華夏英才基金學術文庫

郭 雷主编
程代展 冯德兴 副主编

控制理论导论

——从基本概念到研究前沿

2

科学出版社
www.sciencep.com

華夏英才基金學術文庫

控制理论导论

——从基本概念到研究前沿

郭 雷 主 编
程代展 冯德兴 副主编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书力图对现代控制理论几个主要分支的基本数学工具和重要理论结果给予综合介绍，使读者对现代控制理论发展的概貌有一个基本了解．全书的内容分为两部分：第一部分结合控制理论讨论线性系统、近世代数、微分几何、随机过程、泛函分析等必要的数学工具；第二部分介绍最优控制、H_∞控制、非线性控制、自适应估计与控制、分布参数系统控制及离散事件动态系统理论等．本书强调基础性、深入性、严谨性和前沿性，对主要结果尽可能从基本概念出发作详尽论述．作者为八位在不同控制领域工作的资深研究员，许多成果是作者多年研究工作的积累．

本书可作为自动控制、信息科学、系统科学、应用数学、经济管理、生物医学等专业研究生的教科书，也可作为有关科研人员、工程师、教师的综合参考书．

图书在版编目（CIP）数据

控制理论导论：从基本概念到研究前沿/郭雷主编．北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-014326-4

Ⅰ.控… Ⅱ.郭… Ⅲ.现代控制理论 Ⅳ.O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 091269 号

责任编辑：匡 敏 姚庆爽／责任校对：包志虹

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005年3月第一次印刷 印张：58 3/4

印数：1—2 500 字数：1 163 000

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前言

维纳(N. Wiener)在 1948 年出版的专著《控制论，或关于在动物和机器中的控制与通讯》，标志着控制论作为科学的一门重要分支正式诞生. 维纳也因此成为控制论的主要创始人之一. 我国著名科学家钱学森在 1954 年出版的专著《工程控制论》又进一步推动了控制论与工程技术问题的密切结合.

从那时到现在，控制论经历了半个世纪的迅猛发展. 工业化和高科技的发展，对工业控制提出了越来越高的要求，特别是制导和航天技术的发展，促进了自 20 世纪 60 年代初以来现代控制理论的诞生和发展. 而计算机的出现和高速发展，网络技术的日新月异使得高精度控制的在线实现成为可能. 半个世纪后的今天，控制论已经成为一门理论严谨、内容丰富、分支众多、发展迅速、应用广泛的学科领域. 钱学森曾经从生产力，特别是技术革命的进程分析了控制论的产生和发展，他强调："我们可以毫不含糊地说，从科学理论的角度来看，20 世纪上半叶的三大伟绩是相对论、量子论和控制论，也许可以称它们为三项科学革命，是人类认识客观世界的三大飞跃."

控制理论发展到今天，恐怕没有一位系统与控制专家能够同时掌握控制理论的所有前沿分支，正如当今一个数学家很难同时是拓扑学、几何学、代数学、微分方程、泛函分析、概率统计、数论等各方面的专家. 但是，与纯数学不同的是，一个优秀的系统与控制科学家，应该能对不同的控制理论与控制方法有一个比较全面的了解. 控制论是一门应用性很强的科学理论，它面对的是各种各样错综复杂的实际系统. 宇宙飞船到底是有穷维模型还是无穷维模型，是随机系统还是确定性系统，是该采用最优控制还是用鲁棒控制，抑或是多种模型和多种控制手段的综合，不可能有现成的答案. 模型的刻画、控制手段的选择，都是控制工程师自己的事情. 这种以问题为导向、以解决问题为目标的研究路线，要求系统与控制的理论工作者和工程师面对需求或实际对象，有宽阔的知识面，对本学科各个重要分支的理论和方法有一个全面、综合的了解. 这也是我们对研究生，特别是对那些有志在系统与控制科学的理论与应用研究方面，实现其人生宏伟理想的博士研究生们的要求和期盼. 控制论方面的书籍汗牛充栋，文献更是如山似海，但不求甚解的"泛读"不如"不读". 精读一本好的工具书，可以让人达到事半功倍的效果.

20 世纪 70 年代中期至 80 年代，我们的老研究室主任关肇直主编的"现代控制

理论小丛书”, 为现代控制理论在中国的传播和发展起到了历史性的作用. 20 多年过去了, 控制论有了长足的发展, 相当一部分内容亟待更新. 另外, “小丛书”虽册数较多, 但系统性和整体性还不完善. 所以, 我们希望本书能达到以下几点要求:

(1) 从必要的数学基础到控制理论, 基本上自成体系, 一个具有现代工程数学背景的大学毕业生就能读懂它的主要部分.

(2) 它具有全方位性, 能够对控制理论的几个主要方向都作出一定深度的介绍. 使“读破”这卷书的读者能对现代控制理论有一个较为全面的了解.

(3) 它是一本综合性的教科书, 基本部分论述详尽具体, 每节后附有启发性的习题, 可供学生循序渐进地学习, 引导研究生迅速进入研究前沿.

(4) 它又是一本前沿性的参考书, 提高部分对现代控制理论的最新进展和挑战性课题作了专门介绍, 可供有关科学和工程研究工作者参考.

这样一个目标绝非一两个人所能完成的, 国内外也未曾见过此类书籍, 这是一个创新的尝试. 本书是由八位资深研究员执笔, 十多位一线科研人员参与, 依靠大家的协作、奉献和团队精神完成的. 部分内容曾作为中国科学院有关专业博士生课程教材试讲.

本书的内容大体上可分为两大部分. 第一部分(前 5 章)是工具篇, 介绍本书及控制理论中用到的一些基本数学工具. 这些可以看作是对控制论专业博士研究生的基本要求, 也可以作为有关科研工作者理论进修的参考或工具型手册.

第1章包括线性代数和线性系统两部分. 在线性代数部分中给出一些在一般大学教科书中不多见的内容, 如张量积、奇异值分解等, 可以看作是标准线性代数课程的补充. 线性系统部分则包括能控性、能观测性、标准分解等一些基本知识. 现在这些内容不仅对于控制专业, 而且对许多相近专业已经成为必修的基础理论了.

第2章介绍常微分方程的基本理论, 包括解的存在和唯一性、解的延拓及解对初值和参数的连续依赖性; 线性常微分方程的基本结果; 稳定性理论和平面定性理论初步. 这些内容是集中参数控制理论的必不可少的数学工具.

第3章的内容包括抽象代数、拓扑及微分几何. 对抽象代数只讨论群、环与代数概念. 对点集拓扑作了较全面的介绍. 对代数拓扑, 只涉及同伦、基本群等. 微分几何因为是非线性系统研究的基本工具, 本章对它的讨论相对而言较详细. 对流形、向量值纤维丛、黎曼流形、辛几何等均作了讨论.

第4章从测度论的观点引进严格的概率空间、事件独立性等概念, 介绍概率中的独立变量、极限定理等基本工具, 然后介绍鞅与鞅差序列. 并讲述随机过程和

随机微分方程初步. 为随机控制系统提供理论基础.

第5章介绍分布参数系统控制所要用的泛函分析、线性算子半群理论和偏微分方程的一些基本知识. 主要内容包括 Hilbert 空间和 Banach 空间、线性算子理论、谱理论、线性发展方程、Sobolev 空间、偏微分方程边值问题等. 当然这些基本理论的深入掌握则需要读者去阅读有关的专著了.

本书的第二部分(后6章)是控制篇, 介绍现代控制理论中最活跃的几个理论分支, 目的是帮助研究生了解有关控制理论, 并引导他们进入科研前沿, 也可以作为相关研究人员的参考资料.

第6章首先讨论了线性系统 H_∞控制的基础理论与设计方法. 然后讨论非线性系统 H_∞控制问题. 它在理论与设计上都与线性系统有显著区别. 最后给出一些它在工程设计中应用的典型例子.

第7章介绍集中参数系统最优控制理论的基本结果. 从工程实际问题归纳出最优控制问题的共同特点和数学描述开始, 讲述最优控制理论的基本结果. 包括最大值原理; 线性系统时间最短控制; 线性二次最优控制; 双方极限原理及其与 H_∞控制的关系, 为了解 20 世纪 60 年代的最优控制理论与 90 年代的干扰抑制控制之间的区别和联系提供"桥梁".

第8章讨论非线性系统控制理论. 由于非线性系统控制的理论与方法十分丰富, 这里着重于非线性系统的几何理论. 内容包括主要的经典方法与理论结果. 如能控性、能观测性、不变分布及解耦、线性化与近似线性化等. 也包括新近发展起来的后推式自适应控制, 中心流形方法, 耗散理论, 哈密顿系统理论等.

第9章讨论自适应系统. 内容包括自适应估计和自适应控制两部分. 该章将首先对自适应系统作以综合介绍, 然后讨论定常及时变参数系统的自适应估计理论和方法, 其中涉及线性时变随机系统的稳定性研究; 接着给出自校正调节器和自适应极点配置等典型自适应控制器的基本理论与设计技巧. 该章的习题也是从事该领域进一步研究的必要基础.

第10章讨论分布参数控制系统的基本理论, 包括无穷维线性系统的稳定性、能控性、能观测性、反馈镇定、弹性梁振动控制、波动方程的控制和无穷维线性系统二次型最优控制, 以及时域乘子法、频域乘子法、Riesz 基方法等各种具体方法的介绍.

第11章研究关于以制造系统, 计算机网等为应用背景的离散事件动态系统. 先简单综述了各种方法, 然后主要论述了极大代数方法, 包括建模与分析, 能达能观测性, 周期("极点")配置与稳定性, 最优控制与调度等. 最后论述了这个方向

的两个最新进展: 双子(Dioid)代数方法与极小极大函数方法.

本书各章的执笔人为: 张纪峰(第 1 章), 秦化淑(第 2 章), 程代展(第 3 章), 陈翰馥(第 4 章), 冯德兴(第 5 章), 申铁龙(第 6 章), 秦化淑(第 7 章), 程代展(第 8 章), 郭雷(第 9 章), 冯德兴(第 10 章), 陈文德(第 11 章). 最后, 由郭雷、程代展和冯德兴等负责统编.

如今, 复杂系统科学、信息科学与生命科学的发展, 社会与生态问题, 高科技与经济全球化都给控制理论提出了新的挑战, 同时也给予控制理论发展以新的机遇.

希望寄托于年轻的一代, 寄托于现在的大学生和研究生们. 伴随着中华民族的腾飞, 他们必将成为未来国际系统与控制科学主导潮流的弄潮儿. 如果能用我们的肩膀为他们的成长起一点铺路石子的作用, 那么本书的目的也就达到了.

笔者感谢华夏英才基金对本书出版的支持, 感谢常金玲、刘智敏等同志在本书打印、编排等方面的贡献, 感谢科学出版社的支持与帮助. 本书的出版还得到国家自然科学基金委员会创新研究群体科学基金和重点项目(60334040)的资助.

笔者学识浅薄, 错误和疏漏在所难免, 愿专家和读者不吝赐教.

编　者

2004 年 3 月

中国科学院数学与系统科学研究院

系统控制重点实验室

数学符号表

$\in$	属于
$\subset$	包含于
$\cap$	集合交运算
$\cup$	集合并运算
$\setminus$	集合差运算
$\Longrightarrow$	蕴含
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{Z}$	整数域
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{N}$	自然数集，即正整数集
$\varnothing$	空集
Re	实部
Im	虚部
$\operatorname{span}\{M\}$	由 M 中向量的线性组合构成的线性子空间
sign	符号函数
$L^p(\Omega)$	可测集 Ω 上 p 次可积函数空间
$L^p(J;\mathbb{R}^m)$	区间 J 到 $\mathbb{R}^m$ 上的 p 次可积函数空间
$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\operatorname{Re}\sigma(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部
$\dim M$	子空间 M 的维数
$\operatorname{codim} N$	子空间 N 的余维数
$\ker(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零 (核) 空间
$\operatorname{Image}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域
$\dot{+}$	直和
$\oplus$	直交和

第 3、8 章专用符号

$\boldsymbol{M}_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵集
$\boldsymbol{M}_n$	$n\times n$ 矩阵集

$\mathrm{GL}(n,R)$	一般线性群
$\mathrm{gl}(n,R)$	一般线性代数
$\mathrm{SO}(n,R)$	特殊正交线性群
$\mathrm{so}(n,R)$	特殊正交线性代数
$\mathrm{Sp}(n,R)$	辛群
$\mathrm{sp}(n,R)$	辛代数
$[\cdot,\cdot]$	李括号
$\wedge$	协变张量的外积
$\{\cdot,\cdot\}$	泊桑括号
$H<G$	群 G 的子群
$H\lhd G$	群 G 的正规子群
$\mathrm{ad}_f^k\boldsymbol{g}$	向量场 $\boldsymbol{g}$ 对 f 的 k 次李导数
$L_f^k h$	函数 h 对 f 的 k 次李导数
$T_s^r(V)$	V 上协变阶 r 逆变阶 s 的张量集
DF	F 的微分
$\nabla_f g$	g 沿 f 的联络
$T(N)$	流形 N 的切空间
$T^*(N)$	流形 N 的余切空间
$C^\infty(N)$	N 上的 C^∞ 的函数集合
$C^\omega(N)$	N 上的解析函数集合
$V(N)$	N 上的光滑向量场集合
$V^\omega(N)$	N 上的解析向量场集合
$\otimes$	矩阵的张量积
$\circ$	矩阵的 Hadamard 积
$\phi_t^X(x_0)$	向量场 X 的以 x_0 为初值的积分曲线
$T_t^s(N)$	N 上的张量场集合

第 4 章专用符号

λ	Lebesgue 测度
$\mathcal{B}$	Borel σ- 代数
Ω	全空间
$\mathcal{F}$	σ- 代数
$P(A)$ 或 PA	集合 A 的概率
I_A	集合 A 的示性函数
EX	随量变量 X 的数学期望
a.s.	几乎肯定，或以概率 1

$P(A\|B)$ 或 $P^B(A)$ 或 P^BA	在 B 条件下 A 的条件概率
$P^{\mathcal{F}}A$ 或 $P(A\|\mathcal{F})$	在 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 条件下，A 的条件概率
P^XA, $P(A\|X)$	在随机变量 X 条件下 A 的条件概率
$E^{\mathcal{F}}$ 或 $E(X\|\mathcal{F})$	在 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 条件下 X 的条件期望
$E^{\xi}X$ 或 $E(X\|\xi)$	在随机变量 ξ 条件下 X 的条件期望
$(x_k, \mathcal{F}_k)$	对一切 $k \geqslant 0$, x_k 对 $\mathcal{F}_k$ 可测
iid	独立同分布
A^+	阵 A 的伪逆
$a_n = o(b_n)$	$b_n > 0$ 且 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ $(n \to \infty)$
$a_n = O(b_n)$	$b_n \geqslant 0$ 且存在常数 $M > 0$ 使 $\|a_n\| \leqslant Mb_n, \forall n$
$a_n \sim b_n$	$\frac{a_n}{b_n} \to 1$ $(n \to \infty)$

第 5、10 章专用符号

$L^p(J;X)$	区间 J 到 Banach 空间 X 的 p 次可积抽象函数空间
$\mathcal{L}(X,Y)$	Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子空间
$\perp$	直交
$\sigma(A)$	算子 A 的谱 (集)
$\sigma_p(A)$	算子 A 的点谱
$\sigma_c(A)$	算子 A 的连续谱
$\sigma_r(A)$	算子 A 的剩余谱
$\sigma_e(A)$	算子 A 的本质谱
$\rho(A)$	算子 A 的正则集
$\mathcal{N}(A)$	算子 A 的零空间
$\mathcal{R}(A)$	算子 A 的值域

第 9 章专用符号

θ	未知参数向量
θ_t	时变参数或对定常参数的估计
$\tilde{\theta}_t$	参数向量估计误差
ϕ_t	线性模型中的回归向量
P_t	递推估计算法中的增益矩阵
LS	最小二乘
WLS	加权最小二乘
$\{\mathcal{F}_t\}$	非降的 σ- 代数序列
STR	自校正调节器
S^0	由一维非负随机序列组成的稳定激励类

S_p	L_p 指数稳定激励簇
LMS	最小均方算法
KF	Kalman 滤波型算法
y_t^*	被跟踪的参考信号

第 11 章专用符号

D	极大代数
$D^{m\times n}$	极大代数上 $m\times n$ 矩阵集
D^n	极大代数上 n 维向量集
$G(\boldsymbol{A})$	矩阵 A 的关联图
$\oplus$	极大代数上的加法：取极大
ϵ	表示 $-\infty$
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 A 的第 i 行第 j 列元
$\boldsymbol{A}_{i\cdot}$	矩阵 A 的第 i 行
$\boldsymbol{A}_{\cdot j}$	矩阵 A 的第 j 列
$\boldsymbol{\phi}$	元素全部为 $-\infty$ 的矩阵

目　　录

第 1 章　线性系统概论

线性系统理论是现代控制理论的基础，有许多这方面的专著 [6,7,9,11~15,17] 内容很丰富．本章讨论线性系统的基本理论，如系统的能控性、能镇定性、能观测性、能检测性、最小实现、能控能观标准形、极点配置、观测器理论、动态输出反馈控制、动态补偿器、带干扰补偿的动态补偿器、解耦控制、内模原理、二次线性最优控制等．内容主要来自文献 [6], [14].

1.1　线性代数基础

本节将给出一些在一般的线性代数教科书中不易找到但对线性系统理论又是必不可少的代数知识，如 Kronecker 积、矩阵函数、矩阵方程等．主要内容取自文献 [4], [5], [12], [16].

Kronecker 积

定义 1.1.1　对于任意两个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, 其 Kronecker 积 (又称张量积) 定义为

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

对 Kronecker 积，成立下列基本公式:

(a) **数乘**　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵，$\alpha \in \mathbb{C}$, 则

$$\alpha(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = (\alpha \boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes (\alpha \boldsymbol{B}).$$

(b) **分配律**　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上阶数相同的矩阵，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}),$$
$$\boldsymbol{C} \otimes (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{B}).$$

(c) **结合律**

$$\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C}.$$

(d) **转置**

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

(e) **混合积**　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{k\times m}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{p\times q}$, $\boldsymbol{D}\in\mathbb{C}^{q\times t}$, 则

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D})=\boldsymbol{AB}\otimes\boldsymbol{CD}.$$

(f) **逆**　对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 若 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在，则 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}$ 也存在，且

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}.$$

(g) **迹**　对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{tr}\boldsymbol{B}. \tag{1.1.1}$$

所谓矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的行展开，是将 $\boldsymbol{A}$ 的各行依次横排后转置得到的 mn 维列向量，列展开是将各列纵排得到的 mn 维列向量，即

行展开

$$V_r(\boldsymbol{A})\overset{\text{def}}{=\!=}[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{mn}]^{\mathrm{T}}; \tag{1.1.2}$$

列展开

$$V_c(\boldsymbol{A})\overset{\text{def}}{=\!=}[a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{mn}]^{\mathrm{T}}. \tag{1.1.3}$$

行展开和列展开有如下性质：

(I) **转置**

$$V_r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=V_c(\boldsymbol{A}),\quad V_c(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=V_r(\boldsymbol{A}).$$

(II) **积的展开**

对于三个矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times p}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{p\times q}$, 有

$$V_r(\boldsymbol{ABC})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})V_r(\boldsymbol{B}), \tag{1.1.4}$$

$$V_c(\boldsymbol{ABC})=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})V_c(\boldsymbol{B}). \tag{1.1.5}$$

矩阵求逆公式　有时用分块矩阵求逆的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是比较方便的. 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n_1+n_2 阶分块三角形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $\boldsymbol{A}_{22}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_2}$.

当 $\boldsymbol{A}_{11}^{-1}$, $\boldsymbol{A}_{22}^{-1}$ 存在时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{bmatrix},\quad 或\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & 0\\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{bmatrix}.$$