文科与经济类

# 高等数学

## （上册）

■ 刘金舜 羿旭明 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

文科与

# 高等数学

## （上册）

■ 刘金舜 羿旭明 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册:文科与经济类/刘金舜,羿旭明编著.—武汉:武汉大学出版社,2004.6
ISBN 7-307-04184-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②羿… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 034288 号

责任编辑:李汉保 责任校对:刘 欣 版式设计:支 笛

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件 wdp1@whu edu cn 网址·www wdp.whu.edu.cn)
印刷:武汉市新华印刷有限责任公司
开本:880×1230 1/32 印张:9.75 字数:266 千字
版次:2004 年 6 月第 1 版 2004 年 10 月第 2 次印刷
ISBN 7-307-04184-7/O·297 定价:18.00 元

# 内容简介

本书是大学经济管理类（包括文科）的高等数学教材，列为武汉大学“十五”规划教材之一。

全书分上、下两册，共十四章。

上册介绍一元函数的微积分学，包括函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分以及导数在经济学中的应用，定积分的应用等。下册介绍空间解析几何、二元（多元）函数的微积分学、无穷级数、微分方程及差分方程等。

本书在传统的经济类高等数学的基础上内容稍有拓宽，主要是加强了空间解析几何和无穷级数方面的内容。

本书的最大特色是：每一章都按时下流行的考试命题模式，配备一套针对本章内容的综合练习题。此外，在全书最后，还配有两套综合全书内容的综合练习题。这些试题，既有深度，又有一定的难度。熟练地掌握这些试题的解题思路及证明方法，对将来考研将起到很好的桥梁作用。

# 前　言

为了使高等教育教材建设更好地适应经济建设、科技进步和社会发展，更好地适应教学与改革的需要，武汉大学确定并公布了“十五”规划教材，本书为“十五”规划教材之一。是面向大学经济管理类、财经类(包括文科)的高等数学教材。

实践已经证明，高等数学不仅在物理学、力学、天文学、计算机科学、生命科学、工程学等自然学科领域内得到广泛的应用，在经济领域中，高等数学也越来越活跃。无论是经济理论的研究，或是对某种经济现象的定性分析，高等数学已成为最有力的工具。因此，《高等数学》成为高等学校财经类、管理类等专业本科生必修的核心课程之一，也是硕士研究生入学考试中的一门必修科目。对于文科类的学生来说，通过《高等数学》的学习，对于提高自身的抽象思维能力，严格的逻辑推理能力，空间想象能力等都有极大的帮助。

本教材在基本保持传统经济类高等数学体系和经典内容的同时，注重渗透现代数学思想的概念和方法，在内容的取舍与编排上力求大胆创新。此外，本书在现有经济类高等数学内容的基础上稍有拓宽与加深，其主要目的，是为了满足读者在学习后续课程的需要。同时，本书突出经济类高等数学的特点和数学在经济中的应用。本教材在编写的过程中，始终贯彻教学建模的思想，使学生在学习数学的同时，自然领略到数学的精髓和数学对经济研究的作用。

本教材分上、下两册出版，总课时为144学时，上册除对初等数学进行重点复习与归纳外，着重介绍了一元函数的微积分学。它包括函数的极限、连续、导数、不定积分与定积分、广义积分等。此外，还介绍了导数在经济学中的应用，定积分的应用等。下册首先介绍了空间解析几何。为了给学生一个较为完整的空间几何的概念，使

学生在学习二重积分时,不致因缺乏空间几何的概念而产生困难,我们用较大篇幅系统地讲授了空间解析几何的基础知识。此外,下册还介绍了二元函数的偏导数、全微分、二元函数的极值、二重积分、无穷微分、常微分方程初步以及差分方程等。书中有些章节,作者打了“*”号,在讲授时可视具体情况予以灵活处理。

本套教材的每一章后都配备了大量的基本练习题。此外,每一章还精心编写了一套针对本章内容的综合练习题。在全书最后还编写了两套综合全书的综合练习题。这十六套综合练习题,倾注了作者的大量心血。它既有广度,又有深度,当然还有一定的难度。这些练习为有志于考研的学生提供了一个较为广阔的平台。套用一句时下最流行的话:与考研接轨。

本教材第一章由韦光贤编写;第二~七章由刘金舜编写;第八~十四章由羿旭明编写。除第一章的习题由韦光贤编写外,其余 13 章的习题及综合练习题均由刘金舜编写。全套教材最后由刘金舜审核定稿。在编写过程中,我们参阅了国内外部分院校的相关教材,主要参考书目列于参考文献;部分内容取自中国人民大学赵树源教授编写的《微积分》一书。

本教材从立项、编写到出版,一直得到武汉大学数学与统计学院的领导及武汉大学出版社的关心与支持,在此一并表示衷心地感谢!

限于作者自身的文化修养及水平,书中错漏之处在所难免,殷切希望读者指正。

刘金舜

2004 年 3 月

# 目　录

# 第一章　函　数

德国著名数学家高斯(Gauss,K.F.)曾说:任何现实生活中的问题都可以转化为数学,而任何数学都可以转化为函数。

函数,起源于人类对运动与变化的定量研究,是对现实世界中各种度量之间相互关系的一种抽象,是解决现实生活中各种问题必不可少的一种工具,也是微积分学中研究的基本对象,是高等数学中最重要也是最基本的概念之一。

## §1.1　实　数　集

### 1.1.1　集　合

康托(Cantor,G.)曾指出:集合是由我们直观感觉或意识到的、确定的、不同对象汇集而成的一个整体。这些对象称为此集合的元素。

"集合"是数学中一个重要的概念,它在现代数学中起着非常重要的作用。

一般地说,集合是具有某种共同属性的事物的全体,或者按照某一法则进行研究的对象的全体。构成集合的事物或对象,称为集合的元素。

通常我们研究某些事物组成的集合,例如一个班的学生、油田所有的油井、地球上全体的人等都称为集合。而具体的某个学生、某个油井、某个人则为上述集合的元素。

由有限多个元素组成的集合称为有限集;由无穷多个元素组成的集合称为无限集。

例 1.

(1)2003 年出生的所有婴儿;

(2)武汉大学所有的院系;

(3)宇宙中所有的天体;

(4)实数轴上所有点的集合。

其中(1)、(2)为有限集;(3)、(4)为无限集。

集合可以简称为集;而元素可以简称为元。

通常,我们用大写字母 $A,B,X,\Omega,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示集合中的元素。

若 $a$ 是 $A$ 中的一个元素,称 $a$ 属于 $A$,记做 $a\in A$;若 $a$ 不是 $A$ 中的一个元素,称 $a$ 不属于 $A$,记做 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$)。

在今后的学习中,我们将用以下字母表示特定的数集:

**N**:全体自然数集;

**Z**:全体整数集;

**Q**:全体有理数集;

**R**:全体实数集。

**例 2.** $2\in\mathbf{N}$; $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$; $\pi\notin\mathbf{Q}$。

### 1.1.2 集合的表示法

1. 表示集合的方法

(1)列举法:将集合中含有的全部元素(以任意的顺序)一一列举出来。

**例 1.** 10 以内的奇数集 $A=\{1,3,5,7,9\}$。

**例 2.** 方程 $(x-1)(x+2)(x-5)=0$ 的解集 $B=\{1,-2,5\}$。

(2)描述法:利用花括号把元素所具有的共同性质表示出来。即 $A=\{a|a$ 所具有的性质$\}$。

**例 3.** 全体正数的集合 $A=\{a|a\in\mathbf{R}^+\}$。

**例 4.** 方程 $y=x$ 的解集 $B=\{a|a\in\mathbf{R}\}$ 。

我们将不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$。

当 $A$ 中所有元素都属于 $B$ 时,当且仅当 $a\in A$,则 $a\in B$,即 $A$ 为 $B$ 的子集,记为 $A\subset B$,读作"$A$ 包含于 $B$"。特别地,当 $A\subset B$ 且 $B\subset$

$A$ 时，有 $A=B$。

2. 关于集合中几个重要的名词

(1)交集

当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 时，称 $x$ 属于 $A$ 与 $B$ 的交集，记作：$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。

(2)并集

当 $x\in A$ 或 $x\in B$ 时，称 $x$ 属于 $A$ 与 $B$ 的并集，记作：$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$。

(3)差集

当 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 时，称 $x$ 属于 $A$ 与 $B$ 的差集，记作：$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$。

### 1.1.3 集合的运算律

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$ (1.1)

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (1.2)

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (1.3)

(4)吸引律：$(A\cup B)\cap A=A \quad (A\cap B)\cup A=A$ (1.4)

(5)对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (1.5)

### 1.1.4 实数与数轴

高等数学主要是在实数范围内讨论问题的，因此我们有必要简单地回顾一下实数的一些属性。

人们对数的认识是逐步发展的。首先是自然数，由自然数构成的集合叫做自然数集，记为 **N**。在 **N** 中我们可以定义加法和乘法的运算，然后发展到有理数。有理数可以表示为$\frac{p}{q}$，其中 $p$ 与 $q$ 都是整数且 $q\neq0$。我们将有理数构成的集合称做有理数集，记为 **Q**，在 **Q** 中我们可以定义四则运算。

在数轴上，每一个有理数都可以找到一个点来表示。例如图1-1

中的点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ 就可以代表有理数 $-4, -1.5, -0.5, 3, 5$。我们将代表有理数 $x$ 的点称做有理点。由此可知,有理数集 $\mathbf{Q}$ 除了可以在其中定义四则运算外,还具有有序性。

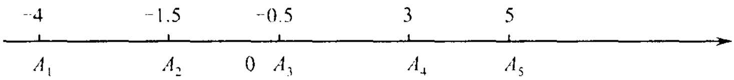


图 1-1

任给两个有理数 $a, b(a<b)$,则 $a, b$ 间至少可以找到一个有理数 $c$,使得 $a<c<b$。例如 $c=(a+b)/2$。同样的,在 $a, c$ 之间也至少可以找到一个有理数 $d$,使得 $a<d<c$。可见,无论有理数 $a, b$ 相差多小,在 $a, b$ 之间总可以找到无穷多个有理数,这就是有理数的稠密性。因为任何一个有理数必定和数轴上的一个有理点相对应,这说明有理点在数轴上是处处稠密的。

尽管如此,但有理点并没有充满整个数轴。例如边长为 1 的正方形,其对角线长为 $x$,如图 1-2 所示。由勾股定理可知 $x^2=2$。设在数轴上的点 $x$ 代表的数为$\sqrt{2}$,容易证明 $x=\sqrt{2}$ 不能表示为 $\frac{p}{q}$,($p, q$ 为整数,且 $q\neq 0$) 的形式,因此 $x=\sqrt{2}$ 不是有理数。可见数轴上为$\sqrt{2}$ 的点不是有理点。这种点也必有无穷多个,而且在数轴上也是处处稠密的。我们称这种点为无理点,与无理点相对应的数称为无理数。无理数是无限不循环的小数,如$\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$,$\pi$ 等。由它们构成的集合称为无理数集,记为 $\mathbf{I}$。我们将有理数与无理数统称为实数。全体实数构成的集合叫做实数集,记为 $\mathbf{R}$。

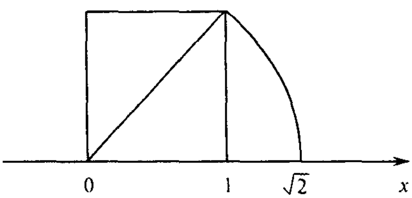


图 1-2

实数充满数轴且没有空隙,这就是实数的连续性。可见,每一个

实数必定是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上的每一个点必是一个实数，这就是说全体实数与数轴上的全体点构成一一对应的关系。基于此，我们在后面的讨论中，可以把点与实数不加区分，就是说，点 $a$ 和实数 $a$ 是相同的意思。

### 1.1.5 绝对值

**定义 1.1** 一个实数 $x$ 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上点 $x$ 与原点之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$。

(2) $|x|\geqslant 0$。

(3) $|-x|=|x|$。

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$。

(5) $\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}\quad a>0$。

从几何的角度看，$|x|<a$ 表示所有与原点间的距离小于 $a$ 的点的集合，而 $-a<x<a$ 表示所有在点 $-a$ 与 $a$ 之间的点 $x$ 的集合，所以它们表示的是相同的集合。

(6) $\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x \mid x>b\}\quad b>0$。

从几何上看，$|x|>b$ 表示所有与原点的距离大于 $b$ 的点 $x$ 的集合，而“$x<-b$ 和 $x>b$”表示在点 $-b$ 左边和在 $b$ 右边的所有点 $x$ 的集合，所以它们表示的是相同的点集。

(7) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$。

由性质(4)有　$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

$-|y|\leqslant y\leqslant |y|$

两边相加得　$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|$

再由性质(5)　$|x+y|\leqslant |x|+|y|$

(8) $|x-y|\geqslant ||x|-|y||$。

因 $|x|=|x+y-y|\leqslant |x+y|-|y|$

故 $|x-y|\geqslant |x|-|y|$

同理有 $|x-y| \geqslant |y|-|x| = -(|x|-|y|)$

由性质(5)有 $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$。

(10) $|x/y| = |x|/|y|$。

### 1.1.6 区间与邻域

在 $\mathbf{R}$ 的子集中，我们今后常遇到的是多种多样的区间。所谓区间就是介于某两点之间的所有点所构成的集合。这两个点称为区间的端点。区间可分为下面几种类型：

设 $a,b \in \mathbf{R}$ 且 $a<b$。

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 $x$ 的集合，称为以 $a,b$ 为端点的开区间，记作 $(a,b)$。即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 $x$ 的集合，称为以 $a,b$ 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$。即 $[a,b]=\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$。

(3) 类似地，可以定义半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$，即 $(a,b]=\{x|a<x \leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a \leqslant x<b\}$。

以上所列区间均为有限区间，有限区间右端点 $b$ 与左端点 $a$ 的差 $b-a$，称为区间的长度。

下列几类区间为无限区间：

(4) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，

$[a,+\infty)=\{x|x \geqslant a\}$。

(5) $(-\infty,b]=\{x|x \leqslant b\}$，

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$。

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|x \in \mathbf{R}\}$，即全体实数集合。

由性质(5)可知，实数集合

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

在数轴上表示一个以点 $x_0$ 为中心，长度为 $2\delta$ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，该开区间称为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$。

要注意的是，邻域永远是一个开区间。

在函数的研究中常用到集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$。我们称这个集合为点 $x_0$ 的去心邻域，记为 $U_0(x_0,\delta)$。

# §1.2 函数关系

## 1.2.1 函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中的变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在依存关系。我们先考察几个例子。

**例 1.** 根据《中华人民共和国个人所得税法》的规定：个人工资、薪水所得应缴纳个人所得税，应缴所得税的计算为：工资、薪水所得，以每月收入总额扣除 800 元后的余额，为应缴所得税额。下面给出个人所得税的税率表（如表 1-1 所示）。

**表 1-1**

| 级数 | 全月应缴税所得额 | 税率(%) |
| --- | --- | --- |
| 1 | 不超过 500 元 | 5 |
| 2 | 超过 800 元到 2 000 元的部分 | 10 |
| 3 | 超过 2 000 元到 5 000 元的部分 | 15 |
| 4 | 超过 5 000 元到 20 000 元的部分 | 20 |
| 5 | 超过 20 000 元到 40 000 元的部分 | 25 |
| 6 | 超过 40 000 元到 80 000 元的部分 | 30 |
| 7 | 超过 80 000 元到 100 000 元的部分 | 35 |
| 8 | 超过 100 000 元的部分 | 40 |

表 1-1 给出了个人月收入与应缴纳个人所得税之间的对应关系值。

**例 2.** 一物体自由下落，从开始下落时开始计时，设经过时间为 $t$ (s)，在这段时间内物体下落的位移为 $S$(m)。如果不计阻力，那么 $S$ 与 $t$ 之间有下列关系

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.6}$$

其中 $g$ 为重力加速度,是一个常数($g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$)。

如果物体从开始到落地所需时间为 $T$,那么变量 $t$ 的范围为

$$0\leqslant t\leqslant T。$$

当 $t$ 在这个变化范围内取任一值时,都可以根据式(1.6)求出 $S$ 的对应值。

以上两例不同之处在于:例 2 中变量之间的关系由一个确定的公式给出,而例 1 中变量之间的关系没有一个简明的表达公式,而代之以一张表格。

从以上两例我们可以看到,它们所描述的问题虽各不相同,但却有共同的特征:

(1)每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此孤立的,而是相互联系,相互依存的;

(2)当一个变量在它的变域中任意取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个相应的值与之相对应。

具有这两个特征的变量之间的依存关系,我们称为函数关系。

**定义 1.2** 设 $D\in\mathbf{R}$,且 $D\neq\varnothing$,若对于每一个 $x\in D$,按照某种对应法则 $f$,有惟一的实数 $y$ 与之对应,则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数,记做 $y=f(x)$,$x\in D$。称 $x$ 为自变量,$y$ 为因变量。

自变量 $x$ 的变域 $D$ 称为函数的定义域,记做 $D(f)$或 $D$,因变量的取值集合称为函数的值域,记做 $Z(f)$,即

$$Z(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}。$$

要注意的是,不同的函数要用不同的字母表示,以区别其对应规则。在实际问题中,由函数的实际意义可以确定其定义域;当函数无实际背景时,函数的定义域就是使对应规则有意义的自变量 $x$ 的全体取值。

**例 3.** 求 $y=\sqrt{x-1}$的定义域。

**解** 因 $x-1\geqslant 0$ 时,$\sqrt{x-1}$才有意义,

故 $\{x\mid x\geqslant 1\}$是函数的定义域。

**例 4.** $y=x$ 与 $y=x^2/x$ 是否同一函数?

**解** $y=x$ 的定义域是全体实数,而 $y=x^2/x$ 的定义域是全体非零实数,它们的定义域不同,因此不是同一函数。