大学数学名师导学丛书

数学分析

名师导学

6

（上）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

数学分析

名师导学

上册

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

本册编写 杨万利

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学理工科《数学分析》课程的教学大纲为依据，参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《数学分析》课程的大学理工科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析名师导学．上册/《大学数学名师导学丛书》编写组编，—北京：中国水利水电出版社，2004

(大学数学名师导学丛书)

ISBN 7-5084-2253-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．大…　Ⅲ．数学分析－高等学校－教学参考资料

Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071612 号

书　名	大学数学名师导学丛书 **数学分析名师导学(上册)**
编　者	《大学数学名师导学丛书》编写组　编　本册编写　杨万利
出版发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号　100044) 网址　www.waterpub.com.cn E-mail:sales@waterpub.com.cn 电话:(010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　销	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京雪光科技发展有限公司
印　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　格	787mm×1092mm　16 开本　26.25 印张　472 千字
版　次	2005 年第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　数	0001—6000 册
定　价	34.00 元

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 杨万利　牛庆银　董玉才

郑素文　刘文学　陈建华

前言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，供学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）**集中知识要点“导”学**。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）**典型例题与习题“导”讲**。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，

从而轻松学习、解题和通过考试。

3）**知识点学习和自测紧密“导”练**。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

目录

第一章 实数集与函数

第一节 实数

一、知识要点

有理数　无理数　实数的无限小数表示法　两个实数的大小关系　实数的n位不足近似与n位过剩近似　绝对值与不等式

二、知识要点分析

1. 有理数

有理数总可以写为$\frac{p}{q}$(p、q均为整数,$q\neq0$)的形式,当要求$q>0$,且p、q没有大于1的公因子时,这种表示形式还是唯一的.有理数也可以表示成有限十进小数或无限十进循环小数.

2. 无理数

无限十进不循环小数称为无理数.

3. 实数的无限小数表示法

任何实数x均可表示为如下无限小数:

(1)$x>0$时

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

其中:a_0为非负整数,$0\leqslant a_i\leqslant9(i=1,2,\cdots)$,且对任意的正整数$N$,总存在$n\geqslant N$,使得$a_n\neq0$.

(2)$x<0$时

此时,$-x>0$,按(1),$-x$可表示为

$$-x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

则x可有如下表示

$$x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

(3) $x=0$ 时

规定: $0=0.0000\cdots$

注:

(1)按上述表示法,任何实数 x 均可用一个确定的无限小数来表示.

(2)本教材先给定正实数的无限小数表示法,尔后在正实数的无限小数表示之前加负号得到负实数的无限小数表示.有时,为了需要而采用如下的无限小数表示法:

首先,对于 $0<x\leqslant 1$ 的实数 x 按教材中的约定,得到无限小数表示

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

其次,对于任意实数 x,总存在整数(可能为负) N,使得 $N<x\leqslant N+1$,则 $x-N$ 可表示为 $x-N=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$

得到 x 的无限小数表示

$$x=N.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

两种无限小数表示法的不同之处,在于负实数与 0 的表示,比如,

教材规定: $0=0.0000\cdots$, $-0.5=-(0.4999\cdots)$

按上述表示法: $0=(-1).9999\cdots$, $-0.5=(-1).4999\cdots$

而对于正实数来讲,两种表示相同.

4. 两个实数的大小关系

(1)两个非负实数的大小关系

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,其中 a_0,b_0 为非负整数, a_k,b_k $(k=1,2,\cdots)$ 为整数, $0\leqslant a_k,b_k\leqslant 9$,规定:若 $a_k=b_k$, $k=0,1,2,\cdots$,则称实数 x 与实数 y 相等,记为 $x=y$;若 $a_0>b_0$ 或存在非负整数 l,使得

$$a_k=b_k(k=0,1,2,\cdots,l)\text{而 }a_{l+1}>b_{l+1}$$

则称实数 x 大于实数 y(或称实数 y 小于实数 x)记为 $x>y$ 或 $y<x$.

(2)两个负实数的大小关系

设 x,y 为两个负实数,则规定:若

$-x=-y$,称负实数 x 等于负实数 y,记为 $x=y$.

$-x>-y$,称负实数 x 小于负实数 y,记为 $x<y$.

(3)正实数与负实数的大小关系

一切正实数大于一切负实数.

(4)0 与其他实数的大小关系

0 小于一切正实数大于一切负实数.

5. 实数的 n 位不足近似与 n 位过剩近似

设 x 的无限小数表示

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

则 x 与其 n 位不足近似及 n 位过剩近似的关系：

$$x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant x\leqslant \overline{x}_n\leqslant \overline{x}_{n-1},n=1,2,\cdots$$

其中 x_n 与 $\overline{x}_n$ 分别为 x 的 n 位不足近似及 n 位过剩近似.

对两个实数 x 与 y：

"$x>y$"等价于"存在非负整数 n，使得 $x_n>\overline{y}_n$"

6. 绝对值与不等式

绝对值：$|a|=\begin{cases}a,a\geqslant 0,\\-a,a<0.\end{cases}$

不等式有 6 条基本性质：

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时，有 $|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$，这里 $h>0$.

(4) 对任意的实数 a、b，有如下三角不等式：

$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$.

上述性质是解决一切与绝对值有关的问题的基本依据，是必须要熟练掌握的.

三、学习要求

1. 了解实数的无限小数表示法，会用实数的 n 位不足（及过剩）近似数证明实数不等式.

2. 理解绝对值不等式，会解绝对值不等式.

四、典型例题与方法解析

1. 几个重要不等式

有几个重要不等式是以后我们常常用到的.

例 1 （伯努利(Bernoulli)不等式）.

设 $h>-1, n\in N^+$（全体正整数），$n\geqslant 2$，则成立

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

其中等号仅在 $h=0$ 时成立.

分析 可用数学归纳法给出证明；由于 n 为整数，亦可借助于二项展开式进行证明.

证一 （数学归纳法） 略.

证二 由二项展开式知

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+\frac{n!}{n!}h^n. \tag{1}$$

由于 $h>-1$，故若 $1+nh\leqslant 0$ 时，即 $-1<h\leqslant -\frac{1}{n}$ 时不等式自然成立.

若 $h\geqslant 0$，由等式(1)知不等式亦自然成立.

若想获得问题的完全解决，我们只须借助于式(1)，在 $-\frac{1}{n}<h<0$ 时证明不等式成立即可. 将式(1)与我们将要证明的不等式进行比较，可将问题转化为证明如下不等式：$-\frac{1}{n}<h<0$ 时，

$$\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+\frac{n!}{n!}h^n\geqslant 0. \tag{2}$$

设 $2\leqslant k\leqslant n$ 为偶数，则有

$$\begin{aligned}&\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k\left[1+\frac{(n-k)}{k+1}h\right]\\&>\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k\frac{k(n+1)}{n(k+1)}>0.\end{aligned} \tag{3}$$

对 n 的奇偶性稍加分析，便可由式(3)知式(2)是成立的，读者可依据以上思路写出详细证明.

注 数学归纳法往往是不等式证明的重要方法，应引起高度重视. 证法二中，我们将条件 $h>-1$ 进行了分类讨论，实际上是将条件 $h>-1$ 分成了：$h\geqslant 0$；$-1<h\leqslant -\frac{1}{n}$ 及 $-\frac{1}{n}<h<0$ 等三种情况. 而前二种情形下是自然成立的，后一种情形下，观察式(2)发现，式(2)的左边是正、负交错相加而得. 首项是正数，通过式(3)，将式(2)的左边“配对”相加，式(2)可分成为多个（n 为偶数时，是 $\frac{n}{2}$ 个正数，n 为奇数时，恰有 $\frac{n-1}{2}$ 个正数）正数之和. 至此便证得了原不等式. 这种将条件进行分类处理，是不等式证明乃至数学上很多问题的分析中常要用到的

方法，至于说将给定条件（往往是多个条件）中的哪一个进行怎样的分类，则是随着问题的不同及所采用的方法而定的.

证三 $h\geqslant 0$ 时，由式(1)表明不等式成立. 下面只考虑 $-1<h<0$ 时的情形. 我们有

$$\begin{aligned}(1+h)^n-1&=(1+h-1)[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]\\&=h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}].\end{aligned}\tag{4}$$

由于 $-1<h<0$，从而

$$(1+h)^k<1,k=1,2,\cdots,n-1.$$

故式(4)表明

$$(1+h)^n-1>nh.$$

关于"等号成立的充要条件是 $h=0$"的证明可由以上证法中明显得出。

例 2 （平均值不等式） 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个非负实数，则下式成立

$$(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n).\tag{5}$$

其中等号只在所有 x_i 均相等时成立.

分析 $n=2$ 时，是我们熟知的不等式

$$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}.$$

由此想到

$$\begin{aligned}&(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}}=(x_1x_2)^{\frac{1}{4}}\cdot(x_3x_4)^{\frac{1}{4}}\\&=[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}+(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}}{2}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)^{\frac{1}{6}}=[(x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}\cdot(x_4x_5x_6)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{(x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}+(x_4x_5x_6)^{\frac{1}{3}}}{2}\end{aligned}\tag{6}$$

显然，若 $n=3$ 时式(5)成立，则式(6)表明 $n=6$ 时，式(5)亦成立，式(6)给我们以启示：

若 $n=k$ 时式(5)成立，则 $n=2k$ 时式(5)亦成立.

至此，我们可断言，$n=2^k$ 时式(5)成立. 但我们需要的是对所有正整数 n，式(5)成立.

下面采用"反向归纳法"证明式(5)对一切 n 为正整数时成立，即在式(5)对于 $n\geqslant 2$ 成立的前提下，证明式(5)对于 $n-1$ 亦成立.

事实上，设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}(n\geqslant 1)$ 为 $n-1$ 个非负实数，令

$$x_n=\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}).$$

则由反向归纳假定：对于非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 有

$$(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}x_n^{\frac{1}{n}}=(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1})$$

$$=\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})=x_n.$$

故 $$(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\leqslant x_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

即 $$(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\leqslant x_n=\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1}).$$

读者依据上述思路整理可知式(5)对所有正整数 n 均成立.

注 反向归纳法亦是解决与正整数有关的问题的重要方法，但反向归纳法与数学归纳法截然不同，其前提是首先证明所面对的命题对无穷多个自然数是成立的(如上例证明 $n=2^k$ 时命题是成立的)，然后在假定对 n 成立的前提下，证明对 $n-1$ 亦成立.

例 3 (柯西(Cauchy)不等式) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组实数，则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

且等号成立的充要条件是存在不全为 0 的实数 λ 与 μ，使得

$$\lambda x_i+\mu y_i=0,i=1,2,\cdots,n.$$

(我们只给出证明梗概，详细过程请读者给出).

证一 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0，则对于任意的实数 λ 有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i-y_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

从而

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\leqslant 0.$$

证二 我们由恒等式(可借助于归纳法证明)：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

可直接推证柯西不等式.

证三 设 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1$，

则由 $$|x_iy_i| \leqslant \frac{x_i^2+y_i^2}{2}, i=1,2,\cdots,n$$

得 $$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant 1. \tag{7}$$

对一般的实数组：$x_1, x_2, \cdots x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$.

令 $$a_i=\frac{x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}, b_i=\frac{y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}},$$

则 $$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2=1.$$

由式(7)可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_iy_i|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}} \leqslant 1.$$

即原问题得证.

注 由证法一可知柯西不等式等号成立的充要条件是，存在不全为零的实数 λ, μ 使得

$$\lambda x_i+\mu y_i=0, i=1,2,\cdots,n.$$

例4 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数，满足

$$x_1x_2\cdots x_n=1.$$

证 $$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant n. \tag{8}$$

其中等号谨在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

分析 这是一个有关乘积与和的关系的问题，应该想到平均值不等式，这样利用平均值不等式即刻得到证明.(略)

用数学归纳法亦可证明式(8)的成立.事实上，

$n=1,2$ 时式(8)显然成立.

设 $n=k$ 时式(8)成立，并假定 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正数，且满足

$$x_1x_2\cdots x_{k+1}=1.$$

若 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$，则式(8)自然成立.

现设 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 不全为1，则至少存在二个数不等于1，且不妨设 $x_1>1, x_2<1$.则

$$x_1x_2+1<x_1+x_2.$$

从而有

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}>1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}. \tag{9}$$

对 $x_1x_2, x_3, \cdots, x_{k+1}$ 这 k 个正数，应用归纳假设得

$$x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}>k.$$

代入式(9)得

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}>k+1.$$

命题得证.

注 利用平均值不等式可得问题的证明,反过来,我们也可利用本例的结论去证明平均值不等式,事实上:

由于 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 时,有

$$1\leqslant\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n),$$

则对于任意 n 个非负正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,可令

$$a_i=\frac{x_i}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}.$$

则 $a_1a_2\cdots a_n=1$,从而有

$$1\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{n}\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}\right].$$

整理即得平均值不等式.

在例 3 的柯西不等式证法三中,我们也使用了类似的方法,这种方法我们称之为"归一"法."归一"法有"和的归一"法,亦有"积的归一"法,同样是不等式证明中重要的方法.

例 5 (赫尔德(Hölder)不等式) 设有非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 及实数 p,q,且 $p>1,q=\frac{p}{p-1}$(称 p 与 q 为共轭实数),则有

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.\tag{10}$$

分析 观察式(10)不难发现,$p=q=2$ 时,式(10)就是柯西不等式,即柯西不等式是赫尔德不等式的特例.从柯西不等式出发证明式(10)是困难的.能否借鉴柯西不等式的证明方法呢?如果

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^p=\sum_{i=1}^{n}y_i^q=1,\tag{11}$$

则由柯西不等式的证法三知,问题将转化为在条件(11)之下证明,

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant1.\tag{12}$$

例 3 的证法三启发我们应该借助于一个有关 x_iy_i 与 x_i^p,y_i^q 的不等式.

事实上我们有,对任意正数 a,b,均有

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.\tag{13}$$