

下册

经典力学

JINGDIAN LIXUE

王其申 主编

中国科学技术大学出版社

经典力学

(下 册)

主 编 王其申

副主编 程绪和

编 委 安庆师范学院物理与电气

工程学院力学课程组

中国科学技术大学出版社

2005 · 合肥

内 容 简 介

本书的原稿是作者在开展打通普通物理力学和理论力学的教学改革试验时所用的讲义。全书共 11 章,分上下两册,特点是融会了原属普通物理力学和理论力学两门课程的内容,是一本真正做到合二为一的教材。本书内容精练,概念准确,注重物理方法的阐述、物理直觉能力的培养以及物理知识的现代化。

本书可作为师范类院校和综合性大学本科物理专业打通两门力学课程后的教材或参考书,也可供大专院校物理教师和物理教学研究工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

经典力学(上下册)/王其申主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2005.7
ISBN 7-312-01802-5

I. 经… II. 王… III. 经典力学—高等学校—教材 IV. 031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 0067772 号

凡购买中国科大版图书,如有白页、缺页、倒页者,由承印厂负责调换。

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,邮政编码:230026)

合肥远东印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:27 字数:657 千字

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—3 000 册

ISBN 7-312-01802-5/O · 309 定价(上下册):34.80 元

目 录

第七章 连续介质力学	1
§ 7.1 固体的弹性·内力和应力	1
(一) 固体的弹性 (二) 外力与内力 (三) 应力	
§ 7.2 直杆的拉伸和压缩	3
(一) 拉压直杆内的正应力 (二) 直杆的线应变 (三) 低碳钢拉伸试验和胡克定律	
(四) 拉伸和压缩时的变形能	
§ 7.3 连接件的剪切	8
(一) 剪切变形 (二) 剪应力与剪应变 (三) 剪切变形的胡克定律	
§ 7.4 扭转和弯曲	10
(一) 轴的扭转 (二) 梁的弯曲	
§ 7.5 流体静力学	14
(一) 理想流体 (二) 静止流体内的压强 (三) 重力场中静止流体内压强的分布	
(四) 大气压强 (五) 帕斯卡定律和阿基米德原理	
§ 7.6 流体运动学	20
(一) 描述流体运动的两种方法 (二) 定常流动 (三) 流线与流管	
(四) 连续性方程	
§ 7.7 伯努利方程及应用	23
(一) 伯努利方程 (二) 伯努利方程的应用	
§ 7.8 粘滞流体的流动	28
(一) 粘滞定律 (二) 粘滞流体的运动规律 (三) 层流和湍流	
(四) 泊肃叶公式 (五) 不可压缩粘性流体定常流动的能量关系	
§ 7.9 物体在流体中受到的阻力·机翼的升力	33
(一) 粘滞阻力 (二) 压差阻力 (三) 环流与升力	
阅读材料	36
7.1 压杆的稳定性	36
7.2 血液的流动	38
思考题	39
习题	41
第八章 振动	46
§ 8.1 简谐振动	46
(一) 弹簧振子和单摆的振动 (二) 简谐振动的动力学特征	
(三) 简谐振动的运动学特征 (四) 简谐振动的周期、频率、振幅和位相	
(五) 简谐振动的表示法 (六) 简谐振动的能量转换	

§ 8.2 振动的合成与分解	54
(一) 同方向同频率的两个简谐振动的合成 (二) 同方向不同频率简谐振动的合成	
(三) 互相垂直的同频率简谐振动的合成	
(四) 互相垂直不同频率简谐振动的合成·利萨如图形 * (五) 振动的分解	
§ 8.3 阻尼振动	61
(一) 运动微分方程及其解 (二) 过阻尼与临界阻尼	
§ 8.4 受迫振动	63
(一) 运动微分方程及其解 (二) 稳态解的振幅与位相	
(三) 位移共振与速度共振 (四) 受迫振动的能量转换	
§ 8.5 非线性振动	68
(一) 关于非线性振动 (二) 单摆在非线性回复力作用下的振动	
阅读材料	70
8.1 弹簧质量对弹簧振子系统固有频率的影响	70
8.2 品质因素	71
8.3 参数振动与自激振动	73
思考题	74
习题	74
第九章 波动	78
§ 9.1 波的基本概念·简谐波	78
(一) 波动现象 (二) 横波与纵波 (三) 波长、频率与波速的关系	
(四) 球面波和平面波 (五) 平面简谐波	
§ 9.2 波动方程和波速	84
(一) 一维波动方程 (二) 波速	
§ 9.3 波的能量和能流	87
(一) 波的能量 (二) 能量密度 (三) 平均能流密度	
§ 9.4 波的叠加·驻波	90
(一) 波的叠加 (二) 波的干涉 (三) 驻波及其能量	
(四) 驻波的获得·半波损失 (五) 简正模式	
§ 9.5 多普勒效应	95
(一) 波源静止, 观察者运动 (二) 观察者静止, 波源运动	
(三) 观察者和波源在同一直线上运动	
§ 9.6 声波	97
(一) 声波 (二) 声源 (三) 声压 (四) 气体中的声速	
(五) 声强与声强级 (六) 音调和音品	
阅读材料	101
9.1 马赫锥·激波	101
9.2 孤立波	103

9.3 超声波简介	104
思考题	105
习题	106
第十章 相对论基础	109
§ 10.1 牛顿时空观和伽利略变换	109
(一) 牛顿时空观 (二) 伽利略变换	
§ 10.2 力学相对性原理与光速	112
(一) 相对性原理与电磁学 (二) 迈克尔逊—莫雷实验 (三) 对牛顿力学的偏离	
§ 10.3 洛伦兹变换	115
(一) 爱因斯坦的基本假设 (二) 洛伦兹变换	
§ 10.4 狭义相对论的时空观	118
(一) 同时的相对性 (二) 运动的杆缩短 (三) 运动的时钟变慢	
§ 10.5 相对论的速度变换关系	122
(一) 相对论的速度变换关系 (二) 狭义相对论运动学的实验验证	
§ 10.6 相对论动力学	124
(一) 相对论中的动量·质速关系 (二) 相对论中牛顿第二定律的形式	
(三) 相对论中的能量·质能关系	
§ 10.7 广义相对论简介	128
(一) 广义相对论的基本原理 (二) 广义相对论的时空观	
(三) 广义相对论的实验验证	
阅读材料	134
10.1 爱因斯坦与他创立的相对论	134
思考题	135
习题	136
第十一章 分析力学	139
§ 11.1 约束和广义坐标	139
(一) 约束及其分类 (二) 广义坐标和自由度	
§ 11.2 虚功原理	142
(一) 实位移和虚位移 (二) 理想约束 (三) 虚功原理 (四) 虚功原理的应用	
§ 11.3 达朗贝尔原理·广义力	148
(一) 达朗贝尔原理 (二) 广义力	
§ 11.4 拉格朗日方程	153
(一) 拉格朗日方程 (二) 拉格朗日方程中的运动积分	
§ 11.5 多自由度系统的小振动	164
(一) 多自由度系统自由小振动的动能和势能	
(二) 运动方程及其解法 (三) 简正坐标	
§ 11.6 哈密顿正则方程	171

(一) 正则变量和正则方程	(二) 哈密顿函数	(三) 正则方程的第一积分	
(四) 正则方程应用举例			
§ 11.7 泊松括号			177
(一) 泊松括号及其性质	(二) 雅可比恒等式和泊松定理	(三) 泊松括号的应用	
§ 11.8 哈密顿原理			181
(一) 位形空间和相空间	(二) 运动路径和哈密顿作用量		
(三) 哈密顿原理	(四) 哈密顿原理与拉格朗日方程的等价性		
(五) 相空间中的哈密顿原理与正则方程			
§ 11.9 正则变换			189
(一) 正则变换	(二) 正则变换的条件·母函数	(三) 母函数的其他形式	
§ 11.10 哈密顿—雅可比方程			192
(一) 哈密顿—雅可比方程	(二) 哈密顿—雅可比方程的求解		
阅读材料			195
11.1 用拉格朗日方程处理电路问题			195
11.2 莫培督—拉格朗日最小作用量原理			198
思考题			202
习题			202
附录 A 习题参考答案			207
参考文献 (下册)			214

第七章

连续介质力学

在本书的上册，我们总把研究对象简化为“质点”或“刚体”这样的理想模型。不过，自然界的物质形态包括固态、液态、气态和等离子态，即使是固态物质，在外力的作用下，也会发生或多或少的变形，变形在许多实际问题中不可忽略。因此，研究固、液、气态物质在外力作用下的变形和运动规律也是力学的重要课题之一。

固体、液体和气体都由大量分子和原子所组成。但在宏观力学的范围内，一般不涉及物质的微观结构，而只是把它们当作充满所在空间的连续体来研究，这就是通常所谓的连续介质。研究连续介质在外力作用下的形变和运动规律的学科分支称为连续介质力学。

液体和气体通常统称为流体。由于固体在外力的作用下首先表现出微小的形变，而流体在外力的作用下通常表现为流动，二者对外力作用的反应有所差异，因此，本章首先介绍固体的弹性和4种基本变形，然后再介绍流体的平衡和运动规律。

§ 7.1 固体的弹性·内力和应力

(一) 固体的弹性

物体受到外力作用后都会发生或多或少的变形，包括物体形状和体积的变化。如果物体在所受外力撤消后，原由外力引发的形状和体积的变化能够完全消失，则这种变形叫做弹性变形。物体具有的这种性质，即在外力撤消后能够恢复原状的性质称之为弹性。具有弹性的物质称为弹性体。

如同“质点”、“刚体”模型一样，“弹性体”也是一种理想模型。完全的绝对的弹性体是不存在的，但通常的金属构件、房屋地基、水库的堤坝等在形变很小时，可以看作是弹性体。因此，在固体力学中通常在一定条件下将物体简化为弹性体这种理想模型，以讨论其变形的规律。

在弹性体内，各点弹性相同的叫做均匀弹性体。如果每点的弹性与方向无关，则叫作均匀各向同性的弹性体。本书仅限于讨论这种均匀各向同性的弹性体。

(二) 外力与内力

在研究物体的弹性时, 总离不开外力、内力、应力的概念.

对于所确定的研究对象, 外界对它的作用力称为外力. 在外力的作用下, 作为研究对象的物体会发生变形, 其内部各部分之间因反抗变形而产生的相互作用力称为内力.

如图7.1所示, 物体受外力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 作用而处于平衡状态, 为研究内力, 可在物体内取一假想截面 S , S 面将物体分为两侧, 两侧之间的相互作用力就是 S 面上的内力 N , 如图中空心箭头所示. 内力是和所选取的假想截面相对应的, 脱离了假想截面便无法谈内力. 内力不一定垂直于假想截面; 不同假想截面上的内力一般也有不同的大小和方向.

根据牛顿第三定律, 内力总是成对出现. 求内力的方法是隔离体法, 将图7.1中的左右两侧当作隔离体, 列出左侧或右侧隔离体的平衡方程式, 即可求出内力.

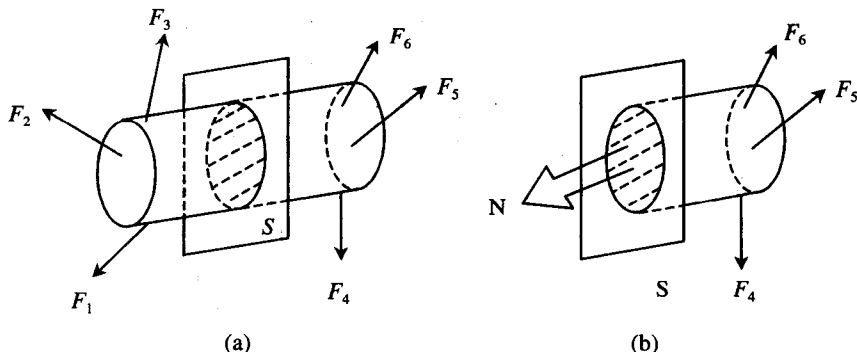


图 7.1

内力实际上是一种分布力, 它作用于整个假想截面. 将假想截面分成许多小部分, 每一小部分叫做假想面元, 每个假想面元上都有内力, 而且作用在各面元上的内力也不一定相同. 为了观察物体内部某一点 O 附近的内力, 可以过 O 点做一假想面元 ΔS , 面元两侧互相施以力的作用. 显然, 过 O 点的面元按不同方位可以有无穷多个, 为了确切指出我们所研究的面元, 可自受力一侧向施力一侧作一垂直于面元的单位矢量 n , 称为外法向单位矢量, 用它来确定面元的方位. 假想面元一经确定, 就可以讨论该面元上的内力了.

(三) 应力

内力不能完全说明物体内部的受力状态. 为描述物体内部各点内力的分布, 必须引入应力的概念.

如图7.2所示, 在面积为 ΔS , 法线方向为 n 的面元上作用有内力 ΔN , 则此内力 ΔN 与面元面积 ΔS 之比称为有向面元 ΔS 上的平均应力. 用 $\bar{p}$ 表示平均应力, 有

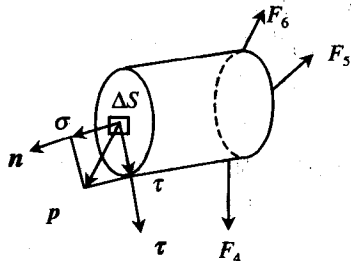


图 7.2

$$\bar{p} = \frac{\Delta N}{\Delta S} \quad (7.1.1)$$

将此式取极限，得

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} \quad (7.1.2)$$

由此式定义的矢量 p ，即作用于物体某点处某有向面元的平均应力。当面元面积趋于零时的极限，叫做该无穷小有向面元上的应力。

应力一般不垂直于无穷小面元，因此可将它投影到与面元平行及垂直的两个方向上。应力沿无穷小有向面元法线方向的投影叫做正应力，通常用“ σ ”表示。 σ 的正负号分别表示有向面元某一侧受到另外一侧的拉力或压力。应力沿无穷小有向面元平行方向的投影叫做剪应力，通常用“ τ ”表示， τ 的符号和下面所讨论的问题关系不大。

国际单位制中应力的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ，称为“帕斯卡”，简称“帕”，符号为“Pa”。在工程实际问题中，应力的常用单位为 MPa ($=10^6 \text{Pa}$) 和 GPa ($=10^9 \text{Pa}$)。应力的量纲是 $\dim p = \text{L}^{-1} \text{MT}^{-2}$ 。

§ 7.2 直杆的拉伸和压缩

研究一般弹性体的变形成因及其规律的力学分支称为弹性力学。限于时间，我们不拟介绍一般弹性体的变形，而只介绍最简单的一维模型——直杆的变形。横截面积均匀、具有几何对称轴且为直线的构件称为直杆。直杆在外力作用下的变形通常分为四种，即拉伸压缩、剪切、扭转和弯曲。本节讨论直杆的拉伸和压缩变形。

(一) 拉压直杆内的正应力

在生活中，常见直杆两端受到沿轴线的力且处于平衡，如图7.3 (a) 所示。对直杆整体来说，这一对拉力或压力 F 和 F' 是外力。设想在直杆上某位置作与轴线相垂直的假想截面 AB 而将直杆分成左右两部分，左、右两部分之间通过假想截面相互施以拉力（或压力） N 和 N' 如图7.3 (b)，这对作用力就是内力。

工程实际中的杆件所受外力往往比自身重量大得多，在不计自重的情况下，根据平衡条件，内力和外力大小相等，即

$$N = F \quad (7.2.1)$$

考察直杆上任意位置处与杆件轴线垂直的假想截面上的拉伸（或压缩）正应力。一般说来，该截面上各处应力不同，当杆的横向尺寸比其长度小很多，且假想截面离两端较远时，则可认为直杆横向假想截面上应力的分布是均匀的，拉伸（或压缩）正应力 σ 可以表示为：

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (7.2.2)$$

这里, S 表示横截面的面积. $\sigma > 0$ 时是拉伸正应力; $\sigma < 0$ 时是压缩正应力.

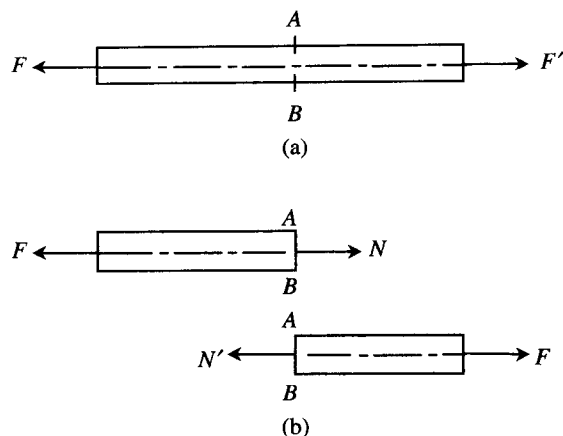


图 7.3

在工程实际问题中, 构件允许使用的最大正应力称为许用正应力, 记作 $[\sigma]$. 显然, 为了保证安全, 实际的工作应力不能超过许用正应力, 即

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq [\sigma]$$

由此即可解决工程上的强度校核、许用荷载计算和截面设计等3类应用问题.

(二) 直杆的线应变

我们进一步讨论如何描述直杆在轴向外力作用下的变形.

如图7.4, 等直杆的原长为 l_0 , 在轴向外力作用下发生拉伸或压缩变形, 变形后长度变为 l , 则杆件沿轴向的变形量为

$$\Delta l = l - l_0$$

称为杆的绝对变形, $\Delta l > 0$ 和 $\Delta l < 0$ 分别表示绝对伸长和绝对压缩.

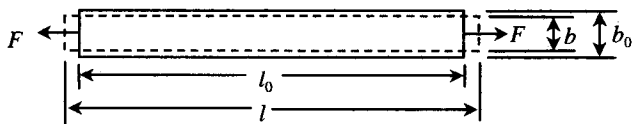


图 7.4

绝对变形不能完全反映变形的程度, 同样伸长 0.01 m 但原长不同的杆, 其变形程度显然不同. 因此, 人们常用相对变形来描述变形程度. 绝对变形与原长之比称为相对变形, 又叫线应变, 用 “ ε ” 表示, 即

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.2.3)$$

ε 遵循拉正压负的符号规则，即拉伸时为正而压缩时为负。线应变是无量纲量。

如同应力一样，线应变也是个局部的概念，不仅可就整个直杆而且对它的每一元段乃至各点均可以讨论其线应变。各元段的线应变一般说来也不一定相同。

直杆拉伸或压缩时，还会产生横向变形。直杆沿轴向拉伸时，横向收缩；直杆沿轴向压缩时，横向膨胀。设 b_0 为直杆横截面的标志尺度（如正方形的边长，圆的半径等），横向变形后变为 b ，则横向线应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{b - b_0}{b_0} = \frac{\Delta b}{b_0}$$

理论与实验均表明， ε_1 的绝对值小于纵向线应变 ε 的一半。横向应变与纵向应变之比的绝对值称为泊松比，用 μ 表示，

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \tag{7.2.4}$$

它是描写物质弹性特征的一个重要物理量。常见材料的 μ 值见表7.1。

表7.1 泊松比的数值

材料名称	μ	材料名称	μ	材料名称	μ
钢	0.25~0.33	铅	0.45	混凝土	0.08~0.18
铜	0.31~0.34	铝	0.32~0.36	橡胶	0.47
铸铁	0.23~0.27	玻璃	0.25	胶合板	0.07

（三）低碳钢拉伸试验和胡克定律

拉伸试验是测定材料的弹性特征（也叫机械性能）的专门性实验，它是在专用材料试验机上进行的。把材料制成试件装上专用材料试验机后，施以轴向拉力，观察试件从开始受力到拉断的全过程中的表现，确定试件变形与受力之间的关系，由此测定材料机械性质的各项指标。由于低碳钢是最常见的工程材料，它的机械性质又有代表性，这里只介绍低碳钢拉伸试验。

含碳量在0.3%以下的碳素结构钢称为低碳钢。把低碳钢制成试件装上试验机后，缓慢均匀加载。拉力 P 的数值可从试验机的示力盘上读出，对应每一拉力 P ，可以测出试件在标距 l 内的伸长量 Δl 。以拉力 P 和伸长量 Δl 为纵、横坐标，根据试验测得的一系列数据，作图表示 P 和 Δl 的关系，所得图线称为 $P-\Delta l$ 曲线。 $P-\Delta l$ 曲线通常由试验机上的自动绘图装置自动绘制，也可手工绘制。

$P-\Delta l$ 曲线与试件的尺寸有关。为了反映材料本身的性质，必须消除试件尺寸的影响，把拉力 P 除以试件横截面的原始面积 S ，化为试件横截面上的正应力 σ ；而把伸长量 Δl 除以标距 l ，化为试件在工作段内的应变 ε 。以 σ 为纵坐标， ε 为横坐标，画出的 $\sigma-\varepsilon$ 曲

线称为应力—应变图，参见图7.5。根据试验结果，低碳钢大致有下列性质：

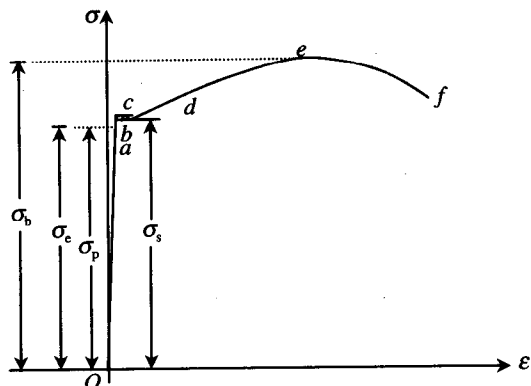


图 7.5

1. 弹性阶段

在拉伸的初始阶段， σ 和 ϵ 的关系为直线 Oa ，表明在这一阶段内 σ 和 ϵ 成正比。直线 Oa 的顶点 a 所对应的应力称为比例极限，用 σ_p 表示。所以，当应力低于比例极限时，应力与应变成正比，即

$$\sigma = Y\epsilon \quad (7.2.5)$$

这就是拉伸或压缩的胡克定律，式中 Y 是与材料有关的比例常数，称为弹性模量。因为应变没有量纲，所以 Y 与 σ 有相同的单位和量纲，其单位一般采用 GPa 。由图7.5还可以看出， Y 是直线部分 Oa 的斜率。

超过比例极限 σ_p 后，从 a 点到 b 点， σ 与 ϵ 的关系不再是直线，但变形仍然是弹性的，即解除拉力后变形将完全消失。 b 点所对应的应力是材料只出现弹性变形的极限值，称为弹性极限，用 σ_e 表示。在 σ - ϵ 曲线上， a 、 b 两点非常接近，所以工程上对弹性极限和比例极限并不严格区分。因而也常说，应力低于弹性极限时，应力与应变成正比。

在应力超过弹性极限后再解除拉力，试件的变形不再全部消失，而将遗留下部分变形不能消失。遗留下来不能消失的这部分变形称为塑性变形。

2. 屈服阶段

应力超过 b 点后，在 σ - ϵ 曲线上出现一段接近水平线的小锯齿形线段。这种应力变化不大而应变显著增加的现象称为屈服或流动。屈服阶段内的最低应力称为屈服极限，用 σ_s 表示。在这个阶段中，磨光的试件表面将出现与轴线大致成 45° 倾角的条纹，称为滑移线。进一步的理论分析表明，屈服现象是由最大剪应力所引起，微观机制上则是由于材料内部晶格之间产生滑移而形成的。

在屈服阶段，材料将出现显著的塑性变形。所以屈服极限是衡量弹性材料强度的一个重要指标。

3. 强化阶段

过了屈服阶段后，材料又恢复了抵抗变形的能力，增加拉力才能使它继续变形，这种

现象称为材料的强化。强化阶段中的最高点 e 所对应的应力，是材料所能承受的最大应力，称为强度极限，用 σ_b 表示，它是衡量弹性材料强度的又一重要指标。在强化阶段中，试件的横向尺寸有明显的缩小。

4. 局部变形阶段

过 e 点后，在试件的某一局部范围内，横向尺寸将突然急剧缩小，这种现象称为颈缩现象。由于颈缩部分的横截面积迅速减小，试件继续伸长所需的拉力也相应减少，用横截面原始面积算出的应力也随之下降。降落到 f 点时，试件被拉断。

表7.2 各种材料的弹性模量

材 料	弹性模量 (GPa)	材 料	弹性模量 (GPa)
低碳钢	190~210	有机玻璃	2~3
高碳钢	210~220	赛璐珞	1.5~2.5
铸 铁	80~160	橡 胶	8
铜	90~140	混凝土	15~30
铝	70~75	砌 砖	2.5~3
玻 璃	50~60		

以上我们介绍了低碳钢拉伸试验的全过程。其他材料的拉伸试验过程大致相似，只是有的材料没有明显的屈服阶段。对于没有明显屈服阶段的塑性材料，通常以产生0.2%的塑性应变时所对应的应力作为屈服极限，并称为名义屈服极限，用 $\sigma_{0.2}$ 表示。

需要指出的是，上面叙述的胡克定律是胡克 (R.Hooke, 1635~1702) 于1678年从实验中总结出来的，它也适用于其他弹性体。只是材料不同，弹性模量也不同。表7.2给出了一些常用材料弹性模量的大约数值。

(四) 拉伸和压缩时的变形能

当外力迫使弹性体产生变形时，反抗变形的弹性内力和弹簧的弹性力相似，也是保守力，因而拉压变形的弹性体也具有弹性势能，称为变形能。根据保守力的功与势能的关系，杆件具有的变形能等于弹性内力做功的负值。我们来求直杆拉伸或压缩过程中的变形能。

由于直杆拉伸或压缩过程中的变形量 ξ 是一个渐进量，在外力缓慢均匀加载的条件下，它从0逐渐增加到 Δl ，在此过程中，胡克定律可以写作

$$F = YS \frac{\xi}{l_0}$$

根据变力做功的公式，外力的功为

$$A = \int_0^{\Delta l} F d\xi$$

将 F 的表达式代入此式并忽略变形过程中横截面积 S 的变化，积分得

$$A = \frac{YS}{l_0} \int_0^{\Delta l} \xi d\xi = \frac{1}{2} Y \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 S l_0$$

当外力拉（压）杆件时，外力的功与弹性体反抗变形而产生的弹性内力所做的功大小相等而符号相反。因此，杆件所具有的变形能等于自势能零点开始外力所做的功。通常规定未变形时杆件所具有的弹性势能为零，于是

$$E_p = \frac{1}{2} Y \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 S l_0$$

式中 $\Delta l/l_0$ 就是应变 ϵ ， $S l_0$ 则是直杆变形前的体积 V ，所以拉（压）变形的直杆具有的变形能为

$$E_p = \frac{1}{2} Y \epsilon^2 V \quad (7.2.6)$$

直杆的拉（压）变形发生于整个杆件内，因此，拉（压）变形的直杆具有的变形能分布于直杆全部体积内。当杆均匀变形时，变形能也均匀地分布于直杆中。杆件单位体积内储存的变形能称为**变形能密度**，用 E_p^0 表示。显然

$$E_p^0 = \frac{1}{2} Y \epsilon^2 \quad (7.2.7)$$

可见，对于一定物体，单位体积内拉（压）变形的变形能与应变平方成正比。

§ 7.3 连接件的剪切

（一）剪切变形

当物体受到一对大小相等、方向相反、作用线互相平行且相距很近的外力作用时，二力之间的物质层发生相对错动，这种变形叫做**剪切变形**，它是物体的基本变形之一。剪切变形多发生于两个构件之间的连接件，如图7.6所示。图7.6（a）示意两块钢板之间的铆钉

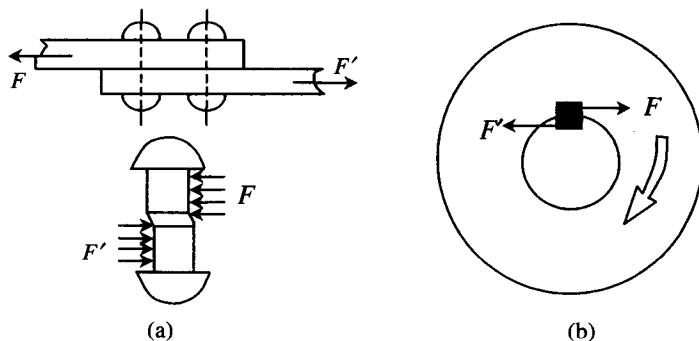


图 7.6

连接, 当上下两块钢板受到一对等大反向的拉力作用时, 铆钉杆便受到垂直于杆轴的平行而反向的分布力, 使铆钉上下两部分相互错移而发生剪切形变。使用剪刀时, 被剪物体的受力情况和所发生的变形, 也属于这一类型。图7.6 (b) 示意轮与轴之间的键联接, 轮轴一道旋转时, 轮上的键槽对键施以力 F , 轴上的键槽对键施以方向相反的力 F' , 在这一对力的作用下, 键发生剪切变形。

(二) 剪应力与剪应变

剪切变形过程中的内力称为剪力, 用 Q 表示。为了确定剪切变形过程中的内力, 我们同样可以使用隔离体法, 在图7.6所示的连接件都只有一个剪切面的情况下, 容易求得

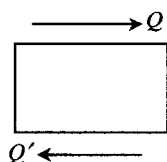
$$Q = F$$

剪力确定以后, 为了确定剪切变形过程中的应力, 从发生剪切变形的弹性体内取出一长方体微元作为研究对象, 它的边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz , 如图7.7所示。为简单起见, 设此隔离体表面仅受切向作用力, 因而仅有剪切内力。设上下底面积均为 S , 各受剪力 Q 及 Q' , 且 $Q = -Q'$, 当内力在上下底面上均匀分布时, 剪切应力为

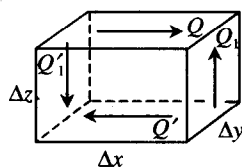
$$\tau = \frac{Q}{S} \quad (7.3.1)$$

显然, 图7.7 (a) 中的隔离体仅受两力是不能保持平衡的, 要想保持平衡, 左右两侧表面上也应受到另一对力 $Q_1 = -Q'_1$ 的作用, 如图7.7 (b) 所示。根据力偶矩的平衡条件, 应有

$$Q \cdot \Delta z = Q_1 \cdot \Delta x$$



(a)



(b)

图7.7

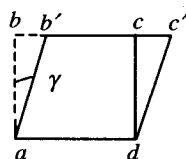


图7.8

用 τ 和 τ' 分别表示上下底面和左右两侧的剪切应力, 即有

$$(\tau \cdot \Delta x \Delta y) \cdot \Delta z = (\tau' \cdot \Delta y \Delta z) \cdot \Delta x$$

由此可得

$$\tau = \tau' \quad (7.3.2)$$

这说明, 作用于互相垂直的假想截面上并垂直于该两截面交线的剪应力是相等的。这就是著名的剪应力互等定律。

既然剪切变形表现为平行截面间的相对错移, 如图7.8所示, 则可以把相对错移 $bb' = cc'$ 作为剪切变形的特征; 显然, 两平行截面间发生的相对错移 bb' 与两平行截面间的距离

有关。因此，我们定义平行截面间相对错移与其垂直距离之比为**剪切应变**。由图7.8可知，

$$\tan \gamma = \frac{bb'}{ab}$$

由于通常的变形都很小，则 $\tan \gamma \approx \gamma$ ，故剪切应变可以表示为

$$\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (7.3.3)$$

剪切应变 γ 又称为剪切角，它也是一个无量纲量。

(三) 剪切变形的胡克定律

实验结果表明，在弹性限度内，剪切应力与剪切应变成正比，即

$$\tau = G\gamma \quad (7.3.4)$$

式中 G 是由材料弹性决定的比例系数，称为**剪切模量**，上式称作剪切变形的胡克定律。与杨氏模量相似，剪切模量反映材料抵抗剪切变形的能力，其单位与杨氏模量相同。

对于各向同性的均匀弹性体，利用弹性理论可以严格的证明，其杨氏模量，剪切模量和泊松比之间存在如下关系

$$G = \frac{Y}{2(1+\mu)} \quad (7.3.5)$$

即描述弹性体性质的3个物理量 Y 、 G 和 μ 只有两个是独立的。

仿照导出式 (7.2.8) 的方法，可以求出剪切变形的变形能密度为

$$E_p^0 = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (7.3.6)$$

即对于一定材料，单位体积内的剪切变形能与剪切角的平方成正比。

§ 7.4 扭转和弯曲

除拉伸压缩和剪切变形外，还有两种常见而又重要的变形，即轴的扭转和梁的弯曲。限于时间，对这两种基本变形我们只略做介绍。

(一) 轴的扭转

圆柱体受到在其两个端面上的等大反向并沿轴线方向的力偶矩作用时，所发生的形变称为扭转变形，如图7.9所示。这方面的例子很多，例如车船上的传动轴，钻床上的钻杆以及卡文迪许扭称中的石英丝等。

实验发现，圆轴发生微小扭转变形时，圆柱体的所有轴向纤维仍近似地是一条直线，只是倾斜而与轴线成一定角度，如图7.9 (b) 所示；其横截面仍保持为平面，且形状和大小保持不变，半径仍保持为直线，即遵循所谓平面假设。按此假设，圆轴各横截面间距离