



北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

实变函数 与 泛函分析

郭懋正 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

3

北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

实变函数与泛函分析

郭懋正 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/郭懋正编著. —北京:北京大学出版社,
2005. 2

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-07857-9

I. 实… II. 郭… III. ①实变函数-高等学校-教材 ②泛函分析-
高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002759 号

书 名: 实变函数与泛函分析

著作责任者: 郭懋正 编著

责任编辑: 邱淑清

标准书号: ISBN 7-301-07857-9/O · 0612

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890 mm×1240 mm A5 13.25 印张 337 千字

2005年2月第1版 2005年2月第1次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 20.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

名誉主编：姜伯驹

主 编：张继平

副 主 编：李 忠

编 委：(按姓氏笔画为序)

王长平 刘张炬 陈大岳 何书元

张平文 郑志明

编委会秘书：方新贵

责任编辑：刘 勇

内 容 简 介

本书是为大学非基础数学专业“实变函数与泛函分析”课程编写的教材。它的先修课程是数学分析或物理类的高等数学。全书共分 6 章, 内容包括: 集合, 欧氏空间, Lebesgue 测度, Lebesgue 可测函数, Lebesgue 积分, 测度空间, 测度空间上的可测函数和积分, L^p 空间, L^2 空间, 卷积与 Fourier 变换, Hilbert 空间理论, Hilbert 空间上的有界线性算子, Banach 空间, Banach 空间上的有界线性算子, Banach 空间上的连续线性泛函、共轭空间与共轭算子, Banach 空间的收敛性与紧致性。

本书在选材上注重了少而精, 突出重点, 并充分地反映了实变函数论与泛函分析中的核心内容; 在内容的处理上, 体现了由浅入深, 循序渐进的原则; 在介绍新理论的同时, 既阐明它的背景, 又介绍它与前面的理论间的联系; 在叙述表达上, 严谨精练, 清晰易读, 便于教学与自学。为便于读者复习、巩固、理解和拓广所学知识, 每节后配置了丰富的习题。为了使书中的内容成为自封闭的, 特编了四节附录附在正文之后, 这样本书中所有的定理都给出严格的数学证明。书末附有部分习题的参考解答或提示。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范院校应用数学、计算数学、统计学、物理学等专业, 以及与金融数学相关学科的本科生教材或教学参考书, 也可供从事数学或物理研究的科技人员参考。

作 者 简 介

郭懋正 北京大学数学科学学院教授、博士生导师。1984 年在美国纽约大学柯朗研究所获博士学位。主要研究方向是数学物理、随机过程和算子代数。已出版著作: 与张恭庆合著《泛函分析讲义》(下册), 并于 1992 年获第二届普通高等学校优秀教材全国优秀奖。

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相配合,我们进行了有组织的教材建设,计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材,这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我們新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前 言

实变函数与泛函分析这两门课程是进入现代数学的门槛。我在 20 世纪 60 年代上大学时，实变函数已是数学系本科生高年级的必修课，但是泛函分析只是函数论专业学生的专业必修课。当时的教材相当缺乏，主要的参考书是翻译的俄文教材或专著。

1978 年恢复高考以来，泛函分析课开始成为北京大学数学系本科生的一门必修课。这一方面因为这门课程的重要性，另一方面是因为在北京大学数学系这门课程已经十分成熟，完全有能力开好，而且相关教材的建设也取得很大成绩。周民强先生编著的《实变函数》，张恭庆与林源渠先生编著的《泛函分析讲义》上册分别于 1985 年和 1987 年出版。这两本教材编得非常成功，获得很高的评价。此外，许多好的英文教材相继影印出版；国内许多大学也出版了不少实变函数教材与泛函分析教材，有些是非常优秀的，有很大的影响。总之实变函数与泛函分析这两门课程的建设相当成熟。那么为什么还要在北京大学开设称之为“实变函数与泛函分析”的一学期的课程呢？

事实上教育事业一直处于不断的改革之中，北京大学数学系教学工作也在不断的改革中前进，关心和发展应用数学始终是改革的一个重要议题。早在 20 世纪 80 年代北京大学数学系就增设了信息专业；1995 年成立数学学院时又增设了金融数学专业。根据“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的方针，本科生教育增加了计算机方面的课程，还添设了数学模型课等。由于学制是四年，尽管泛函分析课仍是基础数学、计算数学和概率论的专业必修课，但是一些应用学科的专业已经不可能再安排一学期的泛函分析课。然而无论是金融数

学还是信息学科，乃至物理学科各专业的本科生应当有一些泛函分析的训练，这是大家的共识。于是就提出开设一学期的实变函数与泛函分析课的要求。应领导的安排我在两年前开始考虑设计这门课。

实变函数与泛函分析已经是相当成熟的课程，其内容已经高度浓缩，它们所涵盖的理论和内容都是十分基本的或者是十分重要的。现在有许多优秀的中文教材和外文教材，要编写有新意的教材无疑是一桩难题，更何况要将一学年的课程压缩成一学期的课程，这样的教材就更难编写了。于是我考察对比了十多种优秀教材，反复思考应当保留什么？也就是应当舍去什么？结果发现这样根本无法进行下去，因为许多精彩的理论同时也是重要的理论都很难将其砍掉。于是我决定改变思路，先确定这门课的主线。这门课程的一条线是：欧氏空间—Lebesgue 平方可积函数空间—Hilbert 空间；与此同时还有平行的另一条线：欧氏空间— p 次 Lebesgue 可积函数空间—Banach 空间，前者是后者的特例。这两条线可以有合有分，有机地揉在一起而组成这门课的主线。以主线为纲，纲举目张，就可以添枝加叶了。

作者编写这本教材，力求通过一学期课程的讲授，使学生了解 Banach 空间中拓扑现象的描述和它代表的内涵，了解无穷维 Banach 空间与有穷维欧氏空间的对比及其异同，并使学生了解 p 次 Lebesgue 可积函数空间的理论即是理解以上思想的纽结和穴位。作者在组织内容方面力求做到由浅入深，由点到面，循序渐进的原则；在叙述表达上力求清晰易读，便于教学和阅读。为了使得教材精练，还将一些重要定理的证明放在书末的附录里以便读者自学。尽管做了许多努力正文部分仍有 300 余页，内容似乎还是多了一些，建议教员在讲授时不要每个定理都证明，应当选取适当材料留给学生阅读，比如抽象测度空间理论，包括测度空间上的可测函数、可积函数等，以培养学生的自学能力。对于教学而言，这是建设一门新课程；对于作者而言，这是

编写新讲义，是初次的尝试，疏漏与不足之处在所难免，热诚欢迎读者批评指正。

本书的写作得到北京大学数学科学学院和北京大学出版社的大力支持，作者对他们表示衷心的感谢。本书的写作还得到北京市高等教育精品教材建设项目的资助，作者对此表示衷心的感谢。本书责任编辑邱淑清女士是我的师长，她为本书的出版倾注了很多心血，做了大量辛勤的工作，作者对她表示衷心的感谢。

郭懋正

2003年12月于燕园

北京大学出版社数学重点教材书目

1. 北京大学数学教学系列丛书

书 名	编著者	定价 (元)
高等代数简明教程(上、下)(北京市精品教材) (教育部“十五”规划教材)	蓝以中	32.00
实变函数与泛函分析(北京市精品教材)	郭懋正	20.00
复分析导引(北京市精品教材)	李 忠	20.00
黎曼几何引论(上下册)	陈维桓 李兴校	42.00
金融数学引论	吴 岚	20.00
寿险精算基础	杨静平	17.00
二阶抛物型偏微分方程	陈亚浙	16.00
普通统计学(北京市精品教材)	谢衷洁	25.00
数字信号处理(北京市精品教材)	程乾生	20.00
抽样调查(北京市精品教材)	孙山泽	13.50
测度论与概率论基础(北京市精品教材)	程士宏	15.00
应用时间序列分析(北京市精品教材)	何书元	16.00
应用多元统计分析	高惠璇	21.00

2. 大学生基础课教材

书 名	编著者	定价 (元)
数学分析新讲(第一册)(第二册)(第三册)	张筑生	44.50
数学分析解题指南	林源渠 方企勤	20.00
高等数学(上下册)(教育部“十五”国家级规划教材,教育部 2002 优秀教材一等奖)	李 忠 周建莹	52.00
高等数学(物理类)(修订版)(第一、二、三册)	文 丽等	57.00
高等数学(生化医农类)上册(修订版)	周建莹 张锦炎	13.50
高等数学(生化医农类)下册(修订版)	张锦炎 周建莹	13.50
高等数学解题指南	周建莹 李正元	25.00

书 名	编著者	定价 (元)
高等数学解题指导(上下册)(工科类)	李静主编	38.00
大学文科基础数学(第一册)(第二册)	姚孟臣	27.50
大学文科数学简明教程(上下册)	姚孟臣	30.00
数学的思想、方法和应用(修订版) (北京市精品教材)(教育部“九五”重点教材)	张顺燕	24.00
数学的美与理(教育部“十五”国家级规划教材)	张顺燕	26.00
简明线性代数(理工、师范、财经类)	丘维声	16.00
线性代数解题指南(理工、师范、财经类)	丘维声	15.00
线性代数解题指导(工科类)	王中良	16.50
解析几何(第二版)	丘维声	15.00
解析几何(教育部“九五”重点教材)	尤承业	15.00
微分几何初步(95 教育部优秀教材一等奖)	陈维桓	12.00
基础拓扑学讲义	尤承业	13.50
初等数论(第二版)(95 教育部优秀教材二等奖)	潘承洞 潘承彪	25.00
简明数论	潘承洞 潘承彪	14.50
实变函数论(教育部“九五”重点教材)	周民强	16.00
复变函数教程	方企勤	13.50
傅里叶分析及其应用	潘文杰	13.00
泛函分析讲义(上册)(91 国优教材)	张恭庆 林源渠	11.00
泛函分析讲义(下册)(91 国优教材)	张恭庆 郭懋正	12.00
数值线性代数(教育部 2002 优秀教材二等奖)	徐树方等	13.00
现代数值计算方法	肖筱南等	15.00
数值计算方法与上机实习指导	肖筱南等	15.00
数学模型讲义(教育部“九五”重点教材,获二等奖)	雷功炎	15.00
普通统计学简明教程(附 TI 电脑指令与程序)	谢衷洁	25.00
新编概率论与数理统计(获省部级优秀教材奖)	肖筱南等	19.00
概率论与数理统计解题指导(工科类)	李寿梅等	13.00

邮购说明 读者如购买北京大学出版社出版的数学重点教材,请将书款(另加 15% 邮挂费)汇至:北京大学出版社北大书店邢丽华同志收,邮政编码:100871,联系电话:(010)62752015,(010)62757515。款到立即用挂号邮书。

北京大学出版社
2004 年 10 月

目 录

第一章 集合与运算	1
§ 1.1 集合及其运算	1
§ 1.1.1 集合及其运算	1
§ 1.1.2 上极限与下极限	8
习题	13
§ 1.2 映射	14
§ 1.2.1 映射	14
§ 1.2.2 势	18
习题	25
§ 1.3 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n	27
§ 1.3.1 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n	27
§ 1.3.2 闭集、开集和 Borel 集	31
§ 1.3.3 开集的结构, 连续性	34
§ 1.3.4 n 维点集连续性的基本定理	38
习题	42
第二章 Lebesgue 测度	45
§ 2.1 Lebesgue 外测度与可测集	45
§ 2.1.1 外测度	45
§ 2.1.2 Lebesgue 可测集	49
§ 2.1.3 测度空间	57
习题	60
§ 2.2 Lebesgue 可测函数	63
§ 2.2.1 Lebesgue 可测函数	64

§ 2.2.2	可测函数的基本性质	67
§ 2.2.3	测度空间上的可测函数和性质	72
习题	74
§ 2.3	Lebesgue 可测函数列的收敛性	76
§ 2.3.1	可测函数列的几乎一致收敛与几乎处处收敛性	77
§ 2.3.2	可测函数列的依测度收敛性	79
§ 2.3.3	可测函数与连续函数	83
§ 2.3.4	测度空间上可测函数的收敛性	86
习题	87
第三章	Lebesgue 积分	91
§ 3.1	Lebesgue 可测函数的积分	91
§ 3.1.1	非负可测函数的积分	92
§ 3.1.2	一般可测函数的积分	98
§ 3.1.3	黎曼积分与 Lebesgue 积分的关系	104
§ 3.1.4	测度空间上可测函数的积分	107
习题	110
§ 3.2	Lebesgue 积分的极限定理	115
§ 3.2.1	Lebesgue 积分与极限运算的交换定理	115
§ 3.2.2	黎曼可积性的刻画	124
§ 3.2.3	$L(X, \mathcal{F}, \mu)$ 中积分的极限定理	127
习题	129
§ 3.3	重积分与累次积分	133
§ 3.3.1	Fubini 定理	133
§ 3.3.2	测度空间上的重积分与累次积分	144
习题	148
第四章	L^p 空间	151
§ 4.1	L^p 空间	152

§ 4.1.1	L^p 空间的定义	152
§ 4.1.2	L^p 空间的性质	158
§ 4.1.3	L^p 空间的完备性	161
§ 4.1.4	L^p 空间的可分性	163
	习题	168
§ 4.2	L^2 空间	172
§ 4.2.1	L^2 空间的内积	172
§ 4.2.2	L^2 空间的性质	173
	习题	184
§ 4.3	卷积与 Fourier 变换	188
§ 4.3.1	卷积	191
§ 4.3.2	$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换	197
	习题	206
第五章	Hilbert 空间理论	209
§ 5.1	距离空间	210
§ 5.1.1	距离空间定义和完备化	210
§ 5.1.2	列紧性与可分性	213
§ 5.1.3	连续映射与压缩映射原理	218
	习题	222
§ 5.2	Hilbert 空间理论	226
§ 5.2.1	定义	226
§ 5.2.2	正交性	229
§ 5.2.3	Riesz 表示定理	236
	习题	239
§ 5.3	Hilbert 空间上的算子	242
§ 5.3.1	线性算子的连续性和有界性	243
§ 5.3.2	共轭算子	247
§ 5.3.3	投影算子	253

习题	255
§ 5.4 Hilbert 空间上的紧算子	259
§ 5.4.1 紧算子定义	259
§ 5.4.2 Fredholm 理论, 紧算子的谱	263
§ 5.4.3 Hilbert-Schmidt 理论	268
习题	273
第六章 Banach 空间	276
§ 6.1 Banach 空间	276
§ 6.1.1 Banach 空间定义	276
§ 6.1.2 线性赋范空间上的模等价	279
§ 6.1.3 有界线性算子	283
习题	286
§ 6.2 Banach 空间上的有界线性算子	289
§ 6.2.1 逆算子定理	289
§ 6.2.2 闭图像定理	291
§ 6.2.3 共鸣定理	293
§ 6.2.4 应用	296
习题	297
§ 6.3 Banach 空间上的连续线性泛函	301
§ 6.3.1 连续线性泛函的存在性	301
§ 6.3.2 共轭空间以及它的表示	306
§ 6.3.3 共轭算子	310
习题	312
§ 6.4 Banach 空间的收敛性和紧致性	316
§ 6.4.1 弱收敛与 * 弱收敛	316
§ 6.4.2 弱列紧性与弱 * 列紧性	320
习题	323

附录 A Zorn 引理与势的序关系	326
附录 B Tietze 扩张定理	331
附录 C 距离空间的完备化	335
附录 D 第一纲集与开映射定理	337
§ D.1 纲与纲定理	337
§ D.2 开映射定理	341
附录 E 部分习题的参考解答或提示	344
参考文献	399
符号集	400
索引	403