

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

微积分 学习辅导与习题选解



高等教育出版社

微积分

学习辅导与习题选解

同济大学应用数学系编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系编写的普通高等教育“十五”国家级规划教材《微积分》第二版(上、下册)配套的学习辅导书。全书按原教材的章节次序安排,每章按节(或相关的几节)编写了内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、例题增补、习题解析等栏目,针对学生在学习中的问题和需要进行答疑和辅导。全书对原教材中约三分之一的习题和大部分数学实验作了解答,并结合学生作业中的常见错误进行剖析指导。

本书内容切合学生实际、针对性强,注重帮助学生掌握微积分的基本知识、基本理论和基本技能,可作为工科和其他非数学专业学生学习高等数学的参考书,也可供使用《微积分》这一教材的教师作为教学参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导与习题选解/同济大学应用数学系编.

北京:高等教育出版社,2004.7(2005 重印)

ISBN 7-04-014387-9

I. 微... II. 同... III. 微积分-高等学校-教学参考资料 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048720 号

策划编辑 王 强 责任编辑 高尚华 责任绘图 郝 林
封面设计 王凌波 版式设计 胡志萍 责任校对 尤 静
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 7 月第 1 版
印 张	27.25	印 次	2005 年 1 月第 2 次印刷
字 数	510 000	定 价	28.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 14387-00

编写说明

本书是与同济大学应用数学系编写的“十五”国家级规划教材《微积分》(第二版)配套的学习辅导书。主要面向使用该教材的学生,也可供教师作教学参考。

全书按教材的章节顺序编排,与教学需求同步。以每节或联系紧密的相邻两节为一单元,按单元编写内容提要、教学要求和学习注意点、释疑解难、例题增补、习题解析等栏目,对学生进行辅导和帮助。书中的教学要求依据原国家工科大学数学课程教学指导委员会制定的工科本科高等数学课程教学基本要求确定,同时也根据教学实际作了少许修改。对教学要求的层次,也沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”来加以区分。各节的学习注意点是对学生的建议或提醒,而释疑解难和例题增补则是对教材的适当补充和提高。在增补的例题中,选取了少数历届工科硕士研究生入学考试试题,这些题在题末用圆括号标出考试年份。习题解析选出教材中较难并具有典型性的一小部分(约占 $1/3$),作出解答,有的还作了解法分析。每章末尾有该章总习题的选解,所选习题的数量约占 $3/5$ 。对教材中几乎所有的数学实验题,本书都提供了参考解答。

本书是在与《微积分》(第一版)配套的学习指导书(由同济大学应用数学系和武汉科技学院数理系合编)的基础上,作了较大幅度的修订而成的。参加此次编写的,有同济大学应用数学系的(按编写章节次序排列)郭镜明(第一、六章),应明(第二、四、九章),朱晓平(第五、七章和数学实验答案),邵国梁(第八章)。武汉科技学院数理系的黄光谷教授也参加了编写工作,他写了第三章。

本书的编写得到了同济大学教务处的“十五”规划教材项目的资助,我们对此表示深切的感谢。书中存在的问题和不足之处,恳请同行和读者不吝指正。

编者

2004年2月

目 录

预备知识	1
一、内容要点(1) 二、教学要求和学习注意点(1) 三、释疑解难(1)	
四、例题增补(2) 五、习题解析(3)	
第一章 极限与连续	7
第二、三节 数列极限的定义、函数极限的定义	7
一、内容要点(7) 二、教学要求和学习注意点(7) 三、释疑解难(7)	
四、例题增补(8) 五、习题解析(9)	
第四、五节 极限的性质、极限的运算法则	12
一、内容要点(12) 二、教学要求和学习注意点(13) 三、释疑解难(13)	
四、例题增补(15) 五、习题解析(17)	
第六节 极限存在准则与两个重要极限	20
一、内容要点(20) 二、教学要求和学习注意点(21) 三、释疑解难(21)	
四、例题增补(22) 五、习题解析(22)	
第七节 无穷小的比较	24
一、内容要点(24) 二、教学要求和学习注意点(25) 三、释疑解难(25)	
四、例题增补(27) 五、习题解析(27)	
第八、九节 函数的连续性与连续函数的运算、闭区间上连续函数的性质	29
一、内容要点(29) 二、教学要求和学习注意点(29) 三、释疑解难(29)	
四、例题增补(30) 五、习题解析(33)	
总习题一选解	36
第二章 一元函数微分学	44
第一节 导数的概念	44
一、内容要点(44) 二、教学要求和学习注意点(44) 三、释疑解难(44)	
四、例题增补(46) 五、习题解析(48)	
第二节 求导法则	50
一、内容要点(50) 二、教学要求和学习注意点(50) 三、释疑解难(51)	
四、例题增补(51) 五、习题解析(52)	
第三、四节 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数、高阶导数	53
一、内容要点(53) 二、教学要求和学习注意点(53) 三、释疑解难(54)	
四、例题增补(55) 五、习题解析(56)	
第五节 函数的微分与函数的线性逼近	60
一、内容要点(60) 二、教学要求和学习注意点(61) 三、释疑解难(61)	
四、例题增补(61) 五、习题解析(62)	

第六节 微分中值定理	63
一、内容要点(63) 二、教学要求和学习注意点(64) 三、释疑解难(64)	
四、例题增补(66) 五、习题解析(67)	
第七、八节 泰勒公式、洛必达法则	69
一、内容要点(69) 二、教学要求和学习注意点(69) 三、释疑解难(70)	
四、例题增补(72) 五、习题解析(74)	
第九节 函数单调性与凸性的判别方法	78
一、内容要点(78) 二、教学要求和学习注意点(78) 三、释疑解难(79)	
四、例题增补(80) 五、习题解析(82)	
第十节 函数的极值与最大、最小值	86
一、内容要点(86) 二、教学要求和学习注意点(86) 三、释疑解难(86)	
四、例题增补(87) 五、习题解析(88)	
第十一节 曲线的曲率	90
一、内容要点(90) 二、教学要求和学习注意点(90) 三、释疑解难(91)	
四、例题增补(91) 五、习题解析(92)	
总习题二选解	93
第三章 一元函数积分学	103
第一节 不定积分的概念及其线性法则	103
一、内容要点(103) 二、教学要求和学习注意点(103) 三、释疑解难(103)	
四、例题增补(104) 五、习题解析(105)	
第二节 不定积分的换元积分法	105
一、内容要点(105) 二、教学要求和学习注意点(105) 三、释疑解难(106)	
四、例题增补(107) 五、习题解析(107)	
第三节 不定积分的分部积分法	108
一、内容要点(108) 二、教学要求和学习注意点(109) 三、释疑解难(109)	
四、例题增补(111) 五、习题解析(112)	
第四节 有理函数的不定积分	113
一、内容要点(113) 二、教学要求和学习注意点(113) 三、释疑解难(114)	
四、例题增补(114) 五、习题解析(115)	
第五、六节 定积分、微积分基本定理	116
一、内容要点(116) 二、教学要求和学习注意点(116) 三、释疑解难(117)	
四、例题增补(118) 五、习题解析(120)	
第七节 定积分的换元法和分部积分法	123
一、内容要点(123) 二、教学要求和学习注意点(124) 三、释疑解难(124)	
四、例题增补(125) 五、习题解析(126)	
第八节 定积分的几何应用举例	128
一、内容要点(128) 二、教学要求和学习注意点(128) 三、释疑解难(128)	
四、例题增补(130) 五、习题解析(132)	

第九节 定积分的物理应用举例	135
一、内容要点(135) 二、教学要求和学习注意点(135) 三、释疑解难(136)	
四、例题增补(136) 五、习题解析(137)	
第十节 平均值	138
一、内容要点(138) 二、教学要求和学习注意点(139) 三、释疑解难(139)	
四、例题增补(140) 五、习题解析(140)	
第十一节 反常积分	141
一、内容要点(141) 二、教学要求和学习注意点(141) 三、释疑解难(141)	
四、例题增补(142) 五、习题解析(143)	
总习题三选解	144
第四章 微分方程	155
第一、二节 微分方程的基本概念、可分离变量的微分方程	155
一、内容要点(155) 二、教学要求和学习注意点(155) 三、释疑解难(155)	
四、例题增补(157) 五、习题解析(159)	
第三、四节 一阶线性微分方程、可用变量代换法求解的一阶微分方程	161
一、内容要点(161) 二、教学要求和学习注意点(161) 三、释疑解难(162)	
四、例题增补(164) 五、习题解析(166)	
第五节 可降阶的二阶微分方程	172
一、内容要点(172) 二、教学要求和学习注意点(172) 三、释疑解难(172)	
四、例题增补(173) 五、习题解析(175)	
第六节 线性微分方程解的结构	178
一、内容要点(178) 二、教学要求和学习注意点(179) 三、释疑解难(179)	
四、例题增补(181) 五、习题解析(182)	
第七节 二阶常系数线性微分方程	183
一、内容要点(183) 二、教学要求和学习注意点(184) 三、释疑解难(184)	
四、例题增补(185) 五、习题解析(186)	
总习题四选解	190
上册实验练习题解答	200
第五章 向量代数与空间解析几何	212
第一、二节 向量及其线性运算、点的坐标与向量的坐标	212
一、内容要点(212) 二、教学要求和学习注意点(212) 三、释疑解难(212)	
四、例题增补(213) 五、习题解析(215)	
第三节 向量的乘法运算	216
一、内容要点(216) 二、教学要求和学习注意点(216) 三、释疑解难(217)	
四、例题增补(219) 五、习题解析(220)	
第四、五节 平面、直线	221
一、内容要点(221) 二、教学要求和学习注意点(222) 三、释疑解难(222)	
四、例题增补(223) 五、习题解析(224)	

第六、七节 曲面与曲线、二次曲面	228
一、内容要点(228) 二、教学要求和学习注意点(229) 三、释疑解难(229)	
四、例题增补(230) 五、习题解析(231)	
总习题五选解	233
第六章 多元函数微分学	241
第一节 多元函数的基本概念	241
一、内容要点(241) 二、教学要求和学习注意点(241) 三、释疑解难(241)	
四、例题增补(243) 五、习题解析(244)	
第二、三节 偏导数、全微分	245
一、内容要点(245) 二、教学要求和学习注意点(245) 三、释疑解难(246)	
四、例题增补(247) 五、习题解析(248)	
第四节 复合函数的求导法则	251
一、内容要点(251) 二、教学要求和学习注意点(251) 三、释疑解难(251)	
四、例题增补(254) 五、习题解析(255)	
第五节 隐函数的求导公式	257
一、内容要点(257) 二、教学要求和学习注意点(257) 三、释疑解难(258)	
四、例题增补(259) 五、习题解析(261)	
第六节 方向导数与梯度	264
一、内容要点(264) 二、教学要求和学习注意点(264) 三、释疑解难(265)	
四、例题增补(266) 五、习题解析(266)	
第七节 多元函数微分学的几何应用	268
一、内容要点(268) 二、教学要求和学习注意点(268) 三、释疑解难(268)	
四、例题增补(270) 五、习题解析(271)	
第八节 多元函数的极值	272
一、内容要点(272) 二、教学要求和学习注意点(272) 三、释疑解难(273)	
四、例题增补(275) 五、习题解析(277)	
总习题六选解	280
第七章 重积分	286
第一、二节 重积分的概念与性质、二重积分的计算	286
一、内容要点(286) 二、教学要求和学习注意点(286) 三、释疑解难(287)	
四、例题增补(290) 五、习题解析(293)	
第三节 三重积分的计算	299
一、内容要点(299) 二、教学要求和学习注意点(299) 三、释疑解难(299)	
四、例题增补(301) 五、习题解析(303)	
第四节 重积分应用举例	306
一、内容要点(306) 二、教学要求和学习注意点(306) 三、释疑解难(306)	
四、例题增补(308) 五、习题解析(310)	
总习题七选解	313

第八章 曲线积分与曲面积分	319
第一节 数量值函数的曲线积分(第一类曲线积分)	319
一、内容要点(319) 二、教学要求和学习注意点(319) 三、释疑解难(319)	
四、例题增补(320) 五、习题解析(321)	
第二节 数量值函数的曲面积分(第一类曲面积分)	324
一、内容要点(324) 二、教学要求和学习注意点(324) 三、释疑解难(324)	
四、例题增补(327) 五、习题解析(329)	
第三节 向量值函数在定向曲线上的积分(第二类曲线积分)	332
一、内容要点(332) 二、教学要求和学习注意点(332) 三、释疑解难(332)	
四、例题增补(334) 五、习题解析(336)	
第四节 格林公式	338
一、内容要点(338) 二、教学要求和学习注意点(338) 三、释疑解难(339)	
四、例题增补(340) 五、习题解析(342)	
第五节 向量值函数在定向曲面上的积分(第二类曲面积分)	345
一、内容要点(345) 二、教学要求和学习注意点(345) 三、释疑解难(346)	
四、例题增补(348) 五、习题解析(349)	
第六、七节 高斯公式与散度、斯托克斯公式与旋度	351
一、内容要点(351) 二、教学要求和学习注意点(352) 三、释疑解难(352)	
四、例题增补(353) 五、习题解析(357)	
总习题八选解	361
第九章 无穷级数	367
第一节 常数项级数的概念与基本性质	367
一、内容要点(367) 二、教学要求和学习注意点(367) 三、释疑解难(367)	
四、例题增补(368) 五、习题解析(370)	
第二节 正项级数及其审敛法	371
一、内容要点(371) 二、教学要求和学习注意点(371) 三、释疑解难(371)	
四、例题增补(373) 五、习题解析(374)	
第三节 绝对收敛与条件收敛	378
一、内容要点(378) 二、教学要求和学习注意点(378) 三、释疑解难(378)	
四、例题增补(378) 五、习题解析(381)	
第四节 幂级数	382
一、内容要点(382) 二、教学要求和学习注意点(382) 三、释疑解难(383)	
四、例题增补(385) 五、习题解析(386)	
第五、六节 函数的泰勒级数、函数的幂级数展开式的应用	388
一、内容要点(388) 二、教学要求和学习注意点(388) 三、释疑解难(389)	
四、例题增补(391) 五、习题解析(393)	
第七、八节 傅里叶级数、一般周期函数的傅里叶级数	398
一、内容要点(398) 二、教学要求和学习注意点(398) 三、释疑解难(399)	

四、例题增补(400) 五、习题解析(402)

总习题九选解 405

下册实验练习题解答 417

预 备 知 识

一、内容要点

1. 集合的概念与表示法;集合的运算(并、交、差、直积);常见的几类实数集(区间、邻域、去心邻域).
2. 映射的概念及满射、单射、一一映射,逆映射和复合映射.
3. 函数的概念,函数的几种特性,反函数和复合函数,反函数存在的一个充分条件.
4. 函数的四则运算,五类基本初等函数,初等函数,双曲函数.

二、教学要求和学习注意点

1. 理解函数的概念及函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
2. 理解反函数和复合函数的概念.
3. 熟悉基本初等函数的性质和图形.
4. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

学习时应当注意,本节内容非常基本,正因基本,往往会被忽略.有些同学在学习微积分的过程中,常会发生一些基本概念方面的错误,究其根源,往往由于对本节内容未掌握好.比如有的同学对幂函数和指数函数的定义未切实掌握,导致以后对幂指函数求导时发生错误;有的同学对复合函数的记号如 $f(\sin x)$ 等未切实弄懂,结果导致复合函数求导与求积分时产生错误,等等.因此,尽管本节内容看来比较熟悉,属复习性质,也要认真领会和掌握.

三、释疑解难

1. 单调函数必存在反函数,不单调的函数是不是一定没有反函数?

答 不是的.函数 f 是不是存在反函数,取决于 f 是否为其定义域 D 到 $f(D)$ 的一一映射.如果是,则存在反函数,否则就不存在反函数.函数 f 在 D 上单调只是 f 为一一映射的一个充分而非必要的条件.例如函数

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{当 } -1 \leq x \leq 0, \\ x+1 & \text{当 } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上不单调(图 1(a)),但它存在反函数(图 1(b)):

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ x-1 & \text{当 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

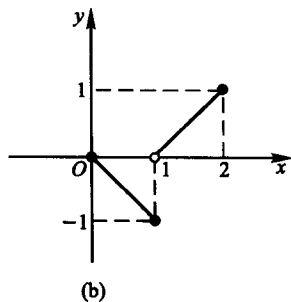
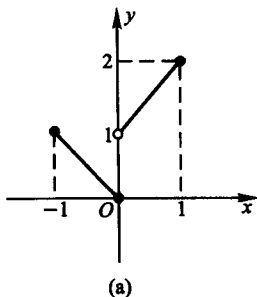


图 1

2. 对类似 $f(x+2)$, $f(\sin x)$ 这样的函数记号不大理解, 请解释一下.

答 $f(x+2)$ 、 $f(\sin x)$ 这样的记号都是表示复合函数的记号. 以 $f(x+2)$ 为例, 若令 $u = x+2$, 则函数 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u = x+2$ 复合而成的函数. 例如, 若设 $f(x+2) = x^2 + 2x + 3$, 则由于 $x^2 + 2x + 3 = (x+2)^2 - 2(x+2) + 3$, 故若令 $u = x+2$, 则 $f(u) = u^2 - 2u + 3$. 这就是说, $f(x+2) = x^2 + 2x + 3$ 是由 $f(u) = u^2 - 2u + 3$ 和 $u = x+2$ 复合而成的函数. 这类记号以后用得很多, 要注意掌握.

四、例题增补

例 1 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由题设和复合函数的定义可得 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 从而有

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)},$$

它的定义域是 $\ln(1-x) \geq 0$, 即 $1-x \geq 1$, 或 $x \leq 0$.

例 2 设 $f(x)$ 是增函数, 又对任意的 x , 函数 $g(x) \geq f(x)$, 证明:

$$f[f(x)] \leq g[g(x)].$$

证 对任意的 x , 由题设 $g(x) \geq f(x)$ 及 $f(x)$ 为增函数, 可得

$$f[f(x)] \leq f[g(x)];$$

而对于数值 $g(x)$, 由题设可知

$$g[g(x)] \geq f[g(x)],$$

从而推得: $\forall x, f[f(x)] \leq g[g(x)]$.

五、习题解析

(预备知识的习题,教材上册第16页)

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一个一一映射,则称 A 与 B 等势. 试说明下列数集是等势的:

(1) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$;

(2) 区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$.

解 (1) 令 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$, 使 $f(2k) = k, f(2k+1) = -(k+1) (k=0,1,2,3,\dots)$, 则 f 为 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Z}$ 之间的一一对应, 故 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Z}$ 等势.

(2) 令 $g: (1,2) \rightarrow (3,5), \forall x \in (1,2), g(x) = 2x+1$, 则 g 是 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 之间的一一对应, 故 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 等势.

6. 证明: 两个偶函数之积是偶函数, 两个奇函数之积是偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证 设 $f(x), g(x)$ 均为定义在 D 上的奇函数, 令 $F(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$, 则

$$\begin{aligned}\forall x \in D, F(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] \\ &= f(x) \cdot g(x) = F(x),\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为定义在 D 上的偶函数, 即两个奇函数之积为偶函数. 类似可证其他两个结论.

注 证明本题时, 同学作业中最常见的缺陷是漏写“令 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ ”这一步. 事实上, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积是一个新的函数, 应该用专门的函数记号将它表示出来, 然后再按偶函数的定义, 证明 $F(-x) = F(x)$.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任何函数, 证明:

证 设 $f(x)$ 为定义在区间 $(-l, l)$ 上的函数. 定义在区间 $(-l, l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

令 $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, x \in (-l, l), \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}, x \in (-l, l)$, 则由于

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x),$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -\psi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 上的偶函数, $\psi(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 上的奇函数, 且有

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

证毕.

9. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

$$(2) y = \begin{cases} x^3 & \text{当 } -\infty < x < 1, \\ 2^{x-1} & \text{当 } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

解 所给函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 故反函数存在, 且容易求得

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{当 } -\infty < y < 1, \\ 1 + \log_2 y & \text{当 } 1 \leq y < +\infty, \end{cases} \text{或写作: } y = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{当 } -\infty < x < 1, \\ 1 + \log_2 x & \text{当 } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

10. 作出下列函数的图形:

$$(2) y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right].$$

$$\text{解 } y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{当 } 2k \leq x < 2k+1, \\ 1 & \text{当 } 2k+1 \leq x < 2k+2, \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

其图象如下:

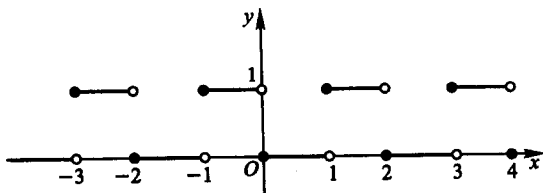


图 2

$$13. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |x| < 1, \\ 0 & \text{当 } |x| = 1, \\ -1 & \text{当 } |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x, \text{ 求 } f[g(x)] \text{ 和 } g[f(x)],$$

并作出这两个函数的图象.

$$\text{解 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 & \text{当 } |g(x)| = e^x < 1, \text{ 即 } x < 0, \\ 0 & \text{当 } |g(x)| = e^x = 1, \text{ 即 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } |g(x)| = e^x > 1, \text{ 即 } x > 0; \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e & \text{当 } |x| < 1, \\ 1 & \text{当 } |x| = 1, \\ e^{-1} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

图形由读者自己作出.

$$14. (1) \text{ 设 } f(x-2) = x^2 - 2x + 3, \text{ 求 } f(x+2).$$

解法 1 令 $u = x-2$, 得 $f(u) = u^2 + 2u + 3$, 从而

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^2 + 2(x+2) + 3 \\ &= x^2 + 6x + 11. \end{aligned}$$

解法 2 在所给表达式中, 令 $u = x-2$, 即 $x = u+2$, 则得

$$f(u) = (u+2)^2 - 2(u+2) + 3 = u^2 + 2u + 3,$$

从而

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x+2)^2 + 2(x+2) + 3 \\ &= x^2 + 6x + 11. \end{aligned}$$

实验题解析释疑

15. 利用计算机作函数的图形时, 必须注意选择好图形的显示区域. 若选择得不好, 则显示的图形不能充分表示出所求作的图形的特点, 甚至可能因机器误差而产生变形, 得出错误的图形. 试用 Mathematica 在计算机上作下列图形:

(2) $y = \sin 50x$, 显示区域分别取作

(I) $[-12, 12] \times [-1.5, 1.5]$;

(II) $[-9, 9] \times [-1.5, 1.5]$;

(III) $[-0.25, 0.25] \times [-1.5, 1.5]$,

试对显示的图形进行比较, 哪一个显示了真实的函数图形?

解 (2) 首先定义函数 $g(x) = \sin 50x$, 然后再作出它们的图形, 即键入

`g[x_] := Sin[50x]`

`Plot[g[x], {x, -12, 12}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}]`

`Plot[g[x], {x, -9, 9}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}]`

`Plot[g[x], {x, -0.25, 0.25}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}]`

易知图 3(c) 较好地反映了该函数的图形特点. 其原因是该函数是一个周期函

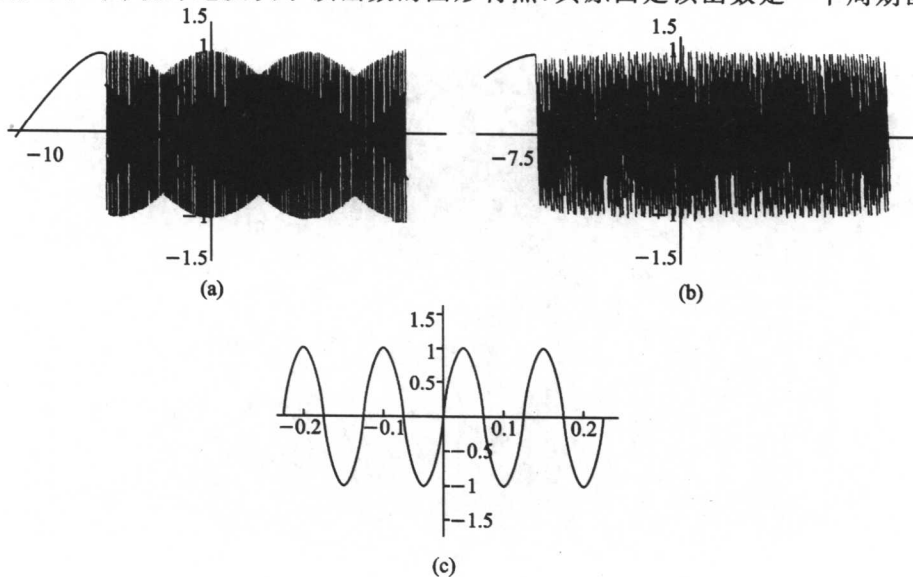


图 3

数,周期仅为 $\frac{2\pi}{50} \approx 0.126$,前两个区间包含了该函数相当多个周期((a)有近 200 个周期、(b)也有 140 多个周期),而在默认状态下“Plot”命令的采样点数为 25,在这么多的周期内,仅靠 25 个点无法连成正确的图形,如果提高采样点数则可得到较好的图形,读者可键入下列命令一试

```
Plot[g[x], {x, -9, 9}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}, PlotPoints -> 50]
```

第一章 极限与连续

第二、三节 数列极限的定义、函数极限的定义

一、内容要点

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义.
2. 函数在有限点处的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义以及在有限点处的左、右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的定义.
3. 函数在无穷大处的极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义及其几何意义(曲线 $y = f(x)$ 存在水平渐近线 $y = A$).
4. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的一个充分必要条件.
5. 一个重要结论:五类基本初等函数在其定义域内的每点处的极限都存在,且等于函数在该点处的值.

二、教学要求和学习注意点

1. 理解数列极限的概念,了解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义.
 2. 理解函数在有限点处的极限(包括左、右极限)的概念,了解极限的 $\epsilon-\delta$ 定义.
 3. 理解函数在无穷大处的极限的概念,了解极限的 $\epsilon-X$ 定义.
 4. 会用极限定义证明一些简单的数列或函数的极限.
- 学习本节时,主要是要理解极限的概念,懂得为什么 $\epsilon-N$ 定义、 $\epsilon-\delta$ 定义和 $\epsilon-X$ 定义,分别精确地刻画了数列和函数的极限.至于用这些定义来证明极限,只要求做简单的练习,做到书写过程正确,技巧方面不作过高的要求.

三、释疑解难

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 定义中的 N 是不是 ϵ 的函数?

答 N 与 ϵ 有关,但却不能说 N 是 ϵ 的函数.因为对给定的 $\epsilon > 0$,如果存在一个满足定义要求的 N_0 ,那么任何一个大于 N_0 的正整数都可作为 N .这就是