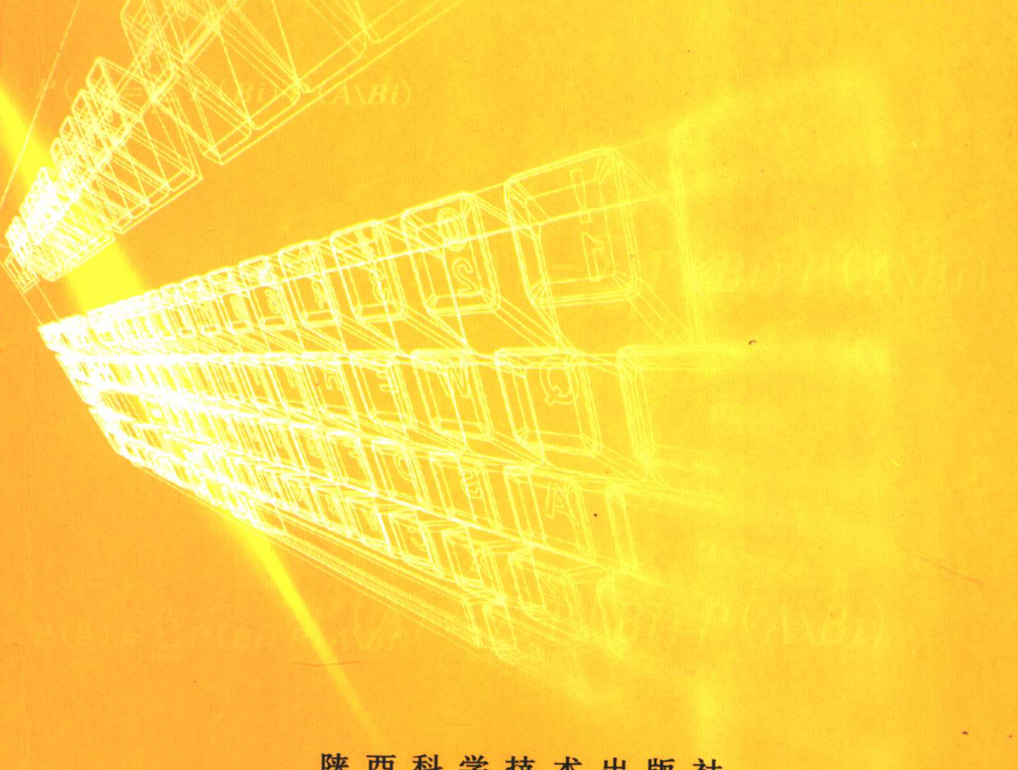
最新版 21世纪高等学校导学与导考教材

概率论与数理统计

解题指导

贺兴时 杨文鹏 杨选良 编



陕西科学技术出版社

最新版21世纪高等学校导学与导考教材

概率论与数理统计解题指导

贺兴时　杨文鹏　杨选良　编

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计解题指导/贺兴时,杨文鹏,杨选良编. -西安:陕西科学技术出版社,2005

ISBN 7-5369-3935-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①贺… ②杨… ③杨… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第053890号

出 版 者 陕西科学技术出版社
西安北大街131号 邮编710003
电话(029)87211894 传真(029)87218236
http://www.snstp.com

发 行 者 陕西科学技术出版社
电话(029)87212206 87260001

印 刷 西安天成印务有限公司

规 格 880mm×1230mm 1/32开本

字 数 353 千字

印 张 9.75

印 数 1~4000册

版 次 2005年7月第1版
2005年7月第1次印刷

定 价 16.00 元

前　言

概率论和数理统计是研究随机现象客观规律的数学学科，是高等院校理工科各专业的一门重要的基础理论课，也是全国硕士研究生入学数学考试的一个重要组成部分。由于概率论和数理统计课程与我们以前学过的数学知识具有极其不同的特点，加之课程学时少、内容多、比较抽象，给初学者带来不少困难。以至于在解题时常常无从下手，解完后又不知正确与否。为了帮助同学们克服概率论和数理统计学习和考研中的困难，较好地掌握这门课程的基本内容，我们组织编写了这本学习指导书。

根据概率论和数理统计课程的基本要求，结合编者多年的教学经验和近几年的硕士研究生入学数学考试中存在的普遍问题，我们精心设计了这本书的内容。各部分的“内容提要”尽量做到了语言精练，重点突出，概括性强，读者通过学习能够迅速掌握该部分所涉及的基本知识。在选题上，着眼于“典型性”和“全面性”。各部分所选的例题和习题具有代表性，覆盖了该部分的主要内容，题目的难度适中，力图做到不仅能使初学者学懂、学透这门课程，而且对报考硕士研究生的人员仍具有一定的帮助。

本书共分八个部分：随机事件和概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检

验。各部分内容都包括内容提要、习题与解答和 1987 ~ 2005 年硕士研究生考试的所有试题分析解答。习题与解答可作为学习和巩固概率论和数理统计的基本知识使用，综合题解和考研题解可作为准备报考硕士研究生的人员的必备资料，也可作为在校大学生融会知识，明确重点，开拓视野和提高解题能力的助手。

参加本书编写工作的有西安工程科技学院贺兴时（完成 1、2、3 部分），杨文鹏（完成 4、5、6 部分），西北大学杨选良（完成 7、8 部分）。由贺兴时完成全书的统稿工作。

本书在编写时，参考了众多的教材和教学参考书，恕不一一指明出处，在这里向有关作者表示衷心感谢。

限于作者水平，书中可能会有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 5 月

目　录

第 1 章

随机事件及其概率

1.1　内容提要

1. 随机试验和随机事件

(1) 随机试验

若试验(观察或实验过程)具有下列特性,则该试验称为随机试验,记为 E.

1) 可以在相同的条件下重复进行;

2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

3) 在一次试验前不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

(2) 基本事件(样本点)

随机试验 E 中,每一个可能出现的结果,称为基本事件(或称样本点),通常用 ω 表示.

(3) 样本空间

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合叫做 E 的基本空间,或称样本空间,记为$\Omega = \Omega(\omega)$.

(4) 随机事件

随机试验 E 的样本空间的子集,即由某些试验结果所组成的集合称为随机事件. 简称事件. 记为 $A,B,\cdots$ 等.

(5) 必然事件与不可能事件

在一定条件下,每次试验中必定发生的事件叫做必然事件,通常记为 Ω. 每次试验中必定不发生的事件叫做不可能事件,记为 $\varnothing$.

为了方便,通常也把它们作为随机事件.

2. 随机事件的关系及其运算

(1) 事件的包含和相等

若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A(或 A 包含于 B),记为 $B \supset A$.

若 $B \supset A$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(2) 事件的和(并)

“事件 A 与 B 至少有一个发生”这一事件称为 A 与 B 的和事件，记为 $A \cup B$.

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记为 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

(3) 事件的积(交)

“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为 A 与 B 的积(交)事件，记为 $A \cap B$ 或 AB.

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记为 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

(4) 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$.

(5) 事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容或互斥.

n 个事件两两互斥，则称这 n 个事件互斥.

注 1) 在试验 E 中，基本事件都是两两互斥；

2) A, B, C 互斥时可将 $A \cup B \cup C$ 记为 $A + B + C$.

(6) 对立事件(或逆事件)

如果事件 A 与 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$，则称 A, B 两事件对立或称两事件互逆. 并称 A 是 B 的逆事件(或对立事件)，或称 B 是 A 的逆事件(或对立事件). 把 A 的逆事件记作 $\bar{A}$.

(7) 事件的运算律及常用的事件间的关系式

1) 事件的运算律

交换律 $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;

结合律 $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$ABC = (AB)C = A(BC)$;

分配律 $A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$;

对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k$, $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$.

2) 常用的事件间的关系式

(i) $\varnothing \subset A \subset \Omega$;

(ii) 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$, $AB = A$;

(iii) $A + \varnothing = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A\varnothing = \varnothing$, $A\Omega = A$;

(iv) $A \subset A \cup B,\quad B \subset A \cup B,\quad A \supset AB,\quad B \supset AB$;

(v) $A \cup B = A + (B - AB) = B + (A - B) = B + A\bar{B}$

$= A + B\bar{A} = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$;

(vi) $\bar{A} = \Omega - A,\quad \bar{\bar{A}} = A,\quad A - B = A\bar{B} = A - AB$.

3. 概率的定义

对于一个随机事件 A 发生的可能性的大小，用一个数 $P(A)$ 来表示，这个数通常称为随机事件 A 的概率，简称为事件 A 的概率.

(1) 概率的统计定义

频率　设事件 A 在 m 次试验中出现 n 次，比值 $f(A) = \dfrac{n}{m}$ 叫做事件 A 在这 m 次试验中出现的频率.

概率的统计定义　在不变的一组条件下，重复作 m 次试验，若事件 A 发生的频率 $\dfrac{n}{m}$ 随着试验次数 m 的增大，稳定地在区间 $[0,1]$ 上的某个常数 p 附近摆动，且 m 越大，摆动的幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 即 $P(A) = p$.

(2) 古典概型及概率的古典定义

古典概型　具有下述两个特点的随机试验模型，称为古典概型，这两个特点是

1) 所有的基本事件为有限多个，即样本空间是有限集合.

2) 每一个基本事件发生的可能性相等.

概率的古典定义　在古典概型中，若基本事件数为 n，而事件 A 包含了其中 m 个基本事件，则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{有利于事件 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

(3) 概率的几何定义

如果试验的所有可能结果为无限多个，每个试验结果出现的可能性相等，古典定义就不适用，这时借助于几何上的度量（比如面积）来合理地规定的概率，称为概率的几何定义.

设有一可度量的区域 G（这个区域可以是直线区域，也可以是平面区域或空间区域），向域内任意投一点，此点落于 G 内任一位置是等可能的，且所投点落在 G 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则称这个随机试验为几何概率型. 若有利于事件 A 的 G 中的部分区域为 g，则

$$P(A) = \frac{g \text{ 的几何度量}}{G \text{ 的几何度量}}.$$

（4）概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是样本空间，若对于 E 的每一随机事件 A，有确定的实数 $P(A)$ 与之对应且满足下列三条公理：

公理1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

公理2 $P(\Omega) = 1$.

公理3 对于两两互斥的可数多个随机事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

这个定义称为概率的公理化定义.

注　按古典定义，概率的几何定义及统计定义规定的概率都符合这个定义中的要求，因此它们都是这个一般定义范围内的特殊情形.

4. 概率的性质

性质1 设 A 为任一随机事件，则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质2 设 A、B 为两个事件，若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

推论1 若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.

性质3 设有限多个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

习惯上称为概率的加法定理.

性质4 设 A、B 为任意两个随机事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

习惯上称为广义加法定理，可推广：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

推论2 对任意两个随机事件 A、B 有 $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

5. 条件概率，概率的乘法公式

（1）条件概率

设 A、B 为随机试验 E 的两个事件，且 $P(A) > 0$，则称 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

（2）概率的乘法公式

设 A、B 为两个事件，由上述等式可得

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)，当 P(A) > 0.$$

这个公式称为概率的乘法公式．两个事件的概率的乘法公式也可写为

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),\text{当 } P(B)>0.$$

设 A、B、C 为三个事件,且 $P(AB)>0$ 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

6. 事件的独立性

(1) 对二事件 A、B,若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A、B 相互独立,简称独立.(或称 A、B 是统计独立的).

(2) 对于三个事件 A、B、C,若下列三个等式同时成立

$$P(AB)=P(A)P(B),P(BC)=P(B)P(C),P(AC)=P(A)P(C).$$

则称三事件 A、B、C 两两相互独立.

(3) 对于三个事件 A、B、C,若下列四个等式同时成立

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

则称 A、B、C 为相互独立的事件.

(4) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若对于任一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s(2\leqslant s\leqslant n$,每组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 取 $1,2,\cdots,n$ 中 s 个不同的值),等式

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_s})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_s})$$

总成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注　1) 四对事件 A、B;$\overline{A}$、B;A、$\overline{B}$;$\overline{A}$、$\overline{B}$ 之中有一对相互独立,则另外三对也相互独立.

2) 在计算乘积事件的概率时,不是根据上述定义判定事件的独立性,而是根据经验判定了事件的独立性后,再用上述定义简化乘积事件概率的计算.

7. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

设 Ω 为试验 E 的样本空间,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件.若

(1)　$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,

(2)　$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,

则对任一事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),\tag{1}$$

公式(1)称为全概率公式．又若 $P(B)>0$,则有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)} \quad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

公式(2) 称为贝叶斯公式(逆概公式).

8. n 重贝努里(Bernoulli) 试验,二项概率公式

(1)n 重贝努里试验

设试验 E 只有两个可能的结果 A 及 $\bar{A}$,且 $P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p$. $(0 < p < 1)$. 将 E 独立地重复 n 次的试验构成了一个试验,这个试验称为 n 重贝努里试验,简称贝努利试验.

(2) 二项概率公式

设在单次试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,则在 n 重贝努里试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p, k = 0,1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

公式(3) 称为二项概率公式.

(3) 泊松定理

在 n 重贝努里试验中,有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$,当 n 充分大时,$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$,其中 $\lambda = np$.

1.2 习题与解答

1. 事件的关系及运算

1.1 设 A、B、C 是三个事件,用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:

(1) B、C 都发生,而 A 不发生;

(2) A 发生,B、C 不发生;

(3) A、B、C 至少有一个发生;

(4) A、B、C 至少有两个发生;

(5) A、B、C 都不发生;

(6) A、B、C 不都发生;

(7) A、B、C 恰有一个发生;

(8) A、B、C 至多有一个发生;

(9) A、B、C 不多于(至多) 两个发生.

解 (1)$\bar{A}BC$; (2)$A\bar{B}\bar{C}$; (3)$A \cup B \cup C$;

(4)$ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$ 或 $AB \cup BC \cup CA$;

(5)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; (6) $\overline{ABC}$; (7)$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

(8)$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$;

(9)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 或$\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

1.2　事件 A_i 表示某射手第 i 次($i=1,2,3$) 击中目标,试用文字叙述下列事件:

(1)$A_1\cup A_2$;　(2)A_2-A_3;　(3)$\overline{\overline{A_2}\cup\overline{A_3}}$;　(4)$\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$.

解　(1)$A_1\cup A_2$ 表示前二次中至少有一次击中目标(即 A_1 与 A_2 至少一个发生);

(2)$A_2-A_3=A_2\overline{A_3}$ 表示第二次射击击中目标而第三次射击未击中目标(即 A_2 发生,A_3 不发生);

(3)$\overline{\overline{A_2}\cup\overline{A_3}}=A_2A_3$ 表示后两次射击均击中目标(即 A_2,A_3 都发生);

(4)$\overline{A_2}\cup\overline{A_3}=\overline{A_1A_2}$ 表示前两次射击中至少有一次未击中(即 A_2,A_3 不都发生).

1.3　若 $A=B$,则 A、B 同时发生或 A、B 同时不发生.

证　$A=B\Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A\Longleftrightarrow A$、$B$ 之中任一个发生必导致另一个发生,即 A、B 同时发生;又 $A=B\Longleftrightarrow\bar{A}=\bar{B}\Longleftrightarrow\bar{A}\supset\bar{B}$ 且 $\bar{A}\subset\bar{B}$,同理 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 同时发生,即 A、B 同时不发生.

1.4　设 A、B 是事件,那末事件"A、B 都发生","A、B 不都发生","A、B 都不发生"中哪两个是对立事件.

解　"A、B 都发生" $=AB$;"A、B 不都发生" $=\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

"A、B 都不发生" $=\bar{A}\bar{B}$.

由于AB若要与$\bar{A}\bar{B}$是对立事件,由定义应有 $AB=\overline{\bar{A}\bar{B}}$,但$\overline{\bar{A}\bar{B}}=A\cup B\neq AB$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"A、B 都不发生"不是对立事件.而 $AB=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\overline{\overline{AB}}$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"A、B 不都发生"是对立事件.

1.5　证明:$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

证　任取 $x\in(A\cap B)\cup C$,则 $x\in(A\cap B)$ 或 $x\in C$,即 $x\in A$ 和 $x\in B$ 同时成立或 $x\in C$ 成立,因此 $x\in A$ 或 C 成立和 $x\in B$ 或 C 成立,即

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C).\tag{1}$$

任取 $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$,则 $x\in A\cup C$ 和 $x\in B\cup C$,即 $x\in A$ 或 C 成立和 $x\in B$ 或 C 成立,因此 $x\in A$ 和 B 成立或 $x\in C$ 成立,即

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C,\tag{2}$$

由(1) 及(2) 有

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

2. 概率的定义与性质

1.6　一部四卷的文集,按任意次序放到书架上,问各卷自左向右或自右

向左的卷号顺序恰好为 1,2,3,4 的概率是多少?

解 一切可能的排列次序总数为 $n = 4!$,有利于所讨论事件的排列次序总数为 $m = 2$. 即按 1,2,3,4 及 4,3,2,1 两种次序排列. 所以,$p = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$.

1.7 电话号码由5个数字组成,每个数字可以是0,1,2,…,9中的任意一个数,求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率.

解 设所论事件为 A,基本事件的总数为 $n = 10^5$. 事件 A 包含的基本事件数为 $m = P_{10}^5$. 所以,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{10^5} = 0.3024.$$

1.8 甲、乙、丙三人去住三间房子,每个人都以$\frac{1}{3}$的概率进入每一房间,而且每间房里的人数没有限制,求:(1) 每间恰有一人的概率;(2) 空一间的概率.

解 相当于顾客去选房间,每人都有三间房可选,故基本事件总数为 $n = 3^3 = 27$.

(1) 设 A 表示每房一人事件. 甲有三间可选. 甲选定后,乙有二间可选. 丙无选择余地,故事件 A 包含的基本事件总数为 $m = 3 \times 2 \times 1 = 6$,所以,$P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

(2) 设 B 表示空一间事件.

方法1 空一间房,必有一间住了二人. 若甲先选有三种可取,乙、丙只能住余下两间之一,也可乙先选或丙先选,故 B 含基本事件总数为

$$m = 3 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2 = C_3^1 \times 3 \times 2 = 18,$$

所以,
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

方法2 三人中任二人结合,有 C_3^2 种结合法,由两人去选房,B 含基本事件总数为

$$m = C_3^2 \times 3 \times 2 = 18.$$

所以,
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

1.9 把 10 本书任意地放在书架上,求其中指定的三本书放在一起的概率.

解 设所论事件为 A,基本事件的总数为 $n = 10!$,有利于 A 的基本事件数相当于把指定的三本书当作一个元素进行全排列的总数,乘以这三本书相

互之间进全排列的总数，即 $m = 8!3!$，所以，$P(A) = \dfrac{8!3!}{10!} = \dfrac{3 \times 2}{10 \times 9} = 0.067$.

1.10　把 1、2、3、4、5 诸数各写在一张纸片上任取其中三张，排成自左而右的次序，求

(1) 所得的三位数是偶数的概率；

(2) 所得的三位数不小于 200 的概率.

解　从五个数中任取三个，这三个数不管怎么排列都是一个三位数，故基本事件总数为 $n = P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

(1) 设 A = "所得三位数是偶数".

偶数必是个位数是 2 或 4，而十位、百位可任取. 个位有两种可能，于是，十位是 4 种可能，百位有 3 种可能，所以 A 包含的基本事件数为 $m = 2 \times 4 \times 3$，所以，

$$P(A) = \frac{2 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{5}.$$

(2) 设 B = "所得三位数不小于 200".

百位数只能取 2、3、4、5 之一，B 包含基本事件数为 $m = 4 \times 4 \times 3$，所以

$$P(B) = \frac{4 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{4}{5}.$$

1.11　两封信随机地向四个邮筒投寄，求(1) 第二个邮筒恰好投入一封信的概率；(2) 前两个邮筒各有一封信的概率.

解　两封信随机地投入四个邮筒，共有 4^2 种可能投法，即基本事件总数为 $n = 4^2 = 16$.

(1) 设 A = "第二个邮筒只投入一封信".

首先，第二个邮筒恰好投入一封信，有两种投法，再将剩下的另一封信投入其余三个邮筒又有三种投法. 即事件 A 包含的基本事件数为 $m = C_2^1 C_3^1 = 2 \times 3 = 6$，所以，

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_2^1 C_3^1}{4^2} = \frac{3}{8}.$$

(2) 设 B = "前两个邮筒各有一封信".

两封信投入前两个邮筒，每个邮筒各有一封信，有二种投法，即 B 含基本事件数为 $m = C_2^1 = 2$，所以，

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_2^1}{4^2} = \frac{1}{8}.$$

1.12　在 0 至 9 这十个整数中，任取四个，能排成一个四位偶数的概率是多少?

解 0至9十个数字不重复地任取4个排列的种数$n=P_{10}^4$;排成偶数时,最后一位数(个位数)有5种取法:0,2,4,6,8,当它取定之后,前面三位数可以从其余9个数字中取3个来排列,于是排列的种数为$m_1=5P_9^3$,但四位有效数字不能以0开头,故应把首位数字是0的情况除掉,而首位数是0时,最后一位数字只有4种取法,中间的两位数字从余下的8个数字中取2个来排列,故排列的种数为$m_2=4P_8^2$.故

$$P=\frac{m_1-m_2}{n}=\frac{5P_9^3-4P_8^2}{P_{10}^4}=\frac{5\times9\times8\times7-4\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\frac{41}{90}.$$

1.13 某工厂生产过程中出现次品的概率是0.05.每一百个产品为一批,检查产品质量时,在每批中任取一半来检查,如果发现次品不多于一个,则这批产品可以认为是合格的.求一批产品被认为是合格的概率.

解 可以认为一批100个产品中有5个是次品,抽查50个产品.基本事件总数$n=C_{100}^{50}$,有利的情况包括这50个产品中没有次品与恰有一个次品的情形.则有利的基本事件数是$m=C_{95}^{50}+C_5^1C_{95}^{49}$,故

$$P=\frac{m}{n}=\frac{C_{95}^{50}+C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=0.181.$$

1.14 设有n个不同的球,每一球以等可能落入$N(N\geqslant n)$个盒子中的每一个盒子里(设每个盒子能容纳的球数是没有限制的),设

$A=$“指定的n个盒子中各有一球”;

$B=$“任何n个盒子中各有一球”;

$C=$“某指定的一个盒子中恰有$m(m\leqslant n)$个球”,求$P(A)$,$P(B)$,$P(C)$.

解 n个球放入N个盒子里有N^n种放法,所以基本事件总数为N^n,

(1)n个球在指定的n个盒子中各放一球,共有$n!$种放法.所以,

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2)因为任何n个盒可以从N个盒中任意选取,共有C_N^n种选法,选出这n个盒后,再按(1)知事件B包含的基本事件数为$C_N^n\cdot n!=P_N^n$,所以,

$$P(B)=\frac{P_N^n}{N^n}=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3)因为m个球可以从n个球中任意选出,共有C_n^m种选法,其余$n-m$个球可以任意放入其余的$N-1$个盒子中,共有$(N-1)^{n-m}$种放法.根据乘法原理,事件C包含的基本事件数为$C_n^m(N-1)^{n-m}$,所以,

$$P(C)=C_n^m(N-1)^{n-m}/N^n.$$