UMSS

大学数学科学丛书 —6

现代偏微分方程导论

陈恕行 著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　6

现代偏微分方程导论

陈恕行　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

偏微分方程是数学学科的一个重要分支，它与其他数学分支均有广泛的联系，而且在自然科学与工程技术中有广泛的应用．本书主要讲述偏微分方程的一般理论，广义函数与Sobolev空间，椭圆边值问题，能量方法，算子半群等内容，为提高读者的整体数学素质提供了必要的材料，也为部分读者进一步学习与研究偏微分方程理论做了准备．

本书可作为高等院校数学系(数学、应用数学、计算机数学等专业)与有关理工科的研究生教材，也可作为数学、工程等领域的青年教师或科研人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

现代偏微分方程导论/陈恕行著．—北京：科学出版社，2005
(大学数学科学丛书；6)
ISBN 7-03-014632-8

Ⅰ．现… Ⅱ．陈… Ⅲ．偏微分方程-概论 Ⅳ．O175．2
中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第121524号

责任编辑：吕 虹 祖翠娥／责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005年3月第一次印刷 印张：13
印数：1—3 000 字数：235 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

作 者 简 介

陈恕行，1941年6月生于上海，1962年毕业于复旦大学数学系，1962年至1965年攻读研究生，师从谷超豪教授.1984年起至今为复旦大学教授,1985年10月由国务院学位委员会评定为博士生导师.

1981年1月至1982年1月任美国Purdue大学访问学者，1987年8月至1988年1月任美国Duke大学访问教授，1996年1月至3月到美国Stanford大学做访问教授.1992年至2004年担任设在意大利的国际理论物理研究中心的国外协联委员，曾多次访问意大利并在该研究中心工作.此外还多次应邀访问法国，德国，意大利，英国，奥地利，日本，以及我国的香港、澳门、台湾等地区的许多学校与科学研究中心，进行讲学与合作研究.在许多国际学术会议上作全会报告或大会邀请报告.

长期从事偏微分方程理论与应用的研究以及数学教学工作.主要研究领域为非线性双曲型方程、微局部分析等，特别是在超音速绕流的数学理论、高维激波、非线性方程解的奇性传播等方面都有突出成果.关于三维尖头物体超音速绕流的研究成果解决了半个世纪以来未解决的难题，为相应的数值计算与实验技术提供了坚实的理论基础，实现了该领域研究的突破，得到国际学术界的高度评价.

1982年参加的"非线性双曲型方程组和多元混合型偏微分方程"项目获"国家自然科学二等奖"，以后又获省部级多项奖励.2003年独立研究的"高维非线性守恒律方程组与激波理论"获"2003年教育部自然科学一等奖".曾从事超音速绕流气动力计算，为远程导弹的型号设计作出了重要贡献.

在国内外专业杂志上发表论文100余篇.1979年与谷超豪，李大潜等合著的《数学物理方程》获全国高等学校优秀教材奖，另著有《偏微分方程概论》(1981年，高等教育出版社出版),《仿微分算子引论》(1990年，科学出版社出版),《拟微分算子》(1995年，高等教育出版社出版),《偏微分方程的奇性分析》(1998年，上海科技出版社出版)等.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序　言

偏微分方程作为数学的一个分支出现于 18 世纪. 最早得到系统研究的是三种基本的数学物理方程: 波动方程、热传导方程和调和方程, 所采用的主要工具是经典分析. 经过两个世纪的研究和探索, 人们在偏微分方程的理论和应用两个方面都取得了许多重要的成果, 对于上述三种方程为代表的数学物理方程以及一些更一般的偏微分方程的性质有了相当多的了解, 并建立了多种解定解问题的方法. 然而当人们在对偏微分方程作更广泛深入的研究时, 感受到了原有理论的局限性.

首先是解的概念需要拓广. 按经典意义下的定义, 一个偏微分方程的解必须具有出现在这个方程中的各阶连续偏导数, 且代入方程后使原方程成为恒等式. 但是, 在实际求解偏微分方程的定解问题时, 往往不一定能得到上述意义下的经典解. 相反, 在某些情形下, 一些不那么光滑的函数也可以具有解的意义, 因此在偏微分方程理论中对它们加以讨论是十分自然和必要的. 例如, 我们知道, 弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 具有行波解 $f(x-at)+g(x+at)$, 当函数 f 和 g 都具有二阶连续偏导数时, 行波 $f(x-at)+g(x+at)$ 满足弦振动方程. 而当函数 f 与 g 仅具有一阶连续偏导数时, 按经典的意义它就不能称为原方程的解. 但是, 弦振动方程是从一个表达物理守恒律的积分等式导出的, 而在该积分等式中仅出现未知函数的一阶导数. 所以, 我们没有理由把只具有一阶连续偏导数的行波排除在弦振动方程的解之外, 这就要求我们必须把经典意义下解的概念拓广.

又如, 在研究弹性薄膜平衡问题时, 常引入能量泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2-2uf)dxdy.$$

容易证明, 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 在边界上取确定值, 且使 $J(u)$ 达到极小, 则 u 为 Poisson 方程

$$-\Delta u=f$$

的解. 反之, 若 u 是 Poisson 方程满足边界上取给定值的 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 解. 它必是在这样的函数类中使 $J(u)$ 达到极小值的元素, 所以 Poisson 方程的求解即相当于该函数 $J(u)$ 求极值的问题.

但一般我们并不知道在 $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 中是否确有使 $J(u)$ 达到极小值的元素, 而且由于 $J(u)$ 的表示式中仅出现一阶导数, 故在 Ω 中要求 u 具有二阶连续偏导数也显得过于苛刻, 从而在较宽的函数类中考虑泛函 $J(u)$ 的极值问题更为自然, 也更符合物理的原来意义. 这又说明, 必须把经典解的概念加以拓广.

我们还可以用基本解方法为例说明经典理论的局限性. 基本解方法是偏微分方程经典理论中常用的一种方法, 其中包括格林函数法、黎曼函数法, 用发散积分有限部分来讨论波动方程求解的 Hadamard 方法等. 但究竟什么是基本解, 在经典理论的框架中却未能给予一个确切的回答. Dirac δ 函数出现以后, 人们一般将偏微分算子 L 的基本解定义为这样的函数 E, 它满足

$$LE = \delta.$$

δ 函数的概念首先来源于物理学上描述集中分布量的需要. 在这个概念产生的初期, 人们曾对它作了一些粗糙的描述, 例如: "在一点为无限大, 在其余点为零","包含某点的区域中积分为 1, 不包含在该点的区域中的积分为零" 等. 现在人们有时也用这些话来提供一些直观的理解, 但是很明显这些说法是不严格的. 那么, 究竟什么是 δ 函数的确切定义, 什么是基本解的确切定义呢? 这恰恰需要立足在广义函数论的基础上来加以阐述, 作为偏微分方程经典理论中一个重要的方法 —— 基本解方法, 其理论基础却无法在经典理论的框架上予以说明, 它再一次显示了经典理论的局限性.

到了 20 世纪, 随着现代科学技术和其他各数学分支的发展, 偏微分方程理论的研究冲破经典理论的局限, 而在更一般的框架中讨论问题已成为十分必要和可能了. 20 世纪 40 年代末, L. Schwartz 建立了广义函数论的严格基础, 为在更广的"函数类" 中研究偏微分方程做了奠基性的工作. 60 年代以后, 偏微分方程理论在思想与方法上又有了迅猛的发展, 出现了许多新的结果与新的方法, 并形成了系统的理论. 它与经典理论的主要区别是, 大量地使用泛函分析以及其他数学分支 (如几何、代数、拓扑等) 的思想、方法以及术语, 并且往往从更高的观点和更一般的角度来讨论和解决问题. 例如, 偏微分方程 $Lu = f$ 的解 u 不一定是一个处处满足方程的连续可微函数, 它可以是某个范围更广的空间中的元素. 在把 L 视为从一个空间到另一个空间的算子后, 可解性问题就归结为逆算子是否存在的问题, 唯一性问题就归结为算子 L 的核是否为零元素, 如此等. 习惯上常常将建立于经典分析 (微积分等) 基础上的偏微分方程理论称为经典理论, 将建立于广义函数论与泛函分析基础上的偏微分方程理论称为近代理论 (或现代理论). 当然, 经典理论中的一些基本方法与结果, 往往蕴含着许多更一般方法的思想源泉, 它在近代理论中仍然起着重要作用.

本书对现代偏微分方程理论作简要的介绍, 它也是读者进入一个新的理论领域的起点. 本书第 1 章介绍广义函数与 Sobolev 空间, 作为以后研究问题的基本工具. 第 2 章介绍偏微分方程一般理论中的一些重要结果, 其中有些结果虽然产生于广义函数论诞生以前, 但由于其在偏微分方程理论中的重要地位, 仍将其列入在本书中. 第 3~5 章分别介绍椭圆型方程, 双曲型方程和抛物型方程的一些研究方法与结果, 它们对于偏微分方程近代理论的学习与研究来说都是最重要与基本的. 每

节后面均附有习题可供读者加深理解书中基本内容使用. 各章节中带 * 号的内容难度一般较大, 读者在初次阅读时也可跳过.

本书作为现代偏微分方程理论的入门书, 适宜于作为有关数学专业人员与研究生学习的阅读材料. 本书较多地参考了作者以往所著的 "偏微分方程概论" 以及作者与洪家兴合著的 "偏微分方程近代方法". 同时, 作者还参阅了国内外同一主题的许多著作, 吸收了各书之所长, 相信能对读者有所帮助. 在本书的写作过程中, 作者得到了复旦大学及其他各学校许多老师与同事们的帮助, 获得了许多有益的建议与修改意见, 在此一并表示衷心的感谢. 由于作者水平所限, 在书中还会有许多缺点与不足之处, 恳请读者们提出宝贵的批评意见.

陈恕行

2004 年 10 月于上海

目　录

第1章　广义函数与 Sobolev 空间

§1.1　广义函数的基本概念、基本空间

1. 引言

在偏微分方程经典理论中，一般总是在连续函数的范围内考虑问题的．近代的偏微分方程理论引入了新的工具广义函数来讨论各类问题，广义函数扩充了函数的概念，从而可以在更广的范围并从更深的层次来考察偏微分方程，广义函数的严格的数学基础是 L. Schwartz 等人在 20 世纪 40 年代末奠定的．本章中我们将对 Schwartz 的广义函数理论作一个概要的介绍．

广义函数的概念首先是从物理上引入的，物理上经常会遇到一些集中分布的量，如集中质量、集中电荷等．以集中质量为例，设在一直线上有一单位质量集中在原点附近，如果其集中程度很大，即其集中分布的范围与我们在同一问题中所遇到的其他长度来比较，小到可以忽略时，我们就说质量集中在原点．如通常所知，在连续的质量分布情形下，质量分布是与密度分布相对应的，如若有一直线棒，其密度分布为 $\rho=\rho(x)$, 则 $\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)dx$ 就表示在 $[x_1,\ x_2]$ 一段中棒的质量，反之若已知每一段棒的质量，则对一个固定的点 x 来说，取一个包含 x 点的区间 Δl, 并记这一段棒的质量为 ΔM, 则 $\rho(x)=\lim_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta M}{\Delta l}$. 那么相应于集中质量分布的密度分布是什么呢？若质量集中在原点，则当 $x\neq 0$ 时， $\rho(x)=0$, 而当 $x=0$ 时，$\dfrac{\Delta M}{\Delta l}$ 趋于无限大．于是，若用古典“每点对应一个函数值”的函数概念就无法表达与集中质量相对应的密度分布．而由于实际上这种集中分布的量常常遇到，所以很需要发展相应的数学工具来描写它．

一般的广义函数概念是作为泛函引入的，为说明这一点，我们先考察 $[a,\ b]$ 上的平方可积函数．我们知道，如果 $f(x)\in L^2[a,\ b]$, 则它以下列方式定义了 $L^2[a,\ b]$ 上的一个线性连续泛函

$$F(\varphi)=\langle f,\ \varphi\rangle=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,\qquad \forall\varphi(x)\in L^2[a,\ b]. \tag{1.1}$$

反之，根据泛函分析的知识知道，对于 $L^2[a,b]$ 中的一个线性连续泛函，就有唯一的函数 $f(x)\in L^2[a,b]$ 与之对应，并将此泛函表现为 (1.1) 的形式．因此，在 (1.1) 的泛函表现形式下， L^2 函数与 $L^2[a,b]$ 空间上的泛函就可以看成是一样的．

但如果考察 $L^p[a,b]$ $(p>2)$, 情况就不同了．那时，根据泛函分析知识知道，

当 q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时， $L^q[a,b]$ 中的函数均可按 (1.1) 形式定义一个 $L^p[a,b]$ 上的泛函，而 $L^p[a,b]$ 上的泛函也必定可表示为 $L^q[a,b]$ 中的函数．若 $p>2$, 则必有 $q<2<p$, 于是 $L^p[a,b]$ 上的泛函要比原空间的函数类更广．如果我们只将 $L^p[a,b]$ 的元素称为 "函数", 那么用构造泛函的方法就得到了一些 "广义的函数".

如果考察性质更好的函数空间，如考察 $[a,b]$ 上的连续函数全体 $C[a,b]$, 这时 $L^1[a,b]$ 中的任一函数，仍可按 (1.1) 定义一个线性连续泛函；但反过来， $C[a,b]$ 上的线性连续泛函却不一定可以用某个常义函数 $f\in L^1[a,b]$ 表为 (1.1) 的形式．例如，若 $0\in[a,b]$, 则对 $\varphi(x)\in C[a,b]$, 可定义一个线性泛函为

$$F(\varphi)=\varphi(0). \tag{1.2}$$

易见，若 $\varphi_\nu(x)\in C[a,b]$, 满足

$$\|\varphi_\nu(x)\|_{C[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|\varphi_\nu(x)|\to 0,$$

则 $F(\varphi_\nu)=\varphi_\nu(0)\to 0$, 所以 $F(\varphi)$ 是连续的，关于它是线性这一点是显然的．

但是，找不到一个通常的可积函数 $f(x)$, 使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),\qquad \forall\varphi(x)\in C[a,b]. \tag{1.3}$$

事实上，假若有这样的函数 $f(x)$ 存在，则对于不含原点的区间 $[c,d]\subset(a,b)$(不妨设 $0<c<d$) 及对于 $[c,d]$ 中任一连续函数 $\psi(x)$, 在 ε 充分小时 ($\varepsilon<\min(c,b-d)$), 作

$$\psi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in[c,d],\\ \dfrac{x-c+\varepsilon}{\varepsilon}\psi(c), & x\in[c-\varepsilon,\ c),\\ \dfrac{\varepsilon-x+d}{\varepsilon}\psi(d), & x\in(d,\ d+\varepsilon],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则有 $\psi_\varepsilon(0)=0$, 且

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\psi_\varepsilon(x)dx-\int_c^d f(x)\psi(x)dx\right|\\ \leqslant&\left(\int_{c-\varepsilon}^c+\int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)\psi_\varepsilon(x)|\,dx\\ \leqslant&\max(|\psi(c)|,\ |\psi(d)|)\left(\int_{c-\varepsilon}^c+\int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

由于 $\int_a^b f(x)\psi_\varepsilon(x)dx=\psi_\varepsilon(0)=0$, 所以

$$\left|\int_c^d f(x)\psi(x)dx\right| \leqslant \max(|\psi(c)|,\ |\psi(d)|)\cdot\left(\int_{c-\varepsilon}^c + \int_d^{d+\varepsilon}\right)|f(x)|\,dx,$$

根据积分的绝对连续性知，上式右端在 $\varepsilon \to 0$ 时为零，而左端与 ε 无关，故

$$\int_c^d f(x)\psi(x)dx = 0.$$

因此，$f(x)$ 在 $[c,d]$ 中为零，但 $[c,d]$ 是任意一个不含原点的区间. 所以 $f(x)$ 在原点外均为零，即 $f(x)$ 几乎处处为零，但这样又将导致 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \equiv 0$ 的结论，而使 (1.3) 式不能保持. 这说明，(1.2) 式所表示的泛函无法用常义的函数来表示. 我们称由 (1.2) 式表达的泛函为 δ 函数，以后也形式地记为 $\langle\delta,\ \varphi\rangle$，甚至 $\int \delta(x)\varphi(x)dx$ 等.

通常遇到的可积函数都可以视为由 (1.1) 式决定一个线性连续泛函，从而可以将普通函数看成线性连续泛函的特例，而线性连续泛函全体一般会包含更多的元素. 我们今后就把定义在一些特定函数空间上的线性连续泛函称为广义函数，显然，广义函数的性质与它所作用的函数空间的性质密切相关. 我们将广义函数所作用的函数空间称为基本函数空间 (或基本空间)，下面先介绍几个常用的基本函数空间及其性质.

2. 基本空间 $C^\infty(R^n)$，$C_c^\infty(R^n)$

以下讨论自变量在 R^n 中变化的函数空间，且一般均考虑复值函数.

先来定义空间 $C^\infty(R^n)$. 在 $C^\infty(R^n)$ 中具有的元素是在 R^n 中任意次连续可微的复值函数，其中的拓扑规定为，若有 $C^\infty(R^n)$ 中的序列 $\{\varphi_\nu\}$，且对任一紧集 K 与任一重指标 α，

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_\nu| \to 0,$$

即称 $\varphi_\nu \to 0\ (C^\infty(R^n))$.

为了定义空间 $C_c^\infty(R^n)$，我们先引入支集的概念. 对于一个连续函数 $\varphi(x)$，将 $\varphi(x) \neq 0$ 的点 x 全体的闭包称为 $\varphi(x)$ 的支集，记作 supp $\varphi(x)$，即

$$\operatorname{supp}\varphi(x) = \overline{\{x\,|\varphi(x) \neq 0\}}. \tag{1.4}$$

如果 $\varphi(x)$ 的支集是紧集，则称 $\varphi(x)$ 有紧支集.

现在再引进空间 $C_c^\infty(R^n)$，其中的元素是无限次连续可微且有紧支集的函数. 在 $C_c^\infty(R^n)$ 中的拓扑规定为，若有 $C_c^\infty(R^n)$ 中的函数序列 $\{\varphi_\nu\}$，满足条件:

(1) 所有 φ_ν 的支集在一个共同的紧集 K 内;

(2) 对任何重指标 α，在上述紧集 K 内

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_\nu| \to 0,$$

则称 $\varphi_\nu \to 0\ (C_c^\infty(R^n))$，空间 $C_c^\infty(R^n)$ 又记为 $\mathscr{D}(R^n)$.

类似地，对于 R^n 中的开集 Ω、可以定义 $C^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ 等，这只要把上述定义中 R^n 的紧集改为 Ω 中的紧集即可.

例 1.1 令

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1, \\ 0, & |x|\geqslant 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

容易验证， $\varphi(x)$ 是一个无限次连续可微函数，且其支集为 $|x|\leqslant 1$. 因此 $\varphi(x)\in C_c^\infty(R^n)$.

在今后的讨论中将常常用到函数 $\alpha(x)=\dfrac{1}{C}\varphi(x)$, 其中 $C=\int_{R^n}\varphi(x)dx$. 于是对函数 $\alpha(x)$, $\int_{R^n}\alpha(x)dx=1$ 成立.

例 1.2 设 $R>1$, $g_R(x)$ 为球 B_R 的特征函数，即

$$g_R(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant R, \\ 0, & |x|>R. \end{cases} \tag{1.6}$$

作

$$\beta_R(x)=\int g_R(x-t)\alpha(t)dt=\int g_R(t)\alpha(x-t)dt,$$

其中 $\alpha(x)$ 为例 1.1 中所定义的函数，故 $\beta_R(x)$ 表示以 x 为中心，以 1 为半径的球中函数 $g_R(t)$ 的带权平均值. 容易证明： $\beta_R(x)$ 为 C^∞ 函数，它的支集在 $|x|\leqslant R+1$ 中，且当 $|x|\leqslant R-1$ 时， $\beta_R(x)\equiv 1$.

对任一函数 $\varphi\in C^\infty(R^n)$, 作 $\varphi_\nu(x)=\beta_\nu(x)\varphi(x)$, 则 $\varphi_\nu\in C_c^\infty(R^n)$, 它在 $|x|\leqslant \nu-1$ 时等于 $\varphi(x)$, 在 $|x|>\nu+1$ 时等于零，而且当 $\nu\to\infty$ 时，在任何固定的紧集上，最终必有 $\varphi_\nu(x)\equiv\varphi(x)$, 所以 $\varphi_\nu(x)\to\varphi(x)\,(C^\infty(R^n))$. 由此可见，$C_c^\infty(R^n)$ 中的函数是很多的，它构成 $C^\infty(R^n)$ 中的稠密集.

例 1.3 我们再举一个例子以说明 $C_c^\infty(R^n)$ 与 $C^\infty(R^n)$ 中极限关系的不相同. 取 $\alpha(x)$ 为例 1.1 中所定义的函数，并且作 $\varphi_\nu(x)=\alpha(x_1-\nu,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, 则当 $\nu\to\infty$ 时， $\varphi_\nu(x)$ 的支集渐趋于无限远. 故在任一有界集内，从某一个 ν 值起恒有 $\varphi_\nu\equiv 0$. 所以按 $C^\infty(R^n)$ 的极限关系来说有 $\varphi_\nu\to 0$, 但是由于所有 $\varphi_\nu(x)$ 的支集不可能同时被一个有界集所包含，所以按 $C_c^\infty(R^n)$ 的极限关系， $\varphi_\nu\not\to 0$.

3. 函数的正则化、平均算子

设 $\alpha(x)$ 如上段所定义，记 $\alpha_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}\alpha\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, 则 $\alpha_\varepsilon(x)$ 也是 $C_c^\infty(R^n)$ 的元素，且满足 $\operatorname{supp}\alpha_\varepsilon(x)=\{x\,|\,|x|\leqslant\varepsilon\}$, $\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(x)dx=1$.

如果函数 $u(x)$ 定义于区域 Ω 中，在任一紧集 $K\subset\Omega$ 中均为 Lebesgue 可积的，则称 $u(x)$ 为局部可积. 如果函数 $u(x)$ 在 R^n 中局部可积，那么

$$u_\varepsilon(x)=\int_{R^n}u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy=\int_{R^n}u(y)\alpha_\varepsilon(x-y)dy \tag{1.7}$$

有定义，且有下面的定理.

定理 1.1 设 $u(x)$ 在 R^n 中局部可积，则按 (1.7) 式定义的 $u_\varepsilon(x)$ 是一个 C^∞ 函数，而且当 $\varepsilon\to 0$ 时，若 $u(x)\in C^0(R^n)$, 则 $u_\varepsilon\to u(C^0(R^n))$; 若 $u(x)\in L^p(R^n)$, 则 $u_\varepsilon\to u(L^p(R^n))$.

证明 因为 $u_\varepsilon(x)$ 可表为 $\int_{R^n}u(y)\alpha_\varepsilon(x-y)dy$, 而 α_ε 是一个无限次连续可微函数，故利用导数与积分号的可交换性就可得到 $u_\varepsilon(x)$ 可以无限次求导数的性质.

若 $u(x)\in C^0(R^n)$, 则利用 $\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=1$, 可得

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int_{R^n}(u(x-y)-u(x))\alpha_\varepsilon(y)dy.$$

当 x 属于某紧集 K 时，由于 $\alpha_\varepsilon(x)$ 的支集在球 $|x|\leqslant\varepsilon$ 中，故上式积分号下作为函数 u 的变元的 x 与 $x-y$ 落在紧集 K_1 中，这里 K_1 是把以 K 中任意点为心，半径为 1 的球都包含在里面的紧集. 利用 $u(x)$ 在紧集 K_1 上的一致连续性可知，对任意 $\delta>0$, 在 ε 充分小时有

$$\begin{aligned}\max_{x\in K}|u_\varepsilon(x)-u(x)|&\leqslant\max_{x\in K}\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|u(x-y)-u(x)|\alpha_\varepsilon(y)dy\\&\leqslant\delta\int_{|y|\leqslant\varepsilon}\alpha_\varepsilon(y)dy=\delta,\end{aligned}$$

所以 $\varepsilon\to 0$ 时， $u_\varepsilon\to u(C^0(R^n))$.

如果 $u\in L^p(R^n)$, 我们先找一个具有紧支集的连续函数 v, 使它满足 $\|u-v\|_{L^p}\leqslant\frac{\delta}{3}$, 利用 L^p 空间的三角不等式，有

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^p}\leqslant\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^p}+\|v_\varepsilon-v\|_{L^p}+\|u-v\|_{L^p},\tag{1.8}$$

由于对任意 L^p 函数 $f(x)$,

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_{L^p}&=\left(\int_{R^n_x}|f_\varepsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left\{\int_{R^n_x}\left|\int_{R^n_y}f(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left\{\int_{R^n_x}\left(\int_{R^n_y}|f(x-y)|\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left\{\int_{R^n_x}\left(\int_{R^n_y}|f(x-y)|^p\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{\frac{p}{p}}\cdot\left(\int_{R^n_y}\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{\frac{p}{q}}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$