(\pi\omega/\omega_s)} \tag{2-13}$$

由(2-13)式可得零阶保持器的幅频特性

$$|G_h(j\omega)|=T\left|\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right|=\frac{2\pi}{\omega_s}\left|\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega_s/\omega_s}\right| \tag{2-14}$$

及相频特性

$$\theta_h(\omega)=-\pi\omega/\omega_s+\angle\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)} \tag{2-15}$$

式中

$$\angle\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{(\pi\omega/\omega_s)}=\begin{cases}0, & 2n\omega_s<\omega<(2n+1)\omega_s\\ \pi, & (2n+1)\omega_s<\omega<2(n+1)\omega_s\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

共频率特性参看教材图 2-30。

第三章　计算机控制系统的数学描述和分析方法

3-1　基本要求

（一）正确理解 z 变换的定义，熟习 z 变换及 z 反变换的计算方法，熟记典型函数的 z 变换式，正确理解和运用 z 变换的基本定理。

（二）了解线性定常差分方程的迭代解法，熟练掌握运用 z 变换求解线性定常差分方程的方法。

（三）正确理解脉冲传递函数的定义，熟悉脉冲传递函数的推导步骤，熟练掌握由离散系统动态结构图求系统脉冲传递函数的方法。

（四）正确理解 s 平面和 z 平面的映射关系。正确理解离散系统稳定性定义及稳定条件。正确理解朱利-阿斯特隆姆稳定判据及修正劳斯稳定判据的条件，并能熟练地运用判据判别离散系统的稳定性。

（五）正确理解单位阶跃函数作用下系统的性能指标。熟练掌握计算离散系统采样时刻稳态误差的方法。

（六）正确理解离散系统频率特性的物理意义、定义及其数学本质。

3-2　内容提要及例题分析

一、采样信号的 z 变换

（一）内容提要

1. z 变换的定义

z 变换可以看作是拉氏变换的特殊形式。所以，可由拉氏变换引出 z 变换定义。

将连续信号 $e(t)$ 通过采样周期为 T 的理想采样器可得采样信号 $e^*(t)$，其表达式为

$$e^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT)$$

$$=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+e(2T)\delta(t-2T)+\cdots \tag{3-1}$$

将(3-1)式作拉氏变换得

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=e(0)+e(T)e^{-Ts}+e(2T)e^{-2Ts}=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs} \tag{3-2}$$

引入复变量 z

$$z=e^{Ts} \tag{3-3}$$

由此式解出 s 得

$$s=\frac{1}{T}\ln z \tag{3-4}$$

将(3-3)，(3-4)代入(3-2)式得

$$E^*[s=\frac{1}{T}\ln z]=E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)z^{-k} \tag{3-5}$$

(3-5)式即是 z 变换的定义式，称 $E(z)$ 为 $e^*(t)$ 的 z 变换，记作

$$Z[e^*(t)]=E(z)$$

由于 z 变换是拉氏变换的特殊形式，所以一般能进行拉氏变换的任何函数 $e(t)$ 都有 z 变换。

2. z 变换的计算方法

求任意函数 $e(t)$ 的 z 变换，通常分为三步进行：

(1) $e(t)$ 经理想采样器采样，给出 $e^*(t)$；

(2) 求 $e^*(t)$ 的拉氏变换，给出

$$E^*(S)=L[e^*(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs}$$

(3)在 $E^*(s)$ 中用 z 替换 e^{Ts}，给出

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)z^{-k}$$

该式是无穷级数，当级数收敛时，可求出等价的封闭函数式。

计算 z 变换，通常用以下三种方法：

(1) 级数求和法。即根据 z 变换的定义式(3-5)求函数的 z 变换。

(2) 部分分式展开法

当已知时间函数 $e(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$ 时，求其 z 变换，用部分分式展开法比较方便。

设连续时间函数 $e(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$ 为有理分式

$$E(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \tag{3-6}$$

当 $E(s)$ 没有重根时，可展开成部分分式之和

$$E(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(s-s_i)} \tag{3-7}$$

式中

s_i——拉氏变换 $E(s)$ 的极点，$N(s)$ 的零点，当 $N(s)$ 已分解成因式乘积时，

$$A_i=(s-s_i)\frac{M(s)}{N(s)}\Big|_{s=s_i} \tag{3-8}$$

当 $N(s)$ 未分解成因式乘积时

$$A_i=\frac{M(s)}{\dot{N}(s)}\Big|_{s=s_i} \tag{3-9}$$

式中 $\dot{N}(s)$ 是 $N(s)$ 对 s 的导数。

与 $A_i/(s-s_i)$ 项对应的 z 变换为

$$A_i/(1-e^{s_iT}z^{-1})=A_iz/(z-e^{s_iT}) \tag{3-10}$$

因此，函数 $e(t)$ 的 z 变换为

$$E(z)=z[E(s)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(1-e^{s_iT}z^{-1})}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_iz}{(z-e^{s_iT})} \tag{3-11}$$

这里需要注意的是不能直接在 $E(s)$ 中将 $s=\frac{1}{T}\ln z$ 代入，从而得到 $E(z)$，因为 z 变换是对连续信号采样后进行变换的。

当将较复杂的拉氏变换式 $E(s)$ 分解成部分分式后，即可通过查表直接得到每个简单分式所对应的 z 变换式，再求和即得 $E(z)$。

(3) 留数计算法

假如已知连续时间函数 $e(t)$ 的拉氏变换式 $E(s)$ 的全部极点 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 则

$$E(z)=\sum_{i=1}^{n}\left[E(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]\text{的留数}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\cdot\frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}_{s=s_i} \tag{3-12}$$

式中

r_i——极点 $s=s_i$ 的重数；

3. z 变换的基本定理

(1) 线性定理

如果 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 有 z 变换 $E_1(z)$，$E_2(z)$，且有常数 a_1 和 a_2，则

$$Z[a_1e_1(t)\pm a_2e_2(t)]=a_1E_1(z)+a_2E_2(z) \tag{3-13}$$

(2) 实域位移定理

a. 右位移(延迟)定理

若 $Z[e(t)]=E(z)$，则

$$Z[e(t-nT)]=z^{-n}E(z) \tag{3-14}$$

式中 n 是正整数。

b. 左位移(超前)定理

若 $Z[e(t)]=E(z)$，则

$$Z[e(t+nT)]=z^n[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(kT)z^{-k}] \tag{3-15}$$

当 $e(0)=e(T)=e(2T)=\cdots=e[(n-1)T]=0$ 时(即在零初始条件下)，则

$$Z[e(t+nT)]=z^nE(z) \tag{3-16}$$

在离散系统中，通过实域位移定理，可把描述线性定常离散系统的差分方程转换为 z 域的代数方程。

当 $n=1$ 时，(3-14)和(3-15)式成为

$$Z[e(t-T)]=z^{-1}E(z) \tag{3-17}$$

$$Z[e(t+T)]=z[E(z)-e(0)] \tag{3-18}$$

(3) 复域位移定理

如果 $e(t)$ 的 z 变换是 $E(z)$，则

$$Z[e^{\mp at}e(t)]=E(ze^{\pm aT}) \tag{3-19}$$

式中 a 是常数。

(4) 初值定理

如果 $e(t)$ 的 z 变换为 $E(z)$，并存在极限

$$\lim_{z\to\infty}E(z),$$

则

$$\lim_{k\to 0}e(kT)=\lim_{z\to\infty}E(z) \tag{3-20}$$

或写作

$$e(0)=\lim_{z\to\infty}E(z) \tag{3-21}$$

(5) 终值定理

假定函数 $e(t)$ 有 z 变换 $E(z)$，并假定函数 $(1-z^{-1})E(z)$ 在 z 平面的单位圆上或圆外没有极点，则

$$\lim_{k\to\infty}e(kT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z) \tag{3-22}$$

终值定理的另一种常用形式是

$$\lim_{k\to\infty}e(kT)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \tag{3-22}$$

(6) z 域微分定理

如果 $Z[e(t)]=E(z)$，则

$$Z[t\cdot e(t)]=-Tz\frac{dE(z)}{dz} \tag{3-23}$$

(7) z 域积分定理

如果 $Z[e(t)]=E(z)$，则

$$Z\left[\frac{e(t)}{t}\right]=\int_z^{\infty}\frac{E(w)}{Tw}dw+\lim_{k\to 0}\frac{e(kT)}{kT} \tag{3-24}$$

(8) 实域卷积定理

如果函数 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 有 z 变换 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$，并且当 $t<0$ 时 $e_1(t)=e_2(t)=0$，则采样函数 $e_1^*(t)$ 与 $e_2^*(t)$ 的卷积

$$e_1^*(t)*e_2^*(t)=\sum_{n=0}^{k}e_1(nT)\cdot e_2(kT-nT)$$

的 z 变换为

$$Z[e_1^*(t)*e_2^*(t)]=E_1(z)\cdot E_2(z) \tag{3-25}$$

利用上述 z 变换的计算方法及 z 变换的基本定理可计算出大量的时间函数对应的 z 变换式供查用。

4. z 反变换

与 z 变换相对应的脉冲序列，称为该 z 变换的反变换，并表示成

$$Z^{-1}[E(z)]=e^*(t) \tag{3-26}$$

或

$$Z^{-1}[E(z)]=e(kT)\delta_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT) \tag{3-27}$$

这里需要特别指出的是，z 变换对应的脉冲序列是唯一的，但 z 变换对应的连续时间函数不是唯一的，因为具有相同采样值 $e(kT)$ 的连续时间函数不是唯一的。因此，即使已知一个连续函数的 z 变换，也不能直接求出原函数，得到的仅是原函数在离散时刻 $kT(k=0,1,2,\cdots)$ 的离散函数值。

通常，求 z 反变换有三种方法：部分分式展开法；综合除法（幂级数法）和留数计算法。

(1) 部分分式展开法

设 $E(z)$ 是 z 的有理分式

$$E(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

式中 $m\leqslant n$

假定 $E(z)$ 的极点都是一阶非重极点，则

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n} \tag{3-28}$$

式中

$z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $E(z)$ 的极点，系数 A_i 由下式给出

$$A_i=(z-z_i)\frac{E(z)}{z}\bigg|_{z=z_i},\ i=1,2,\cdots,n \tag{3-29}$$

在(3-28)式两端同乘 z 得

$$\begin{aligned}E(z)&=\frac{A_1z}{z-z_1}+\frac{A_2z}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_nz}{z-z_n}\\&=\frac{A_1}{1-z_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_n}{1-z_nz^{-1}}\end{aligned} \tag{3-30}$$

查 z 变换表得 $E(z)$ 的每一项的 z 反变换，得到

$$e(kT)=A_1z_1^k+A_2z_2^k+\cdots+A_nz_n^k=\sum_{i=1}^{n}A_iz_i^k \tag{3-31}$$

由此得

$$e^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}A_iz_i^k\right)\delta(t-kT) \tag{3-32}$$

(2) 综合除法（幂级数法）

设 $E(z)$ 是 z 的有理分式

$$E(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\quad m\leqslant n$$

将分子分母多项式按 z 的降幂排列后直接相除得

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots \tag{3-33}$$

由(3-33)式即可得到 $e(kT),k=0,1,2,\cdots$，从而得到 $E(z)$ 的反变换脉冲序列 $e^*(t)$

$$e^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT) \tag{3-34}$$

综合除法与部分分式展开法的区别是后者给出 $e(kT)$ 的闭合式，而前者通常给出的是无限数列。

(3) 留数计算法

设$E(z)$是$e(t)$的z变换，则

$$e(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}E(z)z^{k-1}dz \tag{3-35}$$
$$=\Sigma[E(z)\cdot z^{k-1}\text{在}\Gamma\text{内极点的留数}]$$

或写做

$$e(kT)=\sum_{i=1}^{n}Res[E(z)\cdot z^{k-1}] \tag{3-36}$$

式中n是$E(z)\cdot z^{k-1}$的极点数。

（二）例题分析

例3-1 求下列函数的z变换

(1) $e(t)=\cos\omega t$;

(2) $e(t)=a^t$

解 (1) 由z变换的定义式(3-5)得

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\cos\omega kTz^{-k}$$

对该式应用欧拉方程

$$\cos\omega kT=\frac{e^{j\omega kT}+e^{-j\omega kT}}{2},$$

得

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{j\omega kT}+e^{-j\omega kT}}{2}z^{-k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{j\omega kT}z^{-k}+e^{-j\omega kT}z^{-k})$$

该式中

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\omega kT}z^{-k}=1+e^{j\omega T}z^{-1}+e^{j2\omega T}z^{-2}+\cdots$$

这是公比为$e^{j\omega T}z^{-1}$的等比级数，当$|e^{j\omega T}z^{-1}|<1$时级数收敛，根据等比级数求和公式得

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\omega kT}z^{-k}=\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{j\omega T}}$$

同理可得，当$|e^{-j\omega kT}z^{-1}|<1$时

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-j\omega kT}z^{-k}=\frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}$$

由此

$$E(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}}+\frac{z}{1-e^{-j\omega T}}\right)$$

将$e^{j\omega T}=\cos\omega T+j\sin\omega T$和$e^{-j\omega T}=\cos\omega T-j\sin\omega T$代入上式，整理后得

$$E(z)=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

(2) 将$e(t)=a^t$离散化成$e(kT)=a^{kT}$并代入z变换定义式(3-5)得

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{kT}\cdot z^{-k}=1+a^{T}z^{-1}+a^{2T}z^{-2}+\cdots$$

当$|a^Tz^{-1}|<1$时上面等比级数收敛，求和后得

$$E(z)=\frac{1}{1-a^Tz^{-1}}=\frac{z}{z-a^T}$$

例 3-2 求下列函数的 z 变换

(1) $e(t)=t\cdot 1(t-T)$;

(2) $e(t)=e^{-at}\cos\omega t$.

解 (1) $e=t\cdot 1(t-T)$，已知

$$z[1(t)]=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

根据延迟定理

$$z[1(t-T)]=z^{-1}Z[1(t)]=z^{-1}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}$$

根据 z 域微分定理(3-23)得

$$z[t\cdot 1(t-T)]=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)=-Tz\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

(2) $e(t)=e^{-at}\cos\omega t$

已知

$$z(\cos\omega t)=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

根据复数位移定理(3-19)式，将上式中的 z 用 ze^{aT} 代替即得

$$z[e^{-at}\cos\omega t]=\frac{ze^{aT}(ze^{aT}-\cos\omega t)}{z^2e^{2aT}-2ze^{aT}\cos\omega T+1}=\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$$

例 3-3 求下列拉氏变换式的 z 变换

(1) $E(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$; (2) $E(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}$

(3) $E(s)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

解 (1) $E(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

将该式分解成部分分式

$$E(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s+1}$$

其中

$$A_1=\frac{d}{ds}[s^2E(s)]\Big|_{s=0}=\frac{-1}{(s+1)^2}\Big|_{s=0}=-1;$$

$$A_2=[s^2E(s)]\Big|_{s=0}=\frac{1}{s+1}\Big|_{s=0}=1;$$

$$A_3=[(s+1)E(s)]_{s=-1}=\frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1}=1$$

由此得到

$$E(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

查 z 变换表得

$$E(z)=Z[E(s)]=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$=\frac{(T+e^{-T}-1)z^{-1}+(1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-T}z^{-1})}$$

(2) $E(s)=\frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2(s+1)}(1-e^{-s})$

$$E(z)=Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}(1-e^{-s})\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$=\frac{(1-z^{-1})[(T+e^{-T}-1)z^{-1}+(1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}]}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-T}z^{-1})}$$

$$=\frac{(T+e^{-T}-1)z^{-1}+(1-e^{-T}-Te^{-1})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

(3) $E(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$，将其展开成部分分式

$$E(s)=\frac{a}{(s+ja)(s-ja)}=\frac{-1/2j}{s+ja}+\frac{1/2j}{s-ja}$$

$1/(s\pm ja)$的原函数为 $e^{-(\pm ja)t}$，根据指数函数 z 变换的求法，

$$Z(e^{-(\pm ja)t}]=1/(1-e^{-(\pm ja)T})z^{-1},$$

所以

$$E(z)=Z\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=-\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-e^{-jaT}z^{-1}}+\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1-e^{jaT}z^{-1}}=\frac{z^{-1}\sin aT}{1-2z^{-1}\cos aT+z^{-2}}.$$

例 3-4 已知 $E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$试求其反变换脉冲序列

解 当已知 $E(z)$时，有三种方法求其反变换脉冲序列 $e^*(t)$

解法 1 部分分式展开法，由(3-28)式得

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{A_1}{(z-1)}+\frac{A_2}{(z-2)}$$

式中

$$A_1=\left[(z-1)\frac{10}{(z-1)(z-2)}\right]\bigg|_{z=1}=-10;$$

$$A_2=\left[(z-2)\frac{10}{(z-1)(z-2)}\right]\bigg|_{z=2}=10.$$

所以

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

或

$$E(z)=\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}$$

查 z 变换表得

$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=1$；$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]=2^k$，由(3-31)得