双重丛书

高等数学

重点内容重点题

崔荣泉 褚维盘 赵彦晖 杨泮池

西安交通大学出版社

高等数学
重点内容重点题

崔荣泉　褚维盘
赵彦晖　杨泮池

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是学习“高等数学”课程的辅导书，突出本课程的重点内容和重点习题是本书的特点。本书的宗旨是，用较短的篇幅总结全面的内容，用较少的时间掌握核心的知识。

本书主要由：重点内容提要、重点例题分析和精选考研试题解析，三部分组成。在各章重点内容部分，系统地归纳了本章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在重点例题分析部分，选择了能巩固本课程内容的重点例题；在精选考研试题解析部分，挑选了历年硕士研究生人学考试的各种类型的试题。

本书适合学习“高等数学”课程的本、专科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学重点内容重点题 / 崔荣泉等编著 .—西安：西安交通大学出版社，2004.4

(双重丛书)

ISBN 7-5605-1772-2

Ⅰ.高… Ⅱ.崔… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 098800 号

书　名	高等数学重点内容重点题
编　著	崔荣泉　褚维盘　赵彦晖　杨泮池
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　刷	陕西向阳印务有限公司
字　数	357 千字
开　本	890mm×1240mm　1/32
印　张	11.875
版　次	2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　数	0 001～5 000
书　号	ISBN 7-5605-1772-2 / O·201
定　价	16.00 元

前　言

高等数学是高等理工科院校最重要的基础课之一，为学好高等数学，一方面要深入理解一些基本概念，掌握一些基本理论和基本方法，另一方面又要通过解证一定数量的习题来检验、巩固和进一步掌握所学的内容，对课内知识进一步的加深和拓广，有益于提高自己的能力和创新精神。为此，我们特别为一般高等院校的学生，按照国家教育部颁布的《高等数学课程基本要求》编写了这本书。书中除对重点内容作了详细提要外，还精选了一些重点例题和一些考研题目，除给出详尽的解答外，许多题目还作了分析和注解，主要是点出解题的思路、关键和技巧，另外每章还配置了一些自测题，希望使用本书时，能边阅读、边思考、边动手推导，以达学以致用、举一反三的目的。

参加本书编写的有崔荣泉、褚维盘、赵彦晖和杨泮池，全书由崔荣泉统稿。

限于作者的水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004.3

目　录

第 1 章　函数 极限 连续

1.1　基本要求

(1) **理解函数的概念**,了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(2) **理解复合函数的概念**,了解反函数的概念.

(3) **掌握基本初等函数的性质及其图形**.

(4) 会建立简单实际问题中的函数关系式.

(5) **理解极限的概念**(对极限的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε 求 N(或 δ) 不作过高要求.)

(6) **掌握极限四则运算法则**,了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

(7) 了解无穷小、无穷大及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

(8) **理解函数在一点连续的概念**,了解间断点概念,会判断间断点类型.

(9) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大、最小值定理).

1.2　重点内容提要

1.2.1　函数

1. 函数概念

(1) 确定函数有两个要素:定义域和对应法则.函数与自变量和因变量用什么符号无关.当两个函数的这两个要素都相同时才能认为它们相同.

函数的表示法通常有三种：公式法、图形法、表格法．高等数学中常用公式法．

(2) 用公式 $y=f(x)$ 表示函数时，f 是对应法则，也是函数记号，它相当于对括号"()"中的变量进行"加工"．例如，若 $f(x)=x^2+x+\sin x+5$ 时，则

$$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)+\varphi(x)+\sin\varphi(x)+5.$$

注　正确理解对应法则或函数记号，对理解并求复合函数特别重要．

2．函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性

(1) 并非一切函数都有这些性质．有界性和单调性都必须指明是在怎样一个区间上函数具有这些性质．

(2) 奇、偶函数的定义域都是关于坐标原点对称的．若 $f(x)$ 为奇函数，则当其在 $x=0$ 有定义时，一定有 $f(0)=0$．奇函数的图形关于坐标原点是对称的；若 $f(x)$ 为偶函数，则当其在 $x=0$ 有定义且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 有切线时，切线一定平行于 x 轴，偶函数的图形关于 y 轴是对称的．若 $f(x)$ 定义在关于原点对称的区间上，则 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数，从而 $f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\psi(x)]$．

(3) 周期函数的定义域一定是无界的，其周期通常指最小正周期，例如，$\sin x$ 的周期为 2π，而 $|\sin x|$ 的周期为 π．但并非每一周期函数都有最小正周期，例如，常数函数就没有最小正周期．

3．复合函数、分段函数、反函数、隐函数

(1) 复合函数　几个函数能否复合成一个函数是有条件的；复合后的函数定义域可能减小；有的函数无法复合．另外，复杂的函数可分解为简单函数的复合．比如 $y=f(u), u\in I_1, u=\varphi(x), x\in I_2, V=\{u\,|\,u=\varphi(x), x\in I_2\}$，当 $I_1V\neq\varnothing$ 时，才有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，其定义域 $I=\{x\,|\,x\in I_2, \varphi(x)\in I_1\}$．

(2) 分段函数　在定义域内的几个部分区间分别用不同的表达式

给出的函数，如 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ e^x, & x\leqslant 0\end{cases}$，符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 等，是分段函数，$x=0$ 是这两个分段函数的分段点. 函数 $f(x)=n$，若 $n\leqslant x<n+1\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是分段函数，$x=n\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是这个分段函数的分段点. 这个函数就是通常所说的取整数函数，记为 $[x]$（它表示不大于 x 的最大整数）.

注　*求分段函数的复合函数是重点，也是难点. 讨论分段函数的连续问题本质上是讨论它在分段点的连续性，而这又常归结为讨论它在分段点的左、右连续问题. 在微分学里，还会经常讨论分段函数在分段点的可导性等问题.*

---

(3) 反函数　设有函数 $y=f(x)$，其值域为 V，若对每一 $y\in V$，都可从 $y=f(x)$ 确定唯一的 x，则得到定义在 V 上的函数 $x=\varphi(y)$，它就称为 $y=f(x)$ 的反函数，常记为 $x=f^{-1}(y)$. 在同一坐标系下，$y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形关于直线 $y=x$ 对称.

注　*单调函数 $f(x)$ 一定存在反函数，并且 $f[f^{-1}(x)]=x$.*

---

(4) 隐函数　通过方程式给出的两个变量之间的函数关系称为隐函数.

4. 基本初等函数和初等函数

(1) 基本初等函数共 5 种：

1° 幂函数 x^μ（μ 为任意常数）；

2° 指数函数 $a^x(e^x)$；

3° 对数函数 $\log_a x(\ln x)$；

4° 三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$；

5° 反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

掌握基本初等函数的定义域，通过熟悉它们的图形掌握它们的性质是十

分重要的,因为它们是构成我们今后所研究的大量函数的“基本元素”.

(2) 初等函数是由基本初等函数经有限次的四则运算和复合步骤得到的可以用一个式子表示的函数.不能用一个式子表示的分段函数不是初等函数.

1.2.2 极限

1. 数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,$|a_n - a| < \varepsilon$.

此时,又称数列 a_n 收敛.极限不存在的数列称为是发散的.收敛的数列一定有界,但有界的数列未必收敛.

(2) 单调有界数列必有极限.对单调增的数列而言,只需考虑是否有上界;而对单调减的数列而言,只需考虑是否有下界.

这个准则经常用于讨论由递推公式给出的数列的极限的存在性问题.

(3) 夹逼准则(对函数的极限同样成立) 当 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$(对充分大的 n 成立),且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$(或 $-\infty$,或 $+\infty$,但不能为 ∞)时,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

注 利用夹逼准则的关键是构造两个数列要满足准则中的不等式,特别要注意构造的这两个数列的极限必须相等.

2. 函数的极限

(1) 自变量趋于有限值时的极限,左、右极限及左、右极限与极限的关系

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2° $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 的右极限,记为 $f(x_0 + 0) = A$.

3° $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 的左极限,记为 $f(x_0 - 0) = A$.

4° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

注　讨论分段函数在分段点的极限是否存在时,常用到结论 4°.

(2) 自变量趋于无穷时的极限

1° $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, |x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2° $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, x > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, -x > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4° $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

(3) 函数极限的性质

1° 有极限函数的局部有界性,设 $M(>0)$ 为任一常数

① 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则在 x_0 的某一空心邻域内有 $|f(x)| \leqslant M$;

② 若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$,则当 $|x|$ 充分大时, $|f(x)| \leqslant M$ 等等.

2° 有极限函数的局部保号性定理

① 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$,且 $A > 0$,则在 x_0 的某空心邻域内(或 $|x|$ 充分大时), $f(x) > 0$;

② 若在 x_0 的某空心邻域内(或 $|x|$ 充分大时) $f(x) > 0$,且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0$.

注　简单地说,这两个定理的区别是:当极限大于零时,则函数在局部大于零;而当函数大于零且极限存在时,只能得到极限不小于零.

(4) 极限四则运算法则(对数列也成立)

如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

1° $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

2° $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \times \lim g(x) = AB$.

3° 当 $B\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

注 1° 必须注意这些法则成立的条件，不满足条件时，不能用.

2° 当 $\lim f(x)=A\neq 0$ 时，$\lim[f(x)g(x)]$ 的存在与否完全取决于 $\lim g(x)$ 的存在与否，此时，可以记 $\lim[f(x)g(x)]=A\lim g(x)$，这个结果给求极限带来很大方便.

(5) 复合函数的求极限法则

设 $u=\varphi(x),y=f[\varphi(x)]$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$. 当 $f(u)$ 在 $u=a$ 连续时，$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

(6) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

注 两个重要极限的本质是：在自变量的某变化过程中，若 $h(x)\to 0$，且 $h(x)\neq 0$，则在自变量的该变化过程中，一定有

$$\frac{\sin[h(x)]}{h(x)}\to 1,\quad [1+h(x)]^{1/h(x)}\to\mathrm{e}.$$

(7) 幂指函数 $\lim u(x)^{v(x)}(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 的极限

1° 当 $\lim u(x)=a,\lim v(x)=b$（有限）时，原极限等于 a^b.

2° 当 $\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty$（或 $-\infty$，或 $+\infty$）时，原极限可化为

$$\lim\left([1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right)^{v(u-1)}=\mathrm{e}^{\lim v(u-1)}.$$

注 幂指函数的极限是在考研和其他重要考试中经常出现的题型，它们大都可以化为第二个重要极限来处理.

(8) 曲线 $y=f(x)$ 渐近线

$1°$ 若 $x\to x_0$(或 x_0+0,或 x_0-0)时,$f(x)\to\infty$(或 $-\infty$,或 $+\infty$),则称 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

注　若 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点,$x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

$2°$ 若 $x\to\infty$(或 $-\infty$,或 $+\infty$)时,$f(x)\to c$,则称 $y=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

$3°$ 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$,$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$,则直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

1.2.3　无穷小与无穷大,无穷小的比较,用等价无穷小代换求极限

1. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小　在自变量 x 的某一变化过程中,如果函数 $f(x)$ 的极限为零,则称 $f(x)$ 为在 x 的这个变化过程中的无穷小.因此,说一个变量是无穷小总是与自变量的变化过程分不开的.

(2) 无穷大　对于任意给定的 $M>0$,若在自变量 x 的某一变化过程中存在这样一个"时刻",在此"时刻"后,$|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 为在自变量的这个过程中的无穷大.因此,无穷大也是与自变量的变化过程分不开的.

(3) 零是可以作为无穷小的唯一的一个数,作为常数函数,它在自变量任何变化过程中,都是无穷小.

注　$1°$　在自变量的某变化过程中,无穷大的倒数肯定为无穷小,但不能简单地说,无穷小的倒数为无穷大,当无穷小不为零时,其倒数为无穷大.如 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}\sin x$ 为无穷小,但当 $x=n\pi\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,$\dfrac{1}{x}\sin x=0$,不能作分母,所以它的倒数不能认为是无穷大.

$2°$ 无穷大与无界不同,比如,$f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

是无界的，但在 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 却不是无穷大，因为若 $x=n\pi, n\to\infty$ 时，显然 $x\to\infty$，但 $f(n\pi)=0$. 而若在自变量的某变化过程中，$f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 在其定义域内一定是无界的.

2. 无穷小的比较及运算

(1) 无穷小的比较　设在自变量的同一变化过程中，α 和 β 都是无穷小，那么

1° 当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ 时，称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$；

2° 当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$ 时，称 α 是 β 的低阶无穷小；

3° 当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时，称 α 是 β 的等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$；

4° 当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$ 时，称 α 是 β 的同阶无穷小.

(2) 无穷小的运算

1° 有限个无穷小的和与积仍为无穷小；

2° 无穷小与有界量的乘积仍为无穷小；

3° β 与 α 为等价无穷小 $\Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$.

注　$x\to 0$ 时，常用的等价无穷小：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x);$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

3. 用等价无穷小代换求极限

(1) 在自变量 x 的某一变化过程中，$\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 都为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

(2) $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ 且 $\lim\alpha=0$.

(3) 若 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$，但 $\beta\neq 0$，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$，则

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}\begin{cases} = e^k, & -\infty < k < +\infty \\ = 0, & k = -\infty \\ = +\infty, & k = +\infty \\ \text{不存在也非 } \infty, & k = \infty \end{cases}$$

注　用等价无穷小代换求极限时,必须注意:

1° 一定要对整个因子作代换,不能对因子中相加减的项作代换;

2° 当相加减的项为同阶非等价无穷小,且各自用等价无穷小代换后相加减不为零时,则可用它们的等价无穷小分别代换;

3° 当相加减的项中有高阶无穷小,且舍掉高阶无穷小,各自用其等价无穷小代换后相加减不为零时,可以舍掉高阶无穷小.

1.2.4　函数的连续和间断

1. 函数的连续

(1) 函数在一点的连续

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,或 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$,或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ 等,则称 $f(x)$ 在 x_0 连续. $f(x)$ 在 x_0 连续必须同时具备三个条件:

1° $f(x)$ 在 x_0 有定义;

2° $f(x)$ 在 x_0 的极限存在;

3° $f(x)$ 在 x_0 的极限等于 $f(x)$ 在 x_0 的函数值 $f(x_0)$.

注　当 $f(x)$ 在 x_0 连续时,不能认为 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内都连续,比如,$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ x^2, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 连续,而在其它所有点都不连续,尽管 $f(x)$ 在整个数轴上有定义.

函数在一点的单侧连续　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续.

$f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.

(2) 函数在区间的连续　当 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续时，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连续，而在 $x=a$，$f(x)$ 右连续，在 $x=b$，$f(x)$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

2. 函数的间断

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域（在 x_0 可能有定义，也可能没定义）内有定义，而 $f(x)$ 在 x_0 不连续（即不同时具备上述连续的三个条件），则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 函数的左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点：当左、右极限不等时，称为跳跃间断点；当左、右极限相等时，称为可去间断点. 函数的间断点中非第一类间断点就称为第二类间断点，其中常见的有无穷间断点（即左、右极限均为无穷）；振荡间断点（即在间断点的邻近，函数的图形无限往复摆动）.

3. 连续函数的运算

(1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 连续，则

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）在 x_0 都连续；

(2) 设 $f(u)$ 在 u_0 连续，$u=\varphi(x)$ 在 x_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续.

(3) 基本初等函数在其定义域内是连续的；初等函数在其定义区间（即定义域内的区间）内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大、最小值定理　当函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续时，$f(x)$ 一定能取得最大值 M 和最小值 m. 若取 $K=\max\{|M|,|m|\}$，则 $|f(x)|\leqslant K$，从而得知，闭区间上的连续函数一定是有界的.

(2) 介值定理　设 M 和 m 分别表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大和最小值，则对任何介于 m 和 M 之间的常数 c，$[a,b]$ 上至少有一

点 ξ 使得 $f(\xi) = c$.

由此可知,设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若 $f(a)f(b) < 0$,则在 (a,b) 内至少有一点 η 使得 $f(\eta) = 0$,这就是所谓零点定理.

注　1° 零点定理在证明方程根的存在性时起着关键的作用.

2° 当 $f(x)$ 在 (a,b)(a 可以为 $-\infty$,b 可以为 $+\infty$)内连续,$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ 存在(或者为 $-\infty$,或者为 $+\infty$,但不为 ∞),$\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ 存在(或者为 $+\infty$,或者为 $-\infty$,但不为 ∞).分别记它们为 $f(-\infty)$ 和 $f(+\infty)$),且 $f(-\infty)f(+\infty) < 0$ 时,零点定理同样成立.

1.3　重点例题分析

例 1.1　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则

$f(x^2)$ 的定义域为__________;

$f(\sin x)$ 的定义域为__________.

分析　$f(x^2)$ 实际上是 $f(u)$ 和 $u = x^2$ 复合而成的函数,同样,$f(\sin x)$ 是 $f(u)$ 和 $u = \sin x$ 复合而成的函数.求复合函数的定义域时,首先根据所给函数 $f(x)$ 的定义域确定中间变量的变化范围,如对 $f(x^2)$ 有 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$,由此不等式再解出复合函数自变量的变化范围 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,从而得到复合函数的定义域.

解　由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ 得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$;由 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ 得 $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,所以 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

例 1.2　设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$,则 $f(x)$ 的定义域为__________.

解　$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow [-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.