新世纪高职高专实用规划教材

● 公共基础系列

# 应用数学基础

## ——微积分·线性代数·概率统计

YINGYONG SHUXUE JICHU


汪名杰 主审

占德胜 刘志高 主编

袁昌斌 孙建东 倪志强 副主编

胡章柱 张速 李素娟 参编



清华大学出版社

新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列

# 应 用 数 学 基 础

## ——微积分·线性代数·概率统计


汪名杰　主　审

占德胜　刘志高　主　编

袁昌斌　孙建东　倪志强　副主编

胡章柱　张　速　李素娟　参　编



清华大学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书共8章，内容主要包括：函数、极限、连续；导数及其应用；不定积分与定积分；微分方程；无穷级数；多元函数微积分；线性代数；概率论与数理统计等。

本书的特点是，重点突出、深入浅出、图文并茂、例题丰富且针对性强；淡化定理证明，对一些基本定理作了详细的解释说明，注重定理和基本公式的应用；用实例引入抽象概念；适合不同专业、不同学制的读者学习。以“*”号标记者为三年制高职选学内容。

本书可供高职、高专等专科层次学校各专业使用，也可作为大专成人教育学院、本科二级职业技术学院的教材。



**图书在版编目(CIP)数据**

应用数学基础——微积分·线性代数·概率统计/汪名杰主审；占德胜，刘志高主编；袁昌斌，孙建东，倪志强副主编；胡章柱，张速，李素娟参编.—北京：清华大学出版社，2005.9
(新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列)
ISBN 7-302-11426-9

Ⅰ.应…　Ⅱ.①汪…　②占…　③刘…　④袁…　⑤孙…　⑥倪…　⑦胡…　⑧张…　⑨李…　Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第082162号

**出 版 者**：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
**组稿编辑**：章忆文
**文稿编辑**：桑任松
**排版人员**：朱　康
**印 刷 者**：北京国马印刷厂
**装 订 者**：三河市李旗庄少明装订厂
**发 行 者**：新华书店总店北京发行所
**开　　本**：185×260　**印张**：19.25　**字数**：452千字
**版　　次**：2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
**书　　号**：ISBN 7-302-11426-9/O·481
**印　　数**：1～5000
**定　　价**：26.00元

# 《新世纪高职高专实用规划教材》序

## 编写目的

目前，随着教育改革的不断深入，高等职业教育发展迅速，进入到一个新的历史阶段。学校规模之大，数量之众，专业设置之广，办学条件之好和招生人数之多，都大大超过了历史上任何一个时期。然而，作为高职院校核心建设项目之一的教材建设，却远远滞后于高等职业教育发展的步伐，以至于许多高职院校的学生缺乏适用的教材，这势必影响高职院校的教育质量，也不利于高职教育的进一步发展。

目前，高职教材建设面临着新的契机和挑战：

(1) 高等职业教育发展迅猛，相应教材在编写、出版等环节需要在保证质量的前提下加快步伐，跟上节奏。

(2) 新型人才的需求，对教材提出了更高的要求，即教材要充分体现科学性、先进性和实用性。

(3) 高职高专教育自身的特点是强调学生的实践能力和动手能力，教材的取材和内容设置必须满足不断发展的教学需求，突出理论和实践的紧密结合。

有鉴于此，清华大学出版社在相关主管部门的大力支持下，组织部分高等职业技术学院的优秀教师以及相关行业的工程师，推出了一系列切合当前教育改革需要的高质量的面向就业的职业技术实用型教材。

## 系列教材

本系列教材主要涵盖以下领域：

- 计算机基础及其应用
- 计算机网络
- 计算机图形图像处理与多媒体
- 电子商务
- 计算机编程
- 电子与电工
- 机械
- 数控技术及模具设计
- 土木建筑
- 经济与管理
- 金融与保险

另外，系列教材还包括大学英语、大学语文、高等数学、大学物理、大学生心理健康等基础教材。所有教材都有相关的配套用书，如实训教材、辅导教材、习题集等。

## 教材特点

为了完善高等职业技术教育的教材体系，全面提高学生的动手能力、实践能力和职业技术素质，特意聘请有实践经验的高级工程师参与系列教材的编写，采用了一线工程技术人员与在校教师联合编写的模式，使课堂教学与实际操作紧密结合。本系列丛书的特点如下：

(1) 打破以往教科书的编写套路，在兼顾基础知识的同时，强调实用性和可操作性。

(2) 突出概念和应用，相关课程配有上机指导及习题，帮助读者对所学内容进行总结和提高。

(3) 设计了“注意”、“提示”、“技巧”等带有醒目标记的特色段落，使读者更容易得到有益的提示与应用技巧。

(4) 增加了全新的、实用的内容和知识点，并采取由浅入深、循序渐进、层次清楚、步骤详尽的写作方式，突出实践技能和动手能力。

## 读者定位

本系列教材针对职业教育，主要面向高职高专院校，同时也适用于同等学力的职业教育和继续教育。本丛书以三年制高职为主，同时也适用于两年制高职。

本系列教材的编写和出版是高职教育办学体制和运作机制改革的产物，在后期的推广使用过程中将紧紧跟随职业技术教育发展的步伐，不断吸取新型办学模式、课程改革的思路和方法，为促进职业培训和继续教育的社会需求奉献我们的力量。

我们希望，通过本系列教材的编写和推广应用，不仅有利于提高职业技术教育的整体水平，而且有助于加快改进职业技术教育的办学模式、课程体系和教学培训方法，形成具有特色的职业技术教育的新体系。

教材编委会

# 新世纪高职高专实用规划教材
## 编委会名单

# 前 言

本书是根据高等职业教育、高等专科教育及成人高等教育的要求，在认真总结多年从事高职、高专数学教学经验的基础上，特为两年制高职院校编写的。考虑到目前正处在三年制高职向两年制高职转轨的过渡期间，本书也增加了一些三年制的选学内容，以“*”标记。

本书是本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“强化概念，注重应用”为依据，同时又针对两年制高职生“学时少、底子薄”的特点来选取教材内容的。在进行教材内容的取舍时，既考虑了人才培养的应用性，又照顾了学生的可持续发展性，同时也尽量保持本学科知识体系的系统性。

教育部对高职高专院校的培养目标、办学模式和教学管理等都有了明确的指导思想，为这类院校指明了正确的办学方向。近几年，在培养高等技术应用型人才方面，高职高专院校起到了主力军的作用。根据教育部的有关指示精神和社会对高职高专毕业生的实际要求，我们编写了这本教材，它吸取了众多同类教材的一些优点，同时又具有以下特点:

(1) 本书适用于高职高专院校各类专业、不同生源、不同学制的大学一年级学生。

(2) 教材编写本着突出重点、分散难点、淡化证明的原则，在不降低教材质量的前提下，本着“必需、够用”的原则，尽量降低难度、着重应用。

(3) 强化概念，注重几何、物理解释，重点培养学生的动手应用能力、基本运算能力和空间想像能力。

(4) 注意体现启发式教学、个性化教学和直观性教学的原则，以有利于不同层次的学生的学习。

(5) 习题的编选本着锻炼学生的基本运算能力，不追求复杂的推理的计算的原则，适当加配应用性题目。

参加本书编写的有安徽工业大学职业技术学院占德胜(第 1 章和第 2 章)、胡章柱(第 4 章和第 7 章)、袁昌斌(第 5 章)、刘志高(第 6 章)、张速(第 8 章)、南京工业大学李素娟(第 3 章)。本书由汪名杰主审，由占德胜、刘志高统稿并定稿，孙建东、倪志强参与了本书的组织工作。

感谢安徽工业大学职业技术学院领导对于本书的出版所给予的大力支持。安徽工业大学职业技术学院 03 级计算机应用班学生叶向忠、张贵元、吴圣君在本书的图、表绘制方面做了许多工作，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，书中难免有欠妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

# 目　录

# 第 1 章　函数　极限　连续

**本章要点**

- 函数、复合函数、分段函数及初等函数的概念.
- 极限的概念、运算及性质.
- 连续函数的概念、性质及应用.

**本章难点**

- 复合函数的概念及其应用.
- 极限的概念与运算.
- 连续函数的应用.

极限是研究变量在某一过程中的变化趋势的有力工具，极限概念的提出具有划时代的意义. 微积分学中的几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的. 本章将在对函数概念进行复习和补充的基础上介绍数列与函数极限的概念、极限的性质与运算，并进一步讨论函数的连续性.

## 1.1　函数基本知识

### 1.1.1　函数的概念

函数是近代数学的基本概念之一，“高等数学”就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.

1. **预备知识**

**1)　集合**

**集合**是具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

常用字母 $A$，$B$，$C$，$D$ 表示集合；用 $a$，$b$，$c$，$d$ 表示集合中的元素. 表示方法有①列举法：$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$；②性质描述法：$A=\{x|x\text{的性质}P\}$.

(1)　元素与集合的关系：任意一个元素 $a$ 与任意一个集合 $A$ 之间的关系只能是：$a\notin A$ 或 $a\in A$.

一个集合，若它只含有有限个元素，则称之为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

常见的数集有：自然数集——**N**，整数集——**Z**，有理数集——**Q**，实数集——**R**.

(2)　集合与集合之间的关系：

设有 $A$、$B$ 两个集合，如果集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集，记

作 $A\subset B$.

如果集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$.

若作 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 则称 $A$ 是 $B$ 的真子集. 空集 $\varnothing$，$\varnothing\subset A$.

**2) 区间与邻域**

**(1) 区间**：设有 $a$, $b$ 是任意两个不相等的实数，则称集合

$\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记为 $(a,b)$；

$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，记为 $[a,b]$；

$\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 为左开右闭区间，记为 $(a,b]$；

$\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 为左闭右开区间，记为 $[a,b)$.

以上区间为有限区间，而 $(-\infty,+\infty),(-\infty,b),(a,+\infty),(-\infty,b],[a,+\infty)$ 统称为无限区间.

**(2) 邻域**：以点 $a$ 为中心的以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$. 且称区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 为点 $a$ 的**去心邻域**，记作 $U(\hat{a},\delta)$.

**2. 函数的概念**

**定义 1.1** 设 $D$ 为一个非空实数集，若存在某确定的对应法则 $f$，使得对于数集 $D$ 中的任意一个数 $x$，按照 $f$ 都有惟一的确定的实数 $y$ 与之相对应，则称 $f$ 是定义在集合 $D$ 上的函数. 记为 $y=f(x)$,其中 $D$ 称为函数的定义域，实数集 $B=\{\,y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $f$ 的值域. 不难看出 $f(x)$ 与 $f$ 是两个不同的概念，但人们往往是通过函数值来研究函数的，因此通常也称 $f(x)$ 是 $x$ 的函数. 函数是由它的定义域和对应法则所惟一确定的，因此，只有当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，它们才表示同一函数. 而与自变量及因变量用什么字母表示无关.

**3. 函数的表示方法**

(1) 解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法；

(2) 表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法；

(3) 图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量.

**4. 分段函数**

在数学上和工程技术中以及在日常生活中常常会遇到在函数定义域的不同范围具有不同的表达式的函数，我们称之为分段函数. 如

符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 及取整函数 $y=[x]$；

狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$；

$f(x)=\begin{cases}3+x, & x \geqslant 0,\\ 4-5x, & x<0,\end{cases}$ 其中 $x=0$ 称为“分界点”.

**注意**　分段函数的定义域是每一段表达式所对应的范围的并集. 在对它进行函数运算时，一定要分析出自变量对应的范围，从而确定其函数关系.

## 1.1.2　复合函数

### 1. 基本初等函数

在中学，学习过指数函数 $y=\mathrm{e}^x, y=a^x (a>0, a\neq 1)$ (图 1.1)；幂函数 $y=x^\mu$, $\mu$ 为任意实数(图 1.2)；对数函数 $y=\ln x, y=\log_a x, (a>0, a\neq 1)$ (图 1.3)；三角函数 $y=\sin x$ (图 1.4)，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$, 和反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$，$y=\arctan x, y=\mathrm{arc}\cot x$ (图 1.5)等五类函数，这些函数统称为**基本初等函数**. 大家要熟悉并掌握其图像与性质.

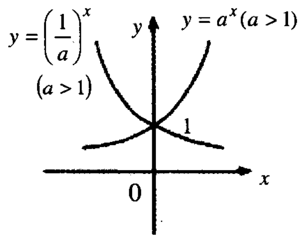


图 1.1

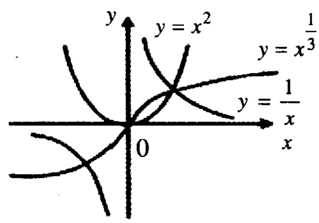


图 1.2

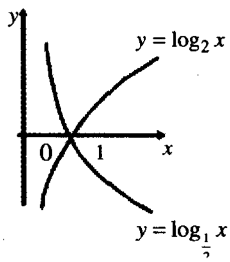


图 1.3

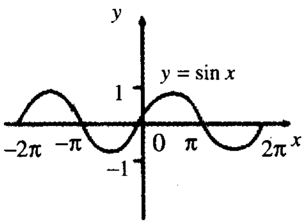


图 1.4

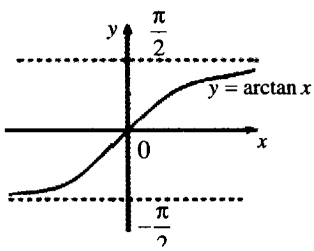


图 1.5

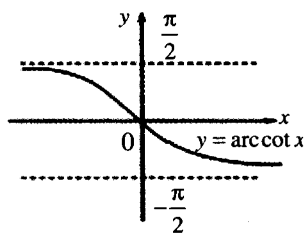


图 1.6

### 2. 复合函数

**定义 1.2**　若 $y$ 是 $u$ 的函数：$y=f(u)$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，$y$ 通过 $u$ 也构成了 $x$ 的函数，我们称此函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数. 简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中变量 $u$ 称为中间变量.

**注意**　并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的. 因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何值 $x$ 所

对应的值$u$(都大于或等于 2)，使函数$y=\arcsin u$没有定义.

**例 1** 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$,试求$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

**解** ① 求$f[\varphi(x)]$时，应将$f(x)$中的$x$视为$\varphi(x)$，因此

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}.$$

② 求$\varphi[f(x)]]$时，应将$\varphi(x)$中的$x$视为$f(x)$，因此

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\frac{1}{1+x}}.$$

**例 2** 设$f(x-1)=x^2$，求$f(2x+1)$.

**解** 方法一：令$u=x-1$,得到$f(u)=(u+1)^2$,再将$u=2x+1$代入，即得复合函数$f(2x+1)=((2x+1)+1)^2=4(x+1)^2$.

方法二：因为$f(x-1)=x^2=\left[(x-1)+1\right]^2$，于是问题转化为求$y=f(x)=(x+1)^2$与$\varphi(x)=2x+1$的复合函数，因此$f(2x+1)=\left[(2x+1)+1\right]^2=4(x+1)^2$.

## 1.1.3 初等函数

### 1. 初等函数的概念

**定义 1.3** 由基本初等函数及常数函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成，并且可以用一个数学式子表示的函数，称之为**初等函数**.

例如：$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}+\sin^2(2x-1)$，$y=\mathrm{e}^x\sqrt{\sin\dfrac{1}{1+x}}$等.

而狄利克雷函数$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$，

及$y=f(x)=\begin{cases}3+x, & x\geqslant 0\\ 4-5x, & x<0\end{cases}$，都不是初等函数.

### 2. 函数的基本性质

**1) 函数的单调性**

如果函数$f(x)$在区间$(a,b)$内随着$x$增大而增大，即对于$(a,b)$内任意两点$x_1$及$x_2$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$内是单调增加的. 此时也称函数$f(x)$为增函数. 其中$(a,b)$称为函数$f(x)$的增区间.

如果函数$f(x)$在区间$(a,b)$内随着$x$增大而减小，即对于$(a,b)$内任意两点$x_1$及$x_2$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$内是单调减小的. 此时也称函数$f(x)$为减函数. 其中$(a,b)$称为函数$f(x)$的减区间.

例如，函数$f(x)=x^2$在区间$(-\infty,0)$上是单调减小的，在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

**2) 函数的奇偶性**

如果函数$y=f(x)$的定义域是关于原点对称的，且对于定义域内的任意 $x$ 都满足

$f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做偶函数；

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域是关于原点对称的，且对于定义域内的任意 $x$ 都满足 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做奇函数.

不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

**注意**　偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

**3)　函数的周期性**

对于函数 $f(x)$，若存在一个不为零的常数 $T$，使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内任何 $x$ 都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，$T$ 是 $f(x)$ 的周期.

**注意**　我们说的周期函数的周期一般是指最小正周期. 周期函数不一定有最小正周期.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

**4)　函数的有界性**

如果对属于某一区间 $I$ 内的所有 $x$ 总存在 $M>0$，其中 $M$ 是一个与 $x$ 无关的常数，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，那么我们就称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界，否则称其在区间 $I$ 上无界. 其中 $M$ 称为函数的一个上界.

**注意**　一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数，否则称之为无界函数. 同时，有界函数的上界不惟一. 如果有上界，它的上界一定有无穷多个.

例如，函数 $y=\cos x, y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

**3. 反函数**

**定义 1.4**　设有函数 $y=f(x)$，若变量 $y$ 在函数的值域内任取一值 $y_0$ 时，变量 $x$ 在函数的定义域内必有惟一值 $x_0$ 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 $x$ 是变量 $y$ 的函数，这个函数用 $x=\varphi(y)$ 来表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

**几点说明：**

(1)　函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 一般仍然用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示因变量则可记为 $y=\varphi(x)$，也可记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2)　由反函数的定义可知，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数. 因而称它们互为反函数.

(3)　在同一坐标系中函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像是相同的，而函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

(4)　函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间存在如下的运算关系：

$$f^{-1}\left[f(x)\right]=x \text{ 和 } f\left[f^{-1}(x)\right]=x.$$

(5)　互为反函数的单调性是相同的. 如 $y=x^2\ (x>0)$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$ 互为反函数. 它们具有相同单调性，即在 $(0,+\infty)$ 上都是增函数.

(6)　互为反函数的定义域与值域恰好相反. 常常利用它来求一些函数的定义域与值域.

**例 3**　求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数，并求其值域.

**解**　由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 可解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，

得所求的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$ 或 $y=\log_2 x-\log_2(1-x)$ ，其定义域为(0,1). 则函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的值域为(0,1).

# 1.2 极限及其运算

## 1.2.1 极限的概念

### 1. 数列的极限

**1) 数列的基本知识**

**定义 1.5** 若存在某一个确定的法则 $f$，按这一法则，对任意自然数 $n$ 有一个确定的数 $u_n$ 与之对应，那么，这列有序数 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 称之为**数列**，且第 $n$ 项 $u_n$ 称之为该数列的一般项. 用函数的观点来看，数列 $u_n$ 也可看作自变量为正整数 $n$ 的函数：$u_n=f(n)$.

由此，我们可以由函数的单调性及有界性同样地来定义数列的单调性和有界性.

数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是这样一个数列 $\{u_n\}$，其中 $u_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,4,5,\cdots$，

也可写为 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$. 可以发现：这个数列是一个单调递减有界数列，而且有个趋势，数值越来越小，无限接近于 0.

数列 $\left\{u_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$ ： $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,1+\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots$. 该数列的一般项为 $u_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$，经观察，易知它是一个非单调但有界数列，由于当 $n$ 愈来愈大时，$(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 的值愈来愈接近于 0，因此 $u_n$ 的值愈来愈接近于 1.

数列 $\{u_n\}:1,-1,1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$ 易知它是一个非单调但有界数列，但 $u_n$ 随着 $n$ 愈来愈大时没有一定的变化趋势.

对一个数列来说，研究它在无穷远处是否具有这样的无限逼近的变化趋势是很有意义的. 这就是现在要讨论的数列的极限问题.

**2) 数列的极限的概念**

上面的讨论，很大程度上依赖于观察，诸如“愈来愈大”，“愈来愈接近”这类语言也显得含糊不清，因此，我们有必要弄清楚极限的准确数学含义. 在数学上，两个数 $a$ 与 $b$ 之间的接近程度可以用 $|a-b|$ 来度量，$|a-b|$ 越小，$a$ 与 $b$ 就越接近. 如 $u_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 与 1 的接近程度为 $|u_n-1|=\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$.

所谓“当 $n$ 愈来愈大时 $u_n$ 的值愈来愈接近于 1，意指当 $n$ 取得足够大时，$|u_n-1|$ 可以小于任意给定的正数 $\varepsilon(\varepsilon>0)$.

如：给定 $\varepsilon=\frac{1}{100}$，只要 $n>100$，那么数列从第 101 项起后的一切项 $u_{101}$，$u_{102}$，$\cdots$，$u_n$，$\cdots$ 均使不等式 $|u_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}=\varepsilon$ 成立.

如：给定 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$，只要 $n>1000$，那么数列从第 1001 项起后的一切项 $u_{1001}$，$u_{1002}$，$\cdots$，$u_n$，$\cdots$ 均使不等式 $|u_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}=\varepsilon$ 成立.

**定义 1.6(数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义)**　设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 $A$，若对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论多么小)，总存在一个正整数 $N$，当 $n>N$ 时，不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $A$ 为数列 $\{u_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{u_n\}$ 的极限为 $A$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

极限存在的数列称为收敛数列，反之，称为发散数列.

**我们给出对极限定义的几点注解：**

(1)　正数 $\varepsilon$ 是任意给定的，因为只有这样不等式 $|u_n-a|<\varepsilon$ 才能表达 $u_n$ 与 $A$ 愈来愈接近的含义，但一经给定 $\varepsilon$ 就不变了. 即 $\varepsilon$ 的任意性与确定性是统一的.

(2)　正整数 $N$ 与 $\varepsilon$ 是有关的. 一般地讲，$\varepsilon$ 越小 $N$ 就越大. 但通常 $N$ 的选取不惟一，只要找一个就行了. 即 $N$ 具有存在性与不惟一性. 一般 $N$ 由 $\varepsilon$ 决定，因而记为 $N(\varepsilon)$.

(3)　数列极限具有非常明显的几何特征：对于给定的正数 $\varepsilon$，数列中的无限多项 $u_{N+1},u_{N+2},\cdots,u_n,\cdots$ 一定落入区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，至多只有有限项在此区间之外. 即在 $A$ 点的附近吸引了数列 $\{u_n\}$ 中的无穷多项.

(4)　$\varepsilon-N$ 语言只能用来判定数列 $\{u_n\}$ 是否以 $A$ 极限，而不能用它来求数列的极限.

(5)　对于数列 $\{u_n\}$ 而言，除去数列的前面有限项并不改变其极限的存在性.

**3)　收敛数列的判定与性质**

**定理 1.1**　如果数列 $\{u_n\}$ 收敛，那么它的极限是惟一的.

**定理 1.2**　如果数列 $\{u_n\}$ 收敛，那么数列 $\{u_n\}$ 一定有界. 反之，单调有界数列一定收敛.

**定理 1.3(极限的保号性)**　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 且 $A>0(A<0)$，那么一定存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $u_n>0,(u_n<0)$ 成立.

**定理 1.4**　如果数列 $\{u_n\}$ 收敛于 $A$，那么它的任一子数列也收敛,且收敛于 $A$.

2. 函数的极限

**1)　函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点的极限**

**定义 1.7**　设有函数 $y=f(x)$ 和常数 $A$，若对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论多么小)，总存在一个正数 $\delta(\delta>0)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $A$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限，或称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限为 $A$. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$

**几点说明：**

(1)　$x_0$ 可在函数的定义域内，也可不在，即函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限的存在性与它在 $x_0$ 点处是否有定义无关. 但它必须在 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内有定义.