中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

数量经济分析

侯定丕　陈华友　陈　伟　编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

数量经济分析

侯定丕　陈华友　陈　伟 编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书为《中国科学技术大学数学教学丛书》之一，是中国科学技术大学数学类本科生的“数量经济分析”教材，内容包括：规划理论、预测、决策理论、竞争决策.本书内容不求全面，但在数学上有一定深度.旨在培养读者掌握线性规划、线性回归分析、平稳时间序列分析、Bayes决策、组合预测、Nash均衡、合作博弈等知识以及它们在经济分析中的应用.

本书可作为高等院校数学专业的本科生教材，也可供管理系、经济系的本科生、硕士生参考.

图书在版编目(CIP)数据

数量经济分析/侯定丕，陈华友，陈伟编著.—北京：科学出版社，2004.8
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-013484-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.①侯…②陈…　Ⅲ.数量经济学-高等学校-教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第050308号

责任编辑：杨　波　赵　靖/责任校对：朱光光
责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
[illegible]印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

2004年8月第一版　开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷　印张：12 1/2
印数：1—3 000　字数：234 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

序　　言

科学的历史表明，多个学科的交叉融合对数量分析的要求，是促进数学发展的主要推动力之一．在理工科大学里，人们一谈到这一方面，便以力学、物理学为例来证明，也许有人还会提及化学、生物学乃至系统科学，却很少有人会提到经济学．有的人甚至认为，经济学只要用算术就足够了．

我在大学里教运筹学多年，总是以事例向学生说明数学在管理与经济中的应用，以及对管理与经济问题的研究也会推动数学的发展．近年来在数学系高年级开设数量经济学，深知学生学习这方面知识对开拓眼界与启发思维有好处．有一部分同学毕业时找工作，知道一些经济学知识肯定是好的；还有一部分同学拟读商学或管理学方面的研究生，对这方面尤其感兴趣．然而由于数学系本科生所学的课程中很少涉及经济学方面的知识，而他们又习惯于形式逻辑推演，我在选择教学内容时力求少涉及过深的经济学概念和知识，多介绍在经济分析中应用广而深度适当的数学工具．具体来说，我把规划理论、预测、决策理论（包括评估）、竞争决策作为 4 个大题目，选择了线性规划、Kuhn-Tucker 理论、线性回归分析、平稳时间序列分析、组合预测、Bayes 决策、Markov 决策、效用函数、von Neumann 经典博弈理论、Nash 均衡、合作博弈等题目来介绍数学知识以及在经济分析中的应用，现在把教学内容编写成一本薄薄的教材，供大学理工科开设数量经济分析课程时参考使用．

在编写时，注意到以下 3 个方面．其一，在前述 4 个大题目之下内容不求全面，而选择在数学上有一定深度的．其二，对数学上的证明，凡需要过长篇幅的舍去，请读者参考有关书籍，而有简短证明的则力求写出．其三，对经济上的应用力求简单明了，不涉及过多细节．

陈伟、陈华友两位同志与我商讨过编写此书的许多问题，陈华友撰写了第 2 章的原稿．欧宜贵、刘琼林、王惠文三位同志分别撰写了 3.1 节和 3.2 节、3.3 节、第 4 章的原稿．我对他们的原稿进行了修改与汇总．本书的选材如有不妥之处，内容陈述上如有错漏之处，概由我负责．希望本书能对拓宽数学教学中的知识领域起到一定的参考作用．

侯定丕

2004 年 2 月 25 日

于中国科学技术大学

目　　录

第 1 章　规 划 理 论

规划理论研究函数在各种条件下求极值的问题. 在经济分析中, 规划的多种模型以及求解的算法是最常用的数学工具. 线性规划、整数规划、非线性规划, 还有动态规划方法等都在解决实际问题中起着巨大的作用. 在运筹学方面的书籍中可以找到对这些模型与方法的介绍. 而在经济问题的理论研究中, 规划理论也是非常重要的. 本章介绍这些方面若干最基本的知识, 其中涉及某些定理, 限于篇幅不叙述证明, 读者可以参阅有关书籍来理解.

1.1　线性规划与对偶定理

线性规划模型是线性函数在线性约束条件下求最大(或最小)值的数学模型. 我们来考察如下的线性规划模型 P:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, \cdots, m), \\
& x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

引入向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$,

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

则 P 可改写成

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 中的 T 是转置运算, 向量不等号表示对应分量不等号同时成立, 即

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

表示

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, n;$$

而

$$\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$$

表示

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

对于 P,称以下模型 DP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

为其对偶问题. 这里 $\boldsymbol{y}$ 自然是 m 维列向量,而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵自然是 $n \times m$ 矩阵. DP 也就是

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j = 1, \cdots, n), \\ & y_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, m). \end{aligned}$$

称变量 y_i 为 P 的第 i 个对偶变量,或 P 的第 i 个约束条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$ 相应的对偶变量. 在 DP 的目标函数 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ 中 y_i 恰与 b_i 相乘.

对于不是 P 这种形式的线性规划模型,也可以相容地定义其对偶问题. 具体方法是先把它改写成 P 这种形式,找到 DP,然后再改换合适的形式.

例如,线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 1, \\ & 2x_1 + 4x_2 \geqslant 5, \\ & x_1 \geqslant 0, \quad -\infty < x_2 < +\infty \end{aligned}$$

不是 P 这种形式. 变量 x_2 不是非负的,对它作变换,令

$$x_2 = x_2' - x_2'',$$

其中 $x_2' \geqslant 0, x_2'' \geqslant 0$ 是两个新引入的变量,都是非负的,约束条件 $2x_1 + 4x_2 \geqslant 5$ 为

$$-2x_1 - 4(x_2' - x_2'') \leqslant -5,$$

即

$$-2x_1-4x_2'+4x_2''\leqslant -5.$$

约束条件 $x_1-x_2=1$ 可写成两个不等式

$$x_1-x_2\leqslant 1 \quad 和 \quad -(x_1-x_2)\leqslant -1,$$

亦即

$$x_1-x_2'+x_2''\leqslant 1 \quad 和 \quad -x_1+x_2'-x_2''\leqslant -1.$$

于是原问题改写成

$$\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1+2x_2'-2x_2'',\\
\text{s.t.} \quad & x_1-x_2'+x_2''\leqslant 1,\\
& -x_1+x_2'-x_2''\leqslant -1,\\
& -2x_1-4x_2'+4x_2''\leqslant -5,\\
& x_1\geqslant 0,\quad x_2'\geqslant 0,\quad x_3''\geqslant 0.
\end{aligned}$$

这是标准的 P 这种形式. 引入对偶变量 z_1,z_2,z_3,DP 是

$$\begin{aligned}
\min \quad & z_1-z_2-5z_3,\\
\text{s.t.} \quad & z_1-z_2-2z_3\geqslant 3,\\
& -z_1+z_2-4z_3\geqslant 2,\\
& z_1-z_2+4z_3\geqslant -2,\\
& z_1\geqslant 0,\quad z_2\geqslant 0,\quad z_3\geqslant 0.
\end{aligned}$$

考虑到 z_1 与 z_2 的关系,令

$$y_1=z_1-z_2,\qquad y_2=z_3.$$

以上模型改变为

$$\begin{aligned}
\min \quad & y_1-5y_2,\\
\text{s.t.} \quad & y_1-2y_2\geqslant 3,\\
& -y_1-4y_2\geqslant 2,\\
& y_1+4y_2\geqslant -2,\\
& -\infty<y_1<+\infty,\quad y_2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
\min \quad & y_1-5y_2,\\
\text{s.t.} \quad & y_1-2y_2\geqslant 3,\\
& y_1+4y_2=-2,\\
& -\infty<y_1<+\infty,\quad y_2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

这便是原问题的对偶问题. 由于经过几次变换,对偶问题的形式不一定唯一. 例如

$$\begin{aligned}
\max \quad & -y_1+5y_2,\\
\text{s.t.} \quad & -y_1+2y_2\leqslant -3,
\end{aligned}$$

$$y_1 + 4y_2 = -2,$$
$$-\infty < y_1 < +\infty, \quad y_2 \geqslant 0$$

也是原问题的对偶问题 .

回到 P 与 DP. 不难证明,DP 作为线性规划,它的对偶问题恰巧就是 P. 事实上,把 DP 改写成 P 这种形式,得

$$\begin{aligned} \max \quad & (-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.} \quad & (-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqslant -\boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

它的对偶问题是

$$\begin{aligned} \min \quad & (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}, \\ \text{s.t.} \quad & ((-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \geqslant -\boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

它就是 P.

对偶问题的对偶就是原问题,这一事实可以形式地表为

$$\mathrm{D(DP)} = \mathrm{P}.$$

关于 P 和 DP,以下关系成立.

定理 1.1.1 (对偶定理)　给定 P 和 DP,设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为它们的可行解,即分别满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0},$$

则必然有不等式

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

证明　由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$,又 $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},$$

即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

因 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},$$

亦即

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

定理 1.1.2　在线性规划模型 P:

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

中,假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 小于列数 n,而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m. 假设 $\boldsymbol{A}$ 有 m 阶子方阵 $\boldsymbol{B}$, $|\boldsymbol{B}|\neq 0$, $\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 这 m 个不同列组成,记 m 维列向量

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=(x_{B1},\cdots,x_{Bm})^{\mathrm{T}}.$$

又设 n 维列向量 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$,其中

$$x_{i_k}^*=x_{Bk},\quad k=1,\cdots,m,$$

其他 $n-m$ 个 x_i^* 为零. 如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是 P 的最优解,则

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}=(c_{i_1},\cdots,c_{i_m})\boldsymbol{B}^{-1}$$

必是 DP:

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{c},\\ & \boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

的可行解,并且有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$.

证明 参阅运筹学方面的书籍.

从此凡不证明的定理一律不再写参阅的话.

定理 1.1.3 对于线性规划 P,如果目标函数值有上界,则必存在最优解,它具备定理 1.1.2 中 $\boldsymbol{x}^*$ 的性质. 对于 DP,如果目标函数有下界,则必存在最优解.

定理 1.1.4 (强对偶定理) 如果 P 和 DP 都有可行解,则它们都有最优解,并且

$$\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\min \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

证明 设 $\boldsymbol{x}^0$ 和 $\boldsymbol{y}^0$ 分别为 P 和 DP 的可行解,根据定理 1.1.1,对于 P 的所有可行解 $\boldsymbol{x}$,必有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^0.$$

由定理 1.1.3 知,P 必有最优解 $\boldsymbol{x}^*$,且具备定理 1.1.2 中所述性质. 而根据定理 1.1.2,DP 必有可行解 $\boldsymbol{y}^*$,满足

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

DP 的目标函数有下界 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$,由定理 1.1.3 知,DP 必有最优解,即存在 $\boldsymbol{y}^{\Delta}$,满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta}\geqslant \boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}^{\Delta}\geqslant \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta},\quad \forall \text{ 可行解 } \boldsymbol{y}.$$

特别,

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*\geqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta}.$$

又根据定理 1.1.1 知,$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*\leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta}$,故有

$$c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*.$$

因此 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\Delta}$. 故 $\boldsymbol{y}^*$ 也是 DP 的最优解,而

$$\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \min \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

下面的例子说明以上知识在经济分析中的运用.

例 1.1.1(影子价格)　我们设 P:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,\cdots,m), \\ & x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\cdots,n) \end{aligned}$$

为产品收益最大化模型,其中 x_j 是第 j 种产品的产量;c_j 为其价格,$j=1,\cdots,n$;b_i 是第 i 种资源(即原料)的可用上限;a_{ij}是生产第 j 种产品每单位所耗第 i 种资源的数量,$i=1,\cdots,m$,$j=1,\cdots,n$. 同时设 DP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j = 1,\cdots,n), \\ & y_i \geqslant 0 \quad (i = 1,\cdots,m) \end{aligned}$$

为生产所耗资源价值最小化模型,相当于生产成本最小化模型. y_i 是 P 的第 i 个约束的对偶变量,当 $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$ 作为资源价值来看时,y_i 起着第 i 种资源价格的作用. 不过,y_i 作为 DP 的变量,它还不是价格. 但是,当 P 和 DP 有最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^*$ 时,$y_1^*,\cdots,y_m^*$作为确定的数值,可以认为是对资源价格的估计. 将它们称为影子价格. 记 P 和 DP 公共的最优值为 w,则有等式

$$w = \max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*,$$

$$w = \min \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = c_j$$

是第 j 种产品的价格,而

$$\frac{\partial w}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i}\sum_{k=1}^{m} b_k y_k = y_i$$

是第 i 种资源的影子价格.

影子价格不一定等于市场价格. 在 P 和 DP 这两个模型中,并没有包含资源价格作为已知数据,从模型也推不出市场价格,影子价格只能是对市场价格的估计

值.用同一种资源的影子价格 y_i^* 和市场价格 p_i^* 来比较,如果 $p_i^* < y_i^*$,由最小成本 w 的偏微商

$$\frac{\partial w}{\partial b_i} = y_i^* > p_i^*$$

得知,多消耗一单位第 i 种资源,最小成本的增量 $\frac{\partial w}{\partial b_i} \cdot 1 = y_i^*$ 比市场价格 p_i^* 高.此时宜尽可能购进这种资源,使今后生产得到成本降低的好处.如果 $p_i^* > y_i^*$,则生产成本不会因购进此种资源而得以降低,此时宜适当地售出手头拥有的部分此种资源.影子价格对于企业经营决策有以上参考意义.

在 DP 的最优解中,可能存在 $y_i^* = 0$,而市场价格 p_i^* 一般是不会等于零的.我们用对偶定理来说明:如果某种资源的影子价格 $y_i^* > 0$,则必有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$,即此种资源被用完,而当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$ 时,必有 $y_i^* = 0$.

事实上,由于 $\boldsymbol{Ax}^* \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{0}$,故知

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^* \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

又由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{0}$,得知

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^*,$$

故有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^* \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

但是 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$,故有等式

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

由此得到等式

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = 0,$$

亦即

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j^* - b_k \Big) = 0.$$

由于 $y_k^* \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j^* \leqslant b_k$,故有

$$y_k^* \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j^* - b_k \Big) = 0, \quad k = 1, \cdots, m.$$

若对某 $k = i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i < 0$,则必有

$$y_i^* = 0.$$

而若对某 $k = i, y_i^* > 0$,则必有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i = 0.$$

由此可知,当影子价格 $y_i^*=0$ 时,第 i 种资源虽未必一定没有用完,但有可能是没有用完的.无论如何,此时必有 $y_i^*=0<p_i^*$,因此为了低成本地生产,宜多用或售出多余的部分此种资源.

例 1.1.2　数据包络分析(DEA,data envelopment analysis)是评价生产系统效率时有用的运筹学方法.它的一种分析思路引出如下线性规划模型:

$$\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_0,\\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i \geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,n),\\
& \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 = 1,\\
& \boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0},\\
& \boldsymbol{\mu} \geqslant \boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

其中

$i=0,1,\cdots,n$ 表示同一产业部门的 $n+1$ 个生产系统,$i=0$ 的系统作为标准单位,而 $i=1,\cdots,n$ 这 n 个系统被取来与 $i=0$ 的系统比较综合效率;

$\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{y}_i$ 分别为系统 i 生产的投入与产出向量,

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{1i},\cdots,x_{mi})^{\mathrm{T}},$$

此处,m 为投入量的种数,x_{ki}为系统 i 投入第 k 种资源的数量,

$$\boldsymbol{y}_i = (y_{1i},\cdots,y_{li})^{\mathrm{T}},$$

此处,l 为产出量的种数,y_{ki}为系统 i 产出的第 k 种产品的数量;

$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_l)^{\mathrm{T}}$ 是产出向量 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_l$ 的权系数,不要求 $\sum\limits_{k=1}^{l}\mu_k=1$,但要求 $\mu_k\geqslant 0, k=1,\cdots,l$;

$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 是投入向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的权系数,不要求 $\sum\limits_{k=1}^{m}\omega_k=1$,但要求 $\omega_k\geqslant 0, k=1,\cdots,m$.

上述线性规划的对偶模型是

$$\begin{aligned}
\min\quad & \theta,\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\lambda_i \leqslant \theta\boldsymbol{x}_0,\\
& \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i\lambda_i \geqslant \boldsymbol{y}_0,\\
& \lambda_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\
& -\infty < \theta < +\infty.
\end{aligned}$$

可以证明,上述一对线性规划问题都有最优解,并且公共的最优值

$$\max \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_0 = \min \theta \leqslant 1.$$

记 $\theta_0 = \min \theta$. 当 $\theta_0 = 1$ 时表示生产系统 $i = 0$ 是规模有效即收益规模不变的. θ_0 值越大,系统 $i = 0$ 规模有效性越高.

例 1.1.3 博弈论(game theory)是研究竞争格局中各个局中人决策的科学. 博弈论又译作对策论. 有多种博弈模型,其中两人零和博弈是最常被人们提到的. 在这种模型里,两个局中人的最优决策方案的求取,归结为对如下对偶的线性规划求解.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} u_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant 1 \quad (j = 1, \cdots, n), \\ & u_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} v_j, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leqslant 1 \quad (i = 1, \cdots, m), \\ & v_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n). \end{aligned}$$

联盟博弈也是人们常提到的一种博弈模型,它的一种解"核心"(core)的求取,归结为如下线性规划模型的最小值是否$\leqslant v(N)$的问题.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \\ & S \text{ 是 } N \triangleq \{1, \cdots, n\} \text{ 的任一非空子集}, \end{aligned}$$

其中 $v(S)$是联盟博弈的特征函数,即局中人集合 $N \triangleq \{1, 2, \cdots, n\}$的全体子集合上定义的实值函数,满足:

$$v(\varnothing) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T), \quad \forall S, T \subset N \text{ 且 } S \cap T = \varnothing.$$

特征函数在经济上可以解释为包含在 S 中的所有局中人共同努力可以取得的经济收益.

上述线性规划的对偶模型是

$$\max \quad \sum_{S \subset N} y_S v(S),$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{\substack{S\\ i\in S\subset N}} y_S = 1 \qquad (i=1,\cdots,n),$$

$$y_S \geqslant 0 \qquad (\forall S\subset N).$$

以 v 作为特征函数的联盟博弈有非空核心的充分条件是:对于上述 max 问题的任何可行解$(y_S)_{S\subset N}$都有

$$\sum_{S\subset N} y_S v(S) \leqslant v(N).$$

例 1.1.4　某些动态经济系统中长久运转的最优决策问题,导出如下线性规划模型:

$$\begin{aligned}
\max\quad & g,\\
\text{s.t.}\quad & g + v_i - \sum_{j\in I} P_{ij}(a) v_j \leqslant c_i(a) \quad (\forall i\in I, a\in A),\\
& -\infty < g < +\infty,\\
& -\infty < v_i < +\infty \quad (\forall i\in I),
\end{aligned}$$

其中 $I=\{1,2,\cdots,N\}$称为状态空间;$A=\{a_1,\cdots,a_l\}$称为决策空间;$P_{ij}(a)$是采取决策方案 a 时,由状态 i 转移到状态 j 的概率,属已知量;$c_i(a)$是在状态 i 采取决策 a 行动时支出的费用,也属已知量.

而最优决策方针的确定依赖于对偶问题

$$\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i\in I}\sum_{a\in A} c_i(a) x_{ia},\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{a\in A} x_{ja} - \sum_{i\in I}\sum_{a\in A} P_{ij}(a) x_{ia} = 0 \quad (\forall j\in I),\\
& \sum_{i\in I}\sum_{a\in A} x_{ia} = 1,\\
& x_{ia} \geqslant 0 \quad (\forall i\in I, a\in A)
\end{aligned}$$

的求解.

1.2　凸　理　论

有关凸集、凸函数的知识在规划理论研究中是不可缺少的,今选择其重要的定义、定理加以介绍.

定义 1.2.1　设 S 为 E_n 的子集.如果对于任何 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in S$,都有

$$\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in S, \qquad \forall \lambda\in[0,1],$$

则称 S 为 E_n 的凸集.

定理 1.2.1　设 S 是 E_n 的非空闭凸集合,而 $\boldsymbol{y}\notin S$,则存在唯一点 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$,使得

$$d(\bar{x}, y) = \min_{x \in S} d(x, y),$$

这里 d 是距离,定义为

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

并且,$\bar{x} \in S$ 是此最小距离的点的充分必要条件是

$$(x - \bar{x})^{\mathrm{T}}(\bar{x} - y) \geqslant 0, \quad \forall x \in S.$$

定理 1.2.2 设 S 是 E_n 的非空闭凸集合,而 $y \notin S$,则存在非零向量 $p \in E_n$ 和标量 α,使得

$$p^{\mathrm{T}}y > \alpha,$$
$$p^{\mathrm{T}}x \leqslant \alpha, \quad \forall x \in S.$$

定理 1.2.3 设 S 是 E_n 的非空凸集合,而 $\bar{x} \in \partial S$(即 S 的边界点集),则存在非零向量 $p \in E_n$,使得

$$p^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}) \leqslant 0, \qquad \forall x \in \mathrm{cl}\, S,$$

其中 $\mathrm{cl}\, S$ 是 S 的闭包,即

$$\mathrm{cl}\, S = \partial S \cup \mathrm{int}\, S.$$

此处 $\mathrm{int}\, S$ 是 S 的内点集.

定理 1.2.4 设 S_1 和 S_2 是 E_n 的两个不相交的非空凸集合,则存在非零向量 $p \in E_n$,使得

$$\inf\{p^{\mathrm{T}}x \mid x \in S_1\} \geqslant \sup\{p^{\mathrm{T}}x \mid x \in S_2\}.$$

定义 1.2.2 设 S 是 E_n 的集合.对于任意 k 个 $x_i \in S$,称

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \qquad \forall \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

为 S 的凸组合,又称 S 的所有凸组合的集合为 S 的凸包(convex hull),特记为 $H(S)$,即

$$H(S) = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, x_i \in S, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, k = 1, 2, \cdots\}.$$

定理 1.2.5 $H(S)$是包含 S 的最小凸集.

定理 1.2.6 (Carathéodory) 设 S 是 E_n 的集合.如果 $x \in H(S)$,则 x 必可表示为

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j, \qquad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, x_j \in S, j = 1, \cdots, n+1.$$

定义 1.2.3 设 C 是 E_n 的非空集合.如果满足以下条件:若 $x \in C$,则 $\lambda x \in C, \forall \lambda \geqslant 0$.就称 C 为顶点在零点的锥.如果 C 还是凸集,则称 C 为凸锥.

定义 1.2.4 设 S 是 E_n 的非空集合,E_n 的集合

$$\{p \mid p^{\mathrm{T}}x \leqslant 0, \forall x \in S\}$$