电磁理论中的并矢格林函数

戴振铎 鲁述 著

本书研究电磁理论中的并矢格林函数方法、基本理论及其在矩形、圆柱、劈、圆球、圆锥等典型边界和平面分层媒质、不均匀媒质、运动媒质等电磁场问题中的应用。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY
▸全国优秀出版社 ▸武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

本书获第十届中国图书奖

电磁理论中的并矢格林函数

戴振铎 鲁述 著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁理论中的并矢格林函数/戴振铎,鲁述著.—2 版.—武汉:武汉大学出版社,2005.5

(武汉大学学术丛书)

ISBN 7-307-04510-9

Ⅰ.电… Ⅱ.①戴… ②鲁… Ⅲ.电磁理论—格林函数 Ⅳ.O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033811 号

责任编辑:史新奎　　责任校对:王　建　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:880×1230　1/32　印张:11.375　字数:312 千字

版次:2005 年 5 月第 1 版　　2005 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04510-9/O · 318　　定价:20.00 元

前　　言

在求解电磁理论中各类边值问题时，并矢格林函数方法是一种有效的方法. 我在这方面的第一本专著是在 1971 年由国际教科书出版公司出版的. 在那本书中，有几个问题处理得不适当. 例如，关于并矢格林函数的分类，以及在各类并矢格林函数的本征函数展开中奇异项的遗漏. 作为一本经常为学术界所引用的书籍，有必要进行再版，第 2 版于 1994 年完成，并由电机电子工程学会印刷局出版.

在第 2 版完成之前，我还写了一本矢量和并矢分析方面的新书，并在 1992 年由电机电子工程学会印刷局出版. 书中介绍了表示散度及旋度的两个新算符. 但是，由于墨守原来的吉布斯符号，在那本书中我没有采用新的算符. 那本书出版之后，从一些非常认真的读者的反映中可以清楚地看到，我们早就应该使用新的算子符号，那样将有助于消除以往在矢量分析中的混淆和习染. 目前，我正在准备该书的第 2 版，以完成这项使命.

我在编写并矢格林函数专著第 2 版(英文版)时，曾想出版一本这方面的中文专著，以飨国内的青年学者. 武汉大学鲁述教授和他的同事们也有这种建议. 后来，我们决定出版现在的这一本书. 与英文版相比，除在内容上有所扩展，在编排上试图更适合国内的读者之外，这本书最主要的特点是采用了我提出的矢量分析的新算符. 我以为新算符的使用对于以后的学生的电磁理论及相关学科的学习将是非常有益的，为了方便读者，本书专门用一节的篇幅介绍新的符号矢量方法.

参加本书编著工作的还有武汉大学鲁述、徐鹏根、孙震宇、柯亨玉和中国科学院电子所宋文淼研究员. 武汉大学出版社史新奎副总

编为本书的出版做了大量工作.我非常高兴和他们一起在相当短的时间内完成本书的出版.

戴振铎

一九九五年六月

于密执安大学

目　录

第 1 章　电磁理论基础 …… 1

1.1　电磁理论中的"符号矢量"方法 …… 1

1.1.1　▽算子理论中的问题 …… 2

1.1.2　新算符▽和▽的引入 …… 5

1.1.3　"符号矢量"方法 …… 6

1.2　麦克斯韦方程组的独立方程和非独立方程，限定形式和非限定形式 …… 12

1.3　麦克斯韦方程组的积分形式 …… 14

1.4　边界条件 …… 16

1.5　自由空间中的简谐场 …… 21

1.6　位函数方法 …… 22

参考文献 …… 28

第 2 章　并矢格林函数 …… 30

2.1　麦克斯韦方程组的并矢形式，电型和磁型并矢格林函数 …… 30

2.2　自由空间并矢格林函数 …… 33

2.3　并矢格林函数的分类 …… 36

2.4　并矢格林函数的对称性 …… 47

2.5　互易定理 …… 57

2.6　辅助互易定理的传输线模型 …… 62

2.7　导电平面半空间的并矢格林函数 …… 65

参考文献 …… 67

第3章 矩形波导 …… 68
3.1 直角坐标系中的矢量波函数 …… 68
3.2 $\bar{\bar{G}}_m$ 方法 …… 75
3.3 $\bar{\bar{G}}_e$ 方法 …… 81
3.4 $\bar{\bar{G}}_A$ 方法 …… 85
3.5 平行板波导 …… 86
3.6 两种介质填充的矩形波导 …… 90
3.7 矩形腔 …… 95
3.8 $\bar{\bar{G}}_e$ 中孤立奇异项的来由 …… 99
参考文献 …… 102

第4章 圆柱波导 …… 104
4.1 具有离散本征值的圆柱波函数 …… 104
4.2 圆柱波导 …… 110
4.3 圆柱腔 …… 112
4.4 同轴线 …… 114
参考文献 …… 119

第5章 自由空间中的圆柱体 …… 120
5.1 具有连续本征值的圆柱矢量波函数 …… 120
5.2 自由空间并矢格林函数的本征函数展开 …… 122
5.3 导体圆柱、介质圆柱与介质覆盖导电圆柱 …… 125
5.4 近似表达式 …… 130
参考文献 …… 131

第6章 完纯导电椭圆柱体 …… 132
6.1 椭圆柱坐标系中的矢量波函数 …… 132
6.2 第一类电型并矢格林函数 …… 137
参考文献 …… 140

第 7 章 完纯导电劈和半片 …… 141
7.1 完纯导电劈的并矢格林函数 …… 141
7.2 半片 …… 145
7.3 半片存在时电偶极子的辐射 …… 146
7.3.1 轴向电偶极子 …… 146
7.3.2 水平电偶极子 …… 148
7.3.3 垂直电偶极子 …… 150
7.4 半片存在时磁偶极子的辐射 …… 154
7.5 半片上隙缝的辐射 …… 155
7.5.1 轴向缝 …… 157
7.5.2 水平隙缝 …… 157
7.6 半片对平面波的绕射 …… 164
7.7 圆柱和半片 …… 171
参考文献 …… 172

第 8 章 球形边界 …… 174
8.1 用球矢量波函数表示的自由空间并矢格林函数 …… 174
8.2 求不带奇异项的 $\overline{\overline{G}}_{e0}$ 的一种代数方法 …… 180
8.3 理想导体球和介质球的并矢格林函数 …… 187
8.4 导电球附近偶极子的辐射 …… 189
8.5 导电球上隙缝的辐射 …… 194
8.6 球形腔 …… 198
参考文献 …… 201

第 9 章 导电圆锥边界 …… 202
9.1 导电圆锥并矢格林函数 …… 202
9.2 锥面上偶极子天线的辐射 …… 206
9.3 导电圆锥对平面波的散射 …… 219
9.4 圆锥边界本征值的计算 …… 223
参考文献 …… 230

第 10 章　平面分层媒质 …… 232
10.1　平直地面…… 232
10.2　平直地面上电偶极子的辐射,索末菲公式 …… 235
10.3　导电平面上的介质层…… 240
10.4　分层媒质的互易定理…… 244
10.5　本征函数展开…… 251
10.6　空气中的介质片…… 256
10.7　并矢格林函数的二维傅立叶变换…… 258
参考文献…… 261

第 11 章　非均匀媒质和运动媒质 …… 263
11.1　平面分层媒质的矢量波函数…… 263
11.2　球面分层媒质的矢量波函数…… 267
11.3　非均匀球形透镜…… 269
11.4　运动的各向同性媒质中的简谐场…… 279
11.5　运动媒质中与时间相关的场…… 286
11.6　充有运动媒质的矩形波导…… 294
11.7　充有运动媒质的圆柱波导…… 299
11.8　运动媒质中的无限长导电柱体…… 302
参考文献…… 304

附录…… 307
A. 矢量分析和并矢分析 …… 307
A.1　矢量符号和坐标系 …… 307
A.2　正交坐标系中的梯度、散度和旋度 …… 310
A.3　矢量恒等式 …… 311
A.4　矢量积分定理 …… 312
A.5　并矢及其运算 …… 314
A.6　并矢的微分与积分公式 …… 317
B. 标量格林函数 …… 319

B.1 一维波动方程的标量格林函数——传输线理论 …… 319
B.2 用通常的方法和欧姆-瑞利方法推导 $g_0(x,x')$ …… 323
B.3 格林函数的对称性 …… 331
B.4 自由空间三维标量波动方程的格林函数 …… 333
C. 傅立叶变换和汉克尔变换 …… 335
D. 积分的鞍点法和贝塞耳函数乘积的半无限积分 …… 339
E. 矢量波函数及它们的相互关系 …… 344
E.1 直角矢量波函数 …… 344
E.2 具有离散本征值的圆柱矢量波函数 …… 346
E.3 球矢量波函数 …… 347
E.4 圆锥矢量波函数 …… 348
参考文献 …… 349

外国人名对照 …… 350

第 1 章　电磁理论基础

历史上,麦克斯韦的电磁理论是根据当时已有的基本实验定律创立的,他的主要贡献是引入了位移电流项,修改了安培定律,使其符合电流连续性方程和高斯定律. 本章不准备按照原来的历史发展过程来叙述这个理论,我们的叙述将着重于区别麦克斯韦方程组中的独立方程与非独立方程,并了解限定形式不同于非限定形式的重要意义. 另外,还将用旋度定理导出电场和磁场的边界条件,并温习一下以后各章所需的基础知识.

本书关于矢量分析的内容都采用戴振铎教授提出的"符号矢量"方法. 为了让读者对"符号矢量方法"的意义有所了解,并作为以后各章所需矢量分析知识的基础,本章将首先介绍电磁理论中的"符号矢量"方法,这一方法可用于任何工程学科和物理学科.

1.1　电磁理论中的"符号矢量"方法

矢量场论在电磁理论的教学和研究中是最基本的数学工具. 1873 年,当麦克斯韦的名著《电磁理论》发表的时候[1],他只在著作中部分地采用哈密顿于 1843 年建立的四元数论表达方式,并引入哈密顿算子 ∇ 以表达场的聚度(散度的负值)和旋度. 在麦克斯韦的理论形成若干年后,矢量场论开始发展起来,其中吉布斯和海维赛做了开创性的工作[2~3]. 他们的理论脱离了四元数论的思想和表达方式,奠定了矢量分析的基础. 由于矢量在物理上的直观性以及矢量分析在数学表述上的简洁明晰,使得矢量场论在物理学的各个分支均得到广泛应用,几乎凡是涉及场的学科都要用到矢量分析,故而有关这

门学科的书籍很多.从矢量分析建立至今的一百多年中,各种文字和版本的书已不下百种.一般认为矢量分析已是一门成熟了的学科,因为像梯度、散度和旋度等基本函数定义明确,高斯定理、斯托克斯定理等基本定理已经建立,其基本公式也都正确且有表可查.但是实际上,矢量分析这门学科中还有不少问题有待揭示和解决.因为在绝大多数情况下,其基本函数和基本定理以及运算都是通过 ∇ 算子及其与其他算子的组合表达的.而对于 ∇ 算子的运算法,电磁理论以及数学书籍中都难以找到系统的阐述和严格的论证,绝大多数的书籍和叙述都是在 ∇ 算子现有含义(海维赛和威尔逊[4] 等最初所赋予的含义)下写成的,从而导致 ∇ 算子在运算中出现许多矛盾和错误.历史上有不少数学家和物理学家也发现了其中的一些矛盾和错误,并在符号运算法上作过努力,如美国数学家穆恩和斯宾塞[5] 发现"虽然 ∇ 可以流利地处理矢量分析这门学科,但因为它经常给出不正确的结果,是一个不可靠的工具",他们在著作中用文字叙述方式取代用 ∇ 算子方式表达散度和旋度;又如中国著名数学家华罗庚[6]、前苏联著名数学家希洛夫[7]、柯青[8] 等都在符号运算法则上作过努力,但均没有能系统解决这一问题.

戴振铎教授对矢量场论作了全面的历史回顾,指出了至今仍存在于矢量分析中的混淆和错误,找到了产生错误的根源,并通过"符号矢量"方法,系统全面地建立起一套完善的矢量场的符号运算理论,澄清了矢量分析学科中长期存在的问题[9~12].

1.1.1 ∇算子理论中的问题

众所周知,在笛卡儿坐标系中,∇ 算子的定义如下

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.1}$$

式中:$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 代表沿三个正交坐标轴方向上的单位矢量,若用 x_1、x_2、x_3 取代坐标变量 x、y、z,用 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$ 取代单位矢量 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$,则(1.1)式可表示为

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

在目前通用的矢量分析中,都是利用上述 ∇ 算子表述矢量场的散度和旋度的,表达形式如下:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

在上述表示及演算中,首先是认为矢量的散度和旋度是算符 ∇ 与矢量形式的点乘(FSP) 和形式的叉乘(FVP),从以后的讨论可知这是错误的;其次,“$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\ \cdot$” 和“$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\times$” 都是没有意义的算符组合. 此外,认为$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是标量算子,因而可以越过点乘和叉乘符号,直接作用于矢量之上,这一步骤是没有理论根据的,因为数学上不存在 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\cdot = \cdot\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 和$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\times = \times\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 这样的命题.

笛卡儿坐标系中上述表示方式所造成的错误过去无人指出,以为结果没有问题. 实际上,结果是凑出来的,不是经推算而得到的. 如果这个错误很明显,则将散度和旋度看成是 ∇ 与矢量的点乘和叉乘的概念也不会流传如此之久. 但是,当散度和旋度在其他坐标系中用 ∇ 算符表达时,这种概念造成的错误便会逐渐暴露出来. 众所周知,从物理意义上讲,矢量的散度和旋度是不依赖于坐标系的选择的,算符“∇”和矢量符号“$\boldsymbol{F}$”的形式可用于任何坐标系中. 也就是说,如果 FSP 和 FVP 的概念正确,那么在任何坐标系中都可以将矢量的散度和旋度表示成算子 ∇ 和矢量 $\boldsymbol{F}$ 之间的点乘和叉乘.

在正交坐标系中,假定矢量的散度是一个点积,则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial v_i}\right)\cdot \boldsymbol{F} = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial F_i}{\partial v_i}. \tag{1.5a}$$

式中:$\nabla = \sum_i \dfrac{\hat{u}_i}{h_i}\dfrac{\partial}{\partial v_i}$. (1.5b)

h_i 是度量系数,$\hat{u}_i$ 是 i 坐标轴上的单位矢量,v_i 是相应的坐标变

量. 对于球坐标系,$\hat{u}_i = (\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$, $v_i = (r, \theta, \varphi)$, $h_i = (1, r, r\sin\theta)$,则 ∇ 算符与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的点乘积(标量积)为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial r}(F_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi). \tag{1.6}$$

而球坐标系中矢量 $\boldsymbol{F}$ 的散度用正确的方法求得为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi). \tag{1.7}$$

显然,$\nabla \cdot \boldsymbol{F} \neq \mathrm{div}\boldsymbol{F}$. 同样的运算也可说明 $\nabla \times \boldsymbol{F} \neq \mathrm{rot}\boldsymbol{F}$. 莫尔斯等[13] 在寻求正交曲线坐标系中散度和旋度算子的微分表达式时发现,若要用点乘和叉乘表达散度和旋度,则在正交曲线坐标系中,同一个算符 ∇ 表示梯度和散度,必须具有不同的形式,才能得到正确的结果,即

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial v_i} \quad (\text{对于梯度}), \tag{1.8a}$$

$$\nabla = \sum_i \frac{1}{\Omega}\hat{u}_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\right) \quad (\text{对于散度}). \tag{1.8b}$$

式中:$\Omega = h_1 h_2 h_3$. 而且要按下述计算步骤才能得到正确的散度结果,即

$$\left(\frac{1}{\Omega}\sum_i \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\right)\right) \cdot \boldsymbol{F} \to \frac{1}{\Omega}\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\hat{u}_i \cdot \boldsymbol{F}\right).$$

上述这些现象说明,不能用 ∇ 算符的同一形式(1.8a)式而只能用公式(1.8b)表示的另一形式,而且还要加上没有根据的规则才能得到散度表达式的正确结果. 更不可思议的是,根本找不到适合于正交曲线坐标系中旋度的 ∇ 算子表达式. 此外,按 FSP 和 FVP 的概念,还要对含 ∇ 的表达式规定一些运算方法和规则,用以推导和证明矢量恒等式或作必要的运算. 可是,问题在于通过这些运算虽然有时可以得到正确结果,但这不等于从数学上证明了这些运算规则的正确性,而且有时会出现错误结果. 下面的例子就可说明这一问题:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c - (\nabla \cdot \boldsymbol{A}_c)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

$$-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_c. \tag{1.9}$$

式中:下标 c 是表示该矢量对算子而言是常矢量.

上面第一步运算是把 ∇ 看成矢量,利用矢量恒等式得到;第二步是把 ∇ 看成微分符号,根据两函数乘积的微分法则得出.从所得结果看,$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ 不是 $(\mathrm{div}\boldsymbol{B})A$ 而是 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c$.其次,按规定 $\boldsymbol{B}_c$ 是常矢量,那么 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c=0$,结果是错误的,在传统的矢量分析中,为了避免这一错误,不得不规定算子 ∇ 必须作用于变矢量,故将 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}$ 改为 $(\boldsymbol{B}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$,这种处理虽然可以得到正确结果,但无合理的解释.

1.1.2 新算符▽和 ▽的引入

戴振铎教授通过分析 ∇ 算子应用于矢量场论中出现的问题,发现其错误的根源在于 ∇ 只是梯度算子,散度和旋度算子根本就不是 ∇ 与其他算子的复合.也就是说,散度和旋度算子与梯度算子 ∇ 是相互独立的.戴振铎教授引入了两个新符号▽和▽分别表示散度和旋度算子[9].在笛卡儿坐标系中,原有的梯度算子 ∇ 和引入的散度及旋度新算子分别定义为

$$\nabla=\sum_i\hat{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.10}$$

$$\nabla=\sum_i\hat{x}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.11}$$

$$\nabla=\sum_i\hat{x}_i\times\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.12}$$

在正交曲线坐标系中,▽、▽和▽分别定义为

$$\nabla=\sum_i\frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial v_i}, \tag{1.13}$$

$$\nabla=\sum_i\frac{\hat{u}_i}{h_i}\cdot\frac{\partial}{\partial v_i}, \tag{1.14}$$

$$\nabla=\sum_i\frac{\hat{u}_i}{h_i}\times\frac{\partial}{\partial v_i}. \tag{1.15}$$

▽、▽及▽算子具有不依赖坐标系选择的性质.

1.1.3 "符号矢量"方法

1. 基本定义及基本函数的表述

1988 年秋，戴振铎教授就曾指出，近百年来，为完善矢量分析所作的努力之所以失败，原因在于受 ∇ 符号原有涵义的限制. 要解决符号运算法问题，关键在于跳出 ∇ 的框框，引入新符号. 1991 年，戴振铎教授正式提出"符号矢量"方法，并于1992年作了进一步的分析和论证[10]，1995 年写成了专著[12]，形成了系统的理论. 其核心思想是引入符号矢量∇，并将∇的表达式 $T(\nabla)$ 定义为

$$T\,\nabla = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S T(\hat{n})\mathrm{d}S}{\Delta V}. \tag{1.16}$$

式中：ΔV 为任意小体积，S 是包围 ΔV 的表面积，$\hat{n}$ 是 S 面上小面元 $\mathrm{d}S$ 的单位外法矢. $T(\nabla)$ 是一个符号表达式，包含一个符号矢量∇，∇ 称为虚矢量. 将一个有意义的矢量表达式中的某矢量用符号矢量∇代替就得到一个符号表达式 $T(\nabla)$，例如 $T(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是一个矢量表达式，其具体形式为

$$\boldsymbol{ad},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{ab}),\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

将其中矢量 $\boldsymbol{d}$ 用符号矢量∇代替，就得到符号表达式 $T(\nabla,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的具体形式为

$$\boldsymbol{a}\,\nabla,\boldsymbol{a}\cdot\nabla,\boldsymbol{a}\times\nabla,\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}),\nabla\cdot(\boldsymbol{ab}),\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

(1.16) 式是"符号矢量"方法的基础，它表示一个物理量的行为在趋于某一点时的量值及空间特性. 这个物理量就是等号右侧被求极限的那个量，面积分中的核表示该物理量与封闭面 S 外法矢 $\hat{n}$ 的作用，其作用方式则由等号左侧符号表达式 $T(\nabla)$ 的具体形式来限定，符号矢量与物理量的作用方式就是积分核中单位外法矢 $\hat{n}$ 对物理量的作用方式. 可用笛卡儿坐标系为例说明这个问题. 选择 $T(\nabla) = \boldsymbol{F}\cdot\nabla$，那么 $T(\hat{n})$ 的形式就被限定为 $T(\hat{n}) = \boldsymbol{F}\cdot\hat{n}$，于是得到

$$\boldsymbol{F}\cdot\nabla = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S}{\Delta V} = \mathrm{div}\boldsymbol{F} = \sum_i \hat{x}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}. \tag{1.17}$$

如果选择 $T(\nabla)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}$,结果不变,因为 $\hat{n}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\cdot\hat{n}$. 因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\cdot\nabla=\nabla\boldsymbol{F}.$$

上面所得结论是很好理解的. 我们知道,矢量 $\boldsymbol{F}$ 穿过 S 面的通量与 ΔV 之比在 $\Delta V\to 0$ 时的极限称做 $\boldsymbol{F}$ 的散度,$\boldsymbol{F}$ 的通量是由 $\boldsymbol{F}$ 和 S 外法矢 $\hat{n}$ 的点乘在 S 面上积分得到的,这个作用正是通过符号矢量∇与 $\boldsymbol{F}$ 的点乘表达的,然后通过(1.16)式得到了 $\boldsymbol{F}$ 的散度,这是一种三维作用.

如果选择 $T(\nabla)$ 的形式为 $f\nabla$或∇f,由(1.16)式就可得梯度表达式

$$\nabla f=f\nabla=\nabla f. \tag{1.18}$$

如果选择 $T(\nabla)=\nabla\times\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}\times\nabla$,由(1.16)式可得到旋度表达式

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}\times\nabla=\nabla\boldsymbol{F}. \tag{1.19}$$

上述结果也是显而易见的,因为矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度是指 $\boldsymbol{F}$ 在某点的最大环量面密度,这是一种二维表现形式,实际上是三维作用在 ΔV 趋近零时的结果. 对三维体积 ΔV,$\boldsymbol{F}$ 沿表面的最大流量由 $\oiint_S\boldsymbol{F}\times\hat{n}\mathrm{d}S$ 算出,该量在除以 ΔV 之后随 ΔV 趋近零($\Delta V\to\Delta S, S\to l$)便逐渐过渡到二维的最大环量面密度. 这个作用正是通过符号矢量∇与 $\boldsymbol{F}$ 的叉乘表述的,然后通过(1.16)式得到了 $\boldsymbol{F}$ 的旋度. 同理,标量场 f 在某点的最大变化率的大小与方向即为 f 的梯度. 由 $\oiint_S f\hat{n}\mathrm{d}S$ 得到的是 f 增加最快的方向,即所谓的流量,取极限时就得到标量场 f 在该点的梯度 ∇f. 这个过程也是通过选择 $T(\nabla)=\nabla f$,然后由(1.16)式得到的. 对于矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的梯度 $\nabla\boldsymbol{F}$,也可按此思路求出.

由以上分析可知,符号矢量∇可以作为梯度算子 ∇、散度算子∇及旋度算子∇的生成矢量.

在正交曲线坐标系中,(1.16)式所定义的 $T(\nabla)$ 可通过计算而得到其表达式为[10]

$$T(\nabla)=\frac{1}{\Omega}\sum\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}T(\hat{u}_i)\right). \tag{1.20}$$