



新世纪高等院校精品教辅

经典高等数学

周南 邱学军 主编

配同济《高等数学》第五版
(第四版同时适用)
辅导用书

浙江大学出版社

 新世纪高等院校精品教辅

经典高等数学

主 编 周 南 邬学军

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经典高等数学 / 周南, 邬学军主编. — 杭州: 浙江大学出版社, 2004. 9
ISBN 7-308-03922-6

I. 经... II. ①周... ②邬... III. 高等数学 - 高等学校 - 自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 093850 号

内 容 简 介

本书是为帮助大学生学习高等数学而编著的学习指导书, 其中的章节内容与同济大学编的《高等数学》第四版、五版配套; 由于内容全面, 也适用于其他版本的高等数学或微积分教材。每章包括内容提要、典型例题和自测题; 题型有填空、选择、解答和证明题; 题目深入浅出, 循序渐进, 部分选自历年考研试题。全书最后附有知识点总结以及大学高等数学期终考试模拟试卷, 可供学生自测学习效果。

本书是大学生学习高等数学的良师益友, 也可供准备考研的同学作系统复习时使用。

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

责任编辑 徐素君

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 浙江大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 16

字 数 340 千字

版 次 2004 年 9 月第 1 版 2004 年 12 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 7-308-03922-6/O·316

定 价 20.00 元

前 言

高等数学是大学生一门重要的基础课程,目前,本科院校理工、经管、人文、外语、甚至艺术,几乎所有的专业都开设高等数学课程。对于大学生来说,这也是进入大学首先遇到的一门大课。为了帮助学生掌握、理解高等数学基础知识,掌握基本技能,我们组织了多年从事高等数学教学、具有高级职称的教师,针对教学的特点,结合自身多年的教学实践和教学经验,编写了本书。

本书按照专题分章编写,可作为高等数学的学习指导和习题课的教程。主要内容有:

一、内容提要。解析和总结本章所包含的知识要点和能力要求,使学生准确把握应该掌握的学习内容。

二、典型例题是本书的主要内容。在题型上,有填空题、选择题、计算题和证明题;在内容上,题目由浅入深,循序渐进,并有综合题和应用题,不但对知识点有较大的覆盖面,而且针对重点、难点安排多重训练;每章还选用了部分历年的考研试题。在解题前后,进行“方法点拨”,对解题思路加以简明扼要的解说,提出解题规律。

三、每章配有自测题,以帮助学生了解学习效果。每份试卷的编排难易结合,体现合理的科学梯度。

四、对高等数学知识点进行了总结,使学生对整个高等数学的思想体系有一个全面的了解。

五、按高等数学上、下册配有数份大学高等数学期终考试试卷,使学生对自己的学习效果作一个全面的检测。

本书的参编人员是:周南(第一、二、八章),郭学军(第三、四章),程小力(第五、六章),卓文新(第七、十一章),陆建芳(第九章),许红娅(第十、十二章)。模拟试卷和高等数学知识点结构由周南和郭学军编写。全书由周南、郭学军统稿并审校。

本书的编写还得到方照琴、周明华、李永琪、寿华好等几位教师的帮助和指点,在此表示衷心的感谢。

编者恳切希望广大读者能指出本书的不足之处,提出积极的建议,使之不断完善。

编者

2004年8月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
内容提要	(1)
典型例题	(4)
自测题	(14)
第二章 导数与微分	(16)
内容提要	(16)
典型例题	(18)
自测题	(27)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(29)
内容提要	(29)
典型例题	(31)
自测题	(39)
第四章 不定积分	(41)
内容提要	(41)
典型例题	(42)
自测题	(53)
第五章 定积分	(54)
内容提要	(54)
典型例题	(57)
自测题	(71)
第六章 定积分的应用	(74)
内容提要	(74)
典型例题	(75)
自测题	(89)
第七章 空间解析几何与向量代数	(91)
内容提要	(91)
典型例题	(95)
自测题	(107)

第八章 多元函数微分法及其应用	(109)
内容提要	(109)
典型例题	(111)
自测题	(123)
第九章 重积分	(125)
内容提要	(125)
典型例题	(130)
自测题	(147)
第十章 曲线积分与曲面积分	(150)
§1 曲线积分	(150)
内容提要	(150)
典型例题	(153)
§2 曲面积分	(162)
内容提要	(162)
典型例题	(165)
自测题	(172)
第十一章 无穷级数	(174)
§1 常数项级数	(174)
内容提要	(174)
典型例题	(177)
§2 幂级数和傅里叶级数	(187)
内容提要	(187)
典型例题	(191)
自测题	(201)
第十二章 微分方程	(203)
内容提要	(203)
典型例题	(205)
自测题	(218)
高等数学知识结构	(220)
模拟试卷	(229)
参考答案	(238)

第一章 函数与极限



内容提要

一、函数

1. 函数的定义

2. 函数的几条重要特性

(1) **有界性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在正数 M , 对任一 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

(2) 单调性

(3) 奇偶性

(4) 周期性

3. 复合函数、基本初等函数、初等函数的概念

二、极限的概念

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义

对数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 a , 对任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 用 ϵ - N 语言描述, 即

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \epsilon$$

2. 函数极限的定义

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

3. 左、右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

4. 极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

5. 无穷大与无穷小的概念

三、极限的性质

1. 极限的惟一性
2. 收敛数列的有界性与函数极限的局部有界性
3. 函数极限的局部保号性
4. 函数极限与数列极限的关系

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 数列 $\{x_n\}$ 在 $f(x)$ 的定义域内, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

利用这一性质, 我们可以用求函数极限的方法来求数列的极限.

5. 函数极限与无穷小的关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$. 其中 α 在 x 同一变化过程中是无穷小, 即 $\lim \alpha = 0$.

四、极限的计算

1. 应用极限运算法则
2. 分别计算左、右极限
3. 利用极限存在准则: 夹逼准则和单调有界准则
4. 利用两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

5. 利用复合函数求极限法则, 作变量代换
6. 利用等价无穷小

设无穷小 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

熟记下列常用的等价无穷小:

设在某变化趋势下, α 为无穷小, 则有

$$\alpha \sim \sin \alpha \sim \tan \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \arctan \alpha$$

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}; \quad e^{\alpha} - 1 \sim \alpha, \quad a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha; \quad \sqrt[n]{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{n}$$

五、函数的连续

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续的定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \text{ 其中 } \Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

2. $y = f(x)$ 在 x_0 点连续的三个必要条件

(1) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有定义, 其值为 $f(x_0)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

(3) 极限与定义相等, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. 函数的间断点

设 $f(x)$ 在 x 的某去心邻域内有定义, 若以上三个必要条件至少有一个不成立, 则 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, x_0 称为 $f(x)$ 的间断点. 间断点可分为两类:

第一类: (1) 可去间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

(2) 跳跃间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但不相等.

第二类: 不是第一类间断点的任何间断点.

特别地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $+\infty, -\infty$), 称 x_0 为无穷间断点.

4. 初等函数在其定义区间内是连续的

六、闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

(3) 零点定理: 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少有一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

(4) 介值定理: $f(x)$ 必可取到介于最大值和最小值之间的任何值.



典型例题

例 1.1 填空题

(1) 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 则 $f[f(x)]$ 的定义域是_____.

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + c}{x - 1} = 5$, 则 $a =$ _____, $c =$ _____.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n =$ _____.

(4) 曲线 $y = \frac{e^{-x^2}}{x-1}$ 有渐近线_____.

(5) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\sin x} & x > 0 \\ ae^{2x} & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点连续, 则 $a =$ _____.

(6) 函数 $y = \frac{x-2}{\ln|x-1|}$ 的可去间断点是_____.

解 (1) $x \neq -1, x \neq -2$. 这是由于 $f[f(x)] = \frac{1}{1+f(x)}$, 故应用 $f(x) \neq -1$, 即 $x \neq -2$.

(2) $a = 3, c = -4$. 由条件 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + c) = 1 + a + c = 0, a = -c - 1$, $x^2 + ax + c = x^2 - (c+1)x + c = (x-1)(x-c)$. 原极限可化为

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - c) = 1 - c = 5, \text{ 所以 } c = -4.$$

(3) e^{-3} . 化为重要极限 II 的形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{3} \left(-\frac{3n}{n+1}\right)} = e^{-3}$$

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2}}{x-1} = \infty$, 有铅直渐近线 $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}(x-1)} = 0$, 有水平渐近线 $y = 0$.

(5) $a = -1$. 分段函数需讨论左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{x} = -1$$

因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 故 $a = -1$.

(6) $x = 1, x = 2$. $f(x)$ 的间断点是 $x = 0, 1, 2$. 其中

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{\ln|x-1|} = \infty$, 故 $x=0$ 是无穷间断点.

$x \rightarrow 1$ 时, $\ln|x-1| \rightarrow -\infty$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{\ln|x-1|} = 0$, 极限存在.

$x \rightarrow 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln[1+(x-2)]} = 1$.

这是由于 $x \rightarrow 2$ 时, 可视 $x-1 > 0$, 而当 $x \rightarrow 2$ 时, $x-2$ 为无穷小. 利用等价无穷小, 知极限存在. 故 $x=1, x=2$ 是可去间断点.

例 1.2 选择题

(1) 对任意的 $0 < \epsilon < 1$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \epsilon$, 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()

- A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 非充分非必要条件

(2) 下列极限中正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 1$
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} = 1$

(3) 曲线 $y = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ()

- A. 只有一条水平渐近线 B. 有一条铅直渐近线, 无水平渐近线
C. 各有一条水平和铅直渐近线 D. 有三条渐近线

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-x^2) - \sin x$ 是 x 的 ()

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 等阶无穷小 D. 同阶但非等价无穷小

(5) $x=0$ 是函数 $y = \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} \arctan \frac{1}{x}$ 的 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

(6) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()

- A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续
C. 连续, 左右极限存在 D. 连续, 但左右极限不存在

解 (1) C 这是数列极限的定义.

$$(2)C \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1. \text{ 其余极限均为有界函数与无穷小的积, 应为 } 0.$$

(3)D 易见 $x = 0$ 是铅直渐近线.

对于指数函数, 当其指数趋于 ∞ 时, 要分别考虑 $-\infty$ 与 $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 1, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1.$$

故分别有两条水平渐近线 $y = 1$ 和 $y = -1$.

$$(4)D \quad \text{由于} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2) - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} - 1 = -1$$

因此与 x 同阶.

$$(5)A \quad \text{由于} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} \arctan \frac{1}{x} = (-1) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} \arctan \frac{1}{x} = 1 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

左、右极限相等, 故 $x = 0$ 为可去间断点.

(6)C $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} = f(0)$. 其中 $\sqrt{|x|}$ 是无穷小, $\sin \frac{1}{x^2}$ 是有界函数, 并符合函数连续的定义.

解答题

解答题在解题过程中要有清晰的思路、完整的步骤, 表现出对问题的准确理解和正确的解题过程, 而不同于填空和选择题, 存在着“猜”和“蒙”的倾向.

例 1.3 设 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 求 $f(x)$.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ 是一常数, 从而 $f(x) = x^2 + 2xA$ 是二次函数, 由连续性

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 2A$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$,

从而

$$1 + 2A = A, A = -1, f(x) = x^2 - 2x$$

注意 此题并不难,只要认识到函数的极限是常数,就可解得.

例 1.4 已知数列 $x_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ ($a \neq 0$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e} \end{aligned}$$

注意 这里特别容易犯的错误是认为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 1$, 而没注意到这是一个重要极限.

例 1.5 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1})$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} \quad (a > 1) \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(x^{10} + x^5 + 1)}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^2} \quad (a \neq 0)$$

解 (1) 去零因子 $(x-1)$. 由 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$

所以
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) = n$$

(2) 这是 $\infty - \infty$ 型. 先将分子有理化, 化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 再去无穷因子 x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 1 \end{aligned}$$

此题建议读者考虑: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限与此有何不同.

(3) 这里 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+1}$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x-1}$ 均不存在, 但并不能断定所示极限不存在. 利用三角函数的和差化积:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \end{aligned}$$

由
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} = 0$, 而 $\cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$ 是有界函数, 从而这是无穷小量与有界函数之积, 极限为 0.

(4) 因为 $a > 1$, 故可设 $a = 1 + \lambda, \lambda > 0$, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1 + \lambda)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots + \lambda^n} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(x^{10} + x^5 + 1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^{10}\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}}\right)\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

注意 (4), (5) 两题都是利用去无穷因子来计算, 只有当我们熟练以后, 才可以直接较快地得出结论.

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{2}{n}} = a^0 = 1.$$

这里用到的是复合函数求极限的法则. 以上各题都是利用极限运算法则来计算的.

例 1.6 设 $f(x) = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} + ax + b$. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 求 a, b 的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3 + ax(x - 1)}{x - 1} + b \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 + a)x^2 - ax + 3}{x - 1} + b = 0 \end{aligned}$$

则应该有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 + a)x^2 - ax + 3}{x - 1} = -b$ 为常数. 分式中, 分子、分母的无穷因子应为同次幂, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{x - 1} + b = 4 + b = 0, b = -4$$

例 1.7 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 其中

$$(1) f(x) = \frac{\sin x}{|x|} \quad (2) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1-x}{x}} & x < 0 \\ 2x + a & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解} \quad (1) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1-x}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + a) = a.$$

所以当 $a = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. $a \neq 0$ 时, 极限不存在.

例 1.8 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$(1) x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$(2) x_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \frac{3}{n^2 + 3} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

解 (1) 因为 $\sqrt[n]{3^n} < x_n < \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$, 而 $\sqrt[n]{3^n} = 3$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[n]{2} = 3 \cdot 1 = 3$$

故由夹逼定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$$

$$(2) \text{ 令 } y_n = \frac{1}{n^2 + n} + \frac{2}{n^2 + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n}$$

$$z_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + 1}$$

则有

$$y_n < x_n < z_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n^2 + n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(n^2 + n)}{n^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 1.9 } x_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \quad (a > 0), x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$$\text{证 对所有的 } n, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}$$

由上面的不等式知 $x_n \geq \sqrt{2}$, 从而 $x_{n+1} - x_n \leq 0, x_{n+1} \leq x_n$. 数列 $\{x_n\}$ 单调下降, 有

下界 $\sqrt{2}$. 由极限存在准则, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设其为 x , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$.

$$\text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

$$\text{所以有} \quad x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

解得 $x = \pm \sqrt{2}$. 因为 $x_n > 0$, 由极限的保号性, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

例 1.10 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

解 这是 1^∞ 型极限, 故考虑重要极限 II.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a}} \right]^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

由条件 $e^{2a} = 9, a = \ln 3$

例 1.11 计算极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$$

解 这两个极限都是 1^∞ 型, 因此利用重要极限 II.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left([1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} \right)^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = e$

所以 原式 $= e^2$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}} \right]^{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \cdot n}$$

上式括号中的极限为 e , 只需求出指数函数的极限.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2}{2} \cdot n &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^{1/n} - 1) + (b^{1/n} - 1)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

这里利用了等价无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $a^x - 1 \sim x \ln a$.

所以

$$\text{原式} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

例 1.12 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \sin \frac{2}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x^2 + \sin x^3} - 1}{x \sin 3x}$$

解 (1) 这是 $\infty \cdot 0$ 型, 一般可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \sin \frac{2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x - 1} \cdot x \sin \frac{2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{2 \sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

(2) 这是 $\frac{0}{0}$ 型, 需要找到合适的等价无穷小来求解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) 当 $x \rightarrow 1$, $(x-1)$ 为无穷小, 故令 $x-1 = t$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \sin \frac{\pi}{2}(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{1 - \cos \frac{\pi}{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{1 - \cos \frac{\pi}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2}}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}t)^2} = -\frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

(4) 利用等价无穷小 $x \sin 3x \sim 3x^2$.

$$\sqrt[3]{1 - 2x^2 + \sin x^3} - 1 \sim \frac{1}{3}(-2x^2 + \sin x^3)$$

因此

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(-2x^2 + \sin x^3)}{3x^2}$$