

G.R.Liu S.S.Quek 著 龙述尧 侯淑娟 钱长照 译

The Finite Element Method:
有限元法实用教程
A Practical Course

湖南大学出版社

The Finite Element Method
—A Practical Course

有限元法实用教程

G. R. Liu S. S. Quek 著
龙述尧 侯淑娟 钱长照 译

湖南大学出版社

2004年·长沙

图字:18-2004-095

内 容 简 介

本书介绍了有限元法的基本概念、基本理论和步骤,对有限元的理论和应用阐述得既深刻而又简洁,既信息广泛而又简明扼要,既有理论性而又有实用性,全书共分为13章,分别为计算机模拟、固体力学和结构力学简介、有限元法基础、桁架的有限元法、梁的有限元法、刚架的有限元法、二维固体问题的有限元法、板和壳的有限元法、三维固体问题的有限元法、特殊用途的单元、模拟技术、热传导问题的有限元法以及使用 ABAQUS。第3~12章附有思考练习题。

本书可作为机械、土木、航空航天等专业本科生、研究生教材,也可供该类专业教师、工程技术人员、科研人员参考。

Copyright © 2003, Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

This edition of The Finite Element Method; A Practical Course (ISBN:0750658665) by G. R. Liu and S. S. Quek is published by arrangement with Elsevier Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, OX5 1GB, England

图书在版编目(CIP)数据

有限元法实用教程/G. R. Liu S. S. Quek 著;龙述尧,侯淑娟,钱长照译.

—长沙:湖南大学出版社,2004.9

ISBN 7-81053-843-8

I. 有... II. ①龙... ②侯... ③钱... III. 有限元法

—教材 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 088468 号

有限元法实用教程

Youxian Yuanfa Shiyong Jiaocheng

著 者: G. R. Liu S. S. Quek

译 者: 龙述尧 侯淑娟 钱长照

责任编辑: 严小涛

封面设计: 吴颖辉

出版发行: 湖南大学出版社

社 址: 湖南·长沙·岳麓山 邮 编: 410082

电 话: 0731-8821691(发行部),8821593(编辑室),8821006(出版部)

传 真: 0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱: press@hnu.net.cn 网 址: http://press.hnu.net.cn

印 装: 湖南大学印刷厂 总 经 销: 湖南省新华书店

开本: 787×1092 16开 印张: 19.75 字数: 457千

版次: 2004年10月第1版 印次: 2004年10月第1次印刷 印数: 1~3000册

书号: ISBN 7-81053-843-8/O·56

定价: 42.00元

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错,请与发行部联系

前 言

近几十年来,在各种工程系统的模拟和仿真中,有限元法(FEM)已经发展成为当前主要的、不可缺少的一门技术。在开发先进的工程系统时,工程师必须经过一系列非常严格的工序:建模、仿真、可视化、分析、设计、样机制造、测试,直到最后的加工制造或建造。因此,在建立先进的工程系统时,各种高速、有效的模拟和仿真技术越来越重要,从而使有限元法的应用成倍增加。

该书为工程师和大学生解决机械和土木工程方面的基本线性问题提供了系统而详细的指导,重点是结构力学和热传导。本书的主要目的是为读者提供必要的有限元概念、理论和技术,以便能熟练地使用商业有限元软件包来解决实际问题,包括结构力学问题和热传导问题,并用一种简明扼要的方式介绍了重要的基本经典理论。在设计和分析包括微结构的结构和热系统时,我们也讨论了工程问题的现代科学发展动态,并且对有限元中关键技术进行了深入讨论,同时为了证明有限元的理论、方法、技术和实际应用,本书给出了实例研究。掌握了该书的概念、理论和建模技术,读者就可以像专业人员一样使用商业有限元软件包来解决工程结构问题。

该书的特色是研究的主题既深刻又简洁、既信息广泛又简明扼要、既具有理论性又具有实用性。

本书是固体和结构力学、能量原理、加权残值法、有限元法、建模和计算技术以及商业软件包的合成体。有限元法最初是为求解工程和结构中的力学问题而产生出来的,因此,通过固体力学问题来学习有限元法是很恰当的。固体结构力学本身就是一个内容丰富的学科,本书将用一章的篇幅通过提出一些重要的基本原理的方法来简要地讲述固体和结构力学,重点是推导三维固体力学的重要的控制方程,并通过图形来说明固体中的所有场变量以及固体和结构力学之间的关系,然后从三维固体的一般方程推导出各种类型固体和结构的方程,例如二维固体、桁架、梁和板。我们从教学实践中发现:这种推导固体结构力学基本方程的方法是非常有效的。在研究其他的结构构件之前介绍一般的三维方程,实际上为学生提供了可靠的基础背景知识,而其他的方程就可以由一般的三维方程很容易地推导出来,易于理解,而在其他章节中利用有限元法求解算例以及实例研究就可以进一步深入理解。我们过去几年的教学经验表明:大部分学生虽然不具备工程方面知识,但通过这种步骤理解力学知识就较为简单。

在过去的几年中,我们发现许多工程师也必须使用商业的有限元软件包来对工程系统进行仿真,而很多人并不具备一定的有限元知识,他们需要通过自学来掌握它。如果没有这样一本书,许多人会像操作“黑箱子”一样盲目地使用软件包。该书通过把软件中所处理的事和有限元的理论性概念结合起来,使用户清楚了解黑箱子的运作。实例研究中给出了详细的描述和相互引用的资料,来说明有限元的公式和技术是怎样在软件包中实

现的。

在过去半个世纪中,有限元中的很多技术被开发出来,但是,常用的却不多。本书虽不是一本百科全书,但却是一本能提供信息与技术指导的书,读者能通过描述这些技术的重要特性,来解决实际问题,使读者能很好地体会这些技术的奥妙,从而让读者对有限元方法更感兴趣。

本书采用许多实例来证实有限元的理论,包括微机结构和微系统的模拟和仿真方面的许多有限元的最新应用。大部分的实例都是从实际问题中简化提炼而成,能清楚地揭示有限元的概念,并且用一种读者更容易理解的方式来描述。如果能在工作站上完成这些实例将有助于读者理解重要的概念、方法和理论。

一幅图胜过千言万语,利用图形和表格来描述重要的概念和理论是很重要的,并且受读者的欢迎,尤其是不具有工程背景的读者。

本书提供了使用商业软件包 ABAQUS 的实用技术说明,用 ABAQUS 计算的实例可以像使用 NASTRAN、ANSYS、MARC 等其他商业软件一样,很容易地进行重新计算。讨论了在使用商业软件包进行模拟和仿真时遇到的问题,并且提供了一些方法和使用指南,以求有效地求解这些问题。

本书的重点在于理解线性有限元分析的基础和原理,我们选择 ABAQUS 是因为它可以容易地进行线性分析,但是,随着学习的深入,读者也可以把 ABAQUS 推广到非线性有限元分析的项目。

有限元课程的备课对教师来讲是一项很费时的的工作,因为需要很多图表来解释所有的理论、概念和技术。因此,作者为授课者提供了一系列该书中相关材料的彩色 Power-Point 幻灯片,这些幻灯片可以在下面的网站中找到: www.bh.com/companions/750658665,旨在减少教师的备课时间,所有的幻灯片根据章节分组,授课者根据学生班级的水平和讲授课程的学时可以任意地删减和增加幻灯片,或者采用所提供的全部幻灯片。

下面对本书进行分章描述:

第 1 章:强调了在工程系统设计过程中所需要的计算机模拟和仿真有限元法的作用及其重要性,讨论了对工程中的物理问题进行计算模拟和仿真时的一般情况,概要地说明了物理问题的数学和计算模型的创建方法,讨论了在使用有限元时所需要的有关几何简化、域离散、数值计算和可视化的问题。

第 2 章:讲述了固体和结构力学的基础知识,引入了固体力学的重要场变量以及推导了这些场变量的主要动力学方程,并用简洁、易懂的方式讲述了二维和三维实体、桁架、梁、刚架和板,具有力学背景的读者可以跳过本章。

第 3 章:介绍了一般的有限元步骤,描述了系统方程的强形式和弱形式概念以及场变量插值形函数的构造,讨论了形函数的性质,并重点讲述了用于建立有限元方程形函数的充分条件,介绍了哈密顿原理并用于建立有限元方程的一般形式,讨论了求解静力、特征值以及瞬态问题有限元方程的方法。

第 4 章:详述了求桁架结构的有限元矩阵的步骤,也讲述了求形函数、应变矩阵、局部和整体坐标以及整体有限元系统方程的组装过程,利用简单算例来说明用于计算桁架结构中的位移和应力的完整而详细的有限元步骤,通过这些算例揭示了作为一种可靠数值

工具的有限元的再生性和收敛性。

第5章:研究了梁结构的有限元矩阵的推导方法,接下来叙述了求形函数和应变矩阵的步骤,建立了浅梁单元,通过算例讲述了微型梁结构中的有限元法的应用。

第6章:通过合并桁架单元和梁单元的矩阵,给出了构造刚架结构的有限元矩阵的过程,详细地讨论了局部和整体坐标系之间的变换矩阵以及矩阵的变换,给出了一个算例来说明在求解实际工程问题时刚架单元的使用。

第7章:推导了二维实体有限元矩阵的公式,详细推导了线性三角形单元、双线性矩形单元和四边形单元的矩阵,其中也介绍了面积和自然坐标,也讨论了等参公式和高次单元,分析一个微型仪器的算例来研究三角形和四边形单元的精度和收敛性。

第8章:研究了板和壳的有限元矩阵,并详细推导了基于实际的 Reissner—Mindlin 板理论的矩形板单元的矩阵,通过简单地合并板单元和二维实体平面应力单元推导了壳单元,给出了利用 ABAQUS 分析一个微型仪器的算例。

第9章:研究了三维实体有限元矩阵,并详细推导了四面体单元和六面体单元,其中介绍了体积坐标,也简要讲述了高次单元的公式推导,给出了一个采用三维单元来模拟纳米级异质结构系统的算例。

第10章:介绍并简单讨论了具有特殊用途的单元,推导了在许多断裂力学问题中所用到的裂纹尖端单元,介绍了采用映射技术和使用结构阻尼的技术来模拟无限域并推导了无限元,也讨论了有限条法和条元法。

第11章:讨论了固体和结构的应力分析的模拟技术,包括了对称性的应用、多点约束、网格协调性、偏移模拟、支承、连接和多点约束的施加,也包含了说明模拟技术的使用的算例。

第12章:给出了基于加权残值法的求解偏微分方程的有限元法的步骤,特别推导了一维和二维问题的热传导问题的公式,讨论了求解热传导问题的情况,给出了几个算例以说明使用 ABAQUS 来求解热传导问题。

第13章:简要讲述了使用 ABAQUS 的基本知识,以便新的用户在使用软件时知道如何着手,给出一个算例列出了书写一个 ABAQUS 输入文件的详细步骤,并强调指出了大部分有限元软件包都需要的重要信息。

本书中的大部分材料取自第一作者自 1995 年以来在新加坡国立大学从事本科生和研究生教学时授课的讲稿,并经过不断的修改和完善而成。在本书中,作者为读者提供了必要的信息和相关的参考书籍,如:辛柯维奇和泰勒(Zienkiewicz and Taylor)的著作。本书还引用了其他有限元方面的书,在此作者表示衷心的感谢,同时也感谢几年来学生所给予的帮助。

G. R. Liu(刘桂荣)和 S. S. Quek

目 次

第 1 章 计算机模拟	1
1.1 引言/1	
1.2 工程中的物理问题/3	
1.3 使用有限元法进行计算机模拟/4	
1.4 仿真/7	
1.5 可视化/8	
第 2 章 固体力学和结构力学简介	10
2.1 引言/10	
2.2 三维固体问题的方程/11	
2.3 二维固体问题的方程/17	
2.4 桁架杆件的方程/19	
2.5 梁的方程/21	
2.6 板的方程/24	
2.7 附注/29	
第 3 章 有限元法基础	30
3.1 引言/30	
3.2 “强”形式和“弱”形式/30	
3.3 哈密尔顿原理/31	
3.4 有限元法的步骤/32	
3.5 静力分析/48	
3.6 自由振动分析(特征值分析)/48	
3.7 瞬态响应/50	
3.8 附注/54	
3.9 思考练习题/55	
第 4 章 桁架的有限元法	56
4.1 引言/56	
4.2 有限元方程/56	
4.3 算例/64	
4.4 高次的一维单元/74	
4.5 思考练习题/75	
第 5 章 梁的有限元法	76

5.1	引言/76	
5.2	有限元方程/76	
5.3	附注/80	
5.4	算例/80	
5.5	实例研究:微型谐振传感器的谐振频率/83	
5.6	思考练习题/92	
第6章	刚架的有限元法	93
6.1	引言/93	
6.2	平面刚架的有限元方程/93	
6.3	空间刚架的有限元方程/98	
6.4	附注/104	
6.5	实例研究:自行车刚架的有限元分析/105	
6.6	思考练习题/112	
第7章	二维固体问题的有限元法	113
7.1	引言/113	
7.2	线性三角形单元/114	
7.3	线性矩形单元/124	
7.4	线性四边形单元/130	
7.5	高次单元/134	
7.6	曲边单元/140	
7.7	关于高斯积分的讨论/141	
7.8	实例研究:侧驱动式的微型电动机/141	
7.9	思考练习题(Petyt,1990)/150	
第8章	板和壳的有限元法	152
8.1	引言/152	
8.2	板单元/152	
8.3	壳单元/158	
8.4	附注/162	
8.5	实例研究:微型电动机的自然频率/162	
8.6	实例研究:微型电动机的瞬态分析/169	
8.7	思考练习题/175	
第9章	三维固体力学问题的有限元法	176
9.1	引言/176	
9.2	四面体单元/176	
9.3	六面体单元/184	
9.4	高次单元/192	
9.5	曲面单元/197	

9.6	实例研究:量子点异质结构的应力和应变分析/198	
9.7	思考练习题/207	
第 10 章	特殊用途的单元	208
10.1	引言/208	
10.2	裂纹尖端单元/208	
10.3	无限域问题/211	
10.4	有限条元/215	
10.5	条元法(SEM)/217	
第 11 章	模拟技术	219
11.1	引言/219	
11.2	CPU 时间估计/219	
11.3	几何模拟/220	
11.4	划分网格/222	
11.5	网格协调性/224	
11.6	利用对称性/227	
11.7	偏移的模拟/234	
11.8	支承的模拟/238	
11.9	连接的模拟/240	
11.10	多点约束方程的其他应用/242	
11.11	多点约束方程的实现/245	
11.12	思考练习题/247	
第 12 章	热传导问题的有限元法	249
12.1	场问题/249	
12.2	有限元的加权残值法/253	
12.3	一维热传导问题/255	
12.4	二维热传导问题/266	
12.5	总结/277	
12.6	实例研究:受热路面的温度分布/277-	
12.7	思考练习题/283	
第 13 章	使用 ABAQUS	285
13.1	引言/285	
13.2	基本构造块:关键词和数据行/286	
13.3	组的使用/287	
13.4	ABAQUS 输入的语法规则/288	
13.5	在 ABAQUS 中定义有限元模型/289	
13.6	通用步骤/298	
参考文献	302

第 1 章 计算机模拟

1.1 引言

在各种工程技术如建筑、运输、交通等领域里,在先进工程系统的模拟和仿真中,有限元法(FEM)已经发展为当前主要的、不可缺少的一门技术。在建立这些先进工程系统时,工程师和设计师经过一系列复杂工序:建模、仿真、可视化、分析、设计、制造样机、测试,直到最后加工制造。为了确保最后产品的易加工性及较低的造价,在产品或系统制造之前需要做大量工作,其过程如图 1.1 的所示。从本质上讲,这个过程通常是一个重复的过程,即根据当前阶段所获得的结果重复进行某些步骤,目的是在建立系统时,用最

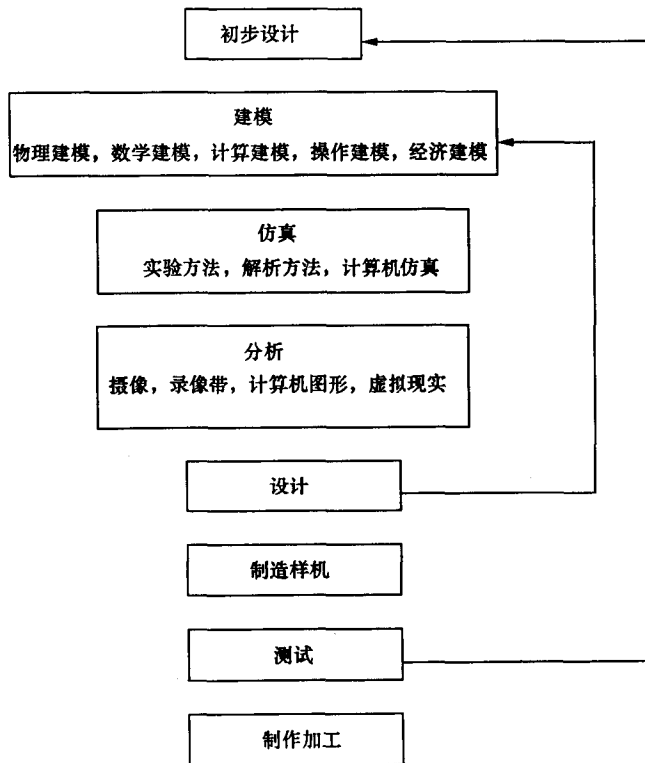


图 1.1 加工制造的先进工程系统的流程

低的成本获得最优的性能。因此,一种高速、有效的模拟和仿真技术越来越显示其重要的作用,从而导致有限元法的应用成倍增加。

本书主要讨论的是模拟和仿真问题,即图 1.1 中下划线部分。我们将论述这个问题的计算方面,也如图 1.1 中下划线部分,重点是物理、数学和计算机建模的技术,以及计算机仿真的许多方面的问题。充分理解这些技术对于快速和低成本地建立先进工程系统有着很重要的作用。

那么什么是有限元法呢?有限元法首先应用于应力分析问题,随后应用于热分析、流体流动分析、压电分析等许多其他问题。在这些分析中,分析人员的主要目的是决定某些场变量的分布情况,如应力分析中的位移,热分析中的温度和热流密度,电分析中的电荷等等。有限元法是一种数值解法,寻求对某些很难获得解析结果的问题的场变量分布的近似解。具体做法是将问题的整个区域划分成许多子区域,如图 1.2 和 1.3 所示,这些小单元通常具有简单的几何形状,然后将已知的物理规律应用于各个子区域。图 1.4 是一维空间有限元近似的示意图,未知场变量的连续函数在每个子域用分段线性函数来近似,这些子域称为单元,它们是由节点形成的。这样一来,未知量就转变成场变量在节点上的离散值。随后,按照适当的原理建立单元方程,最后将这些单元方程组装在一起,就可以导出整个系统的联立线性代数方程组,求解这个方程组就能很容易地得到所求解的场变量。

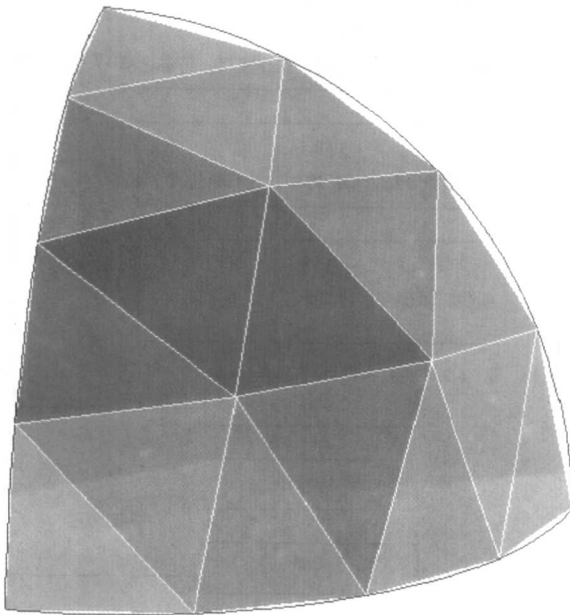


图 1.2 离散成壳单元的半球面

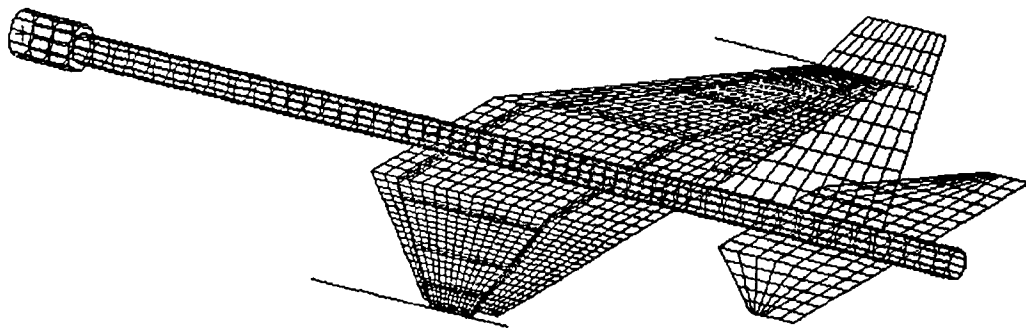


图 1.3 实验室中飞行器动力测试比例模型设计的网格(Quek,1997~1998)

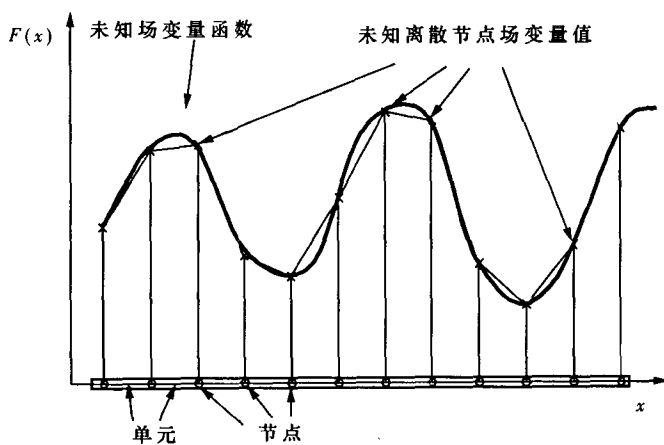


图 1.4 一维空间有限元近似,在每个子域(单元)内用分段线性函数近似连续函数

本书的目的是用一种简明易懂的方式介绍有限元方程中所采用的各种概念、方法和原理。应用著名的商用软件包 ABAQUS,求解和研究了一些算例,并阐述一些有效的建模技术和方法。

1.2 工程中的物理问题

在一个特定的工程系统中,存在许多物理问题。正如前面所提到的,尽管有限元法最初是应用于应力分析,但是很多其他物理问题也能采用有限元法求解。对工程系统中很多物理现象人们已经建立了相应的有限元法的数学模型。采用标准有限元法来求解的常见物理问题有:

- 固体和结构的力学问题
- 热传导
- 声学

- 流体力学
- 其他

首先本书着重讨论固体和结构的力学问题中有限元方程的形成,因为有限元法最初就是用于求解这些问题的,然后讨论了热传导问题有限元法。从概念上理解有限元法的研究方法是最重要的,因为有限元法应用于其他问题时利用了类似的概念。

下节介绍使用有限元法进行计算机模拟所包括的主要步骤。

1.3 使用有限元法进行计算机模拟

一个系统中某个现象的行为取决于该系统的几何形状或区域范围、材料或介质的性质、边界、初始条件和加载情况。对于一个工程系统,几何形状或区域通常是非常复杂的,而且边界和初始条件也很复杂。因此,一般来说用解析方法求解控制微分方程是很困难的,实际上许多问题都是使用数值的方法来求解,由于有限元法有很强的实用性和通用性,区域离散的有限元法在众多数值方法中是最受欢迎的。

使用有限元法进行计算机模拟通常由下列四个步骤所组成:

- 建模
- 划分网格
- 给定材料性质
- 给定边界条件、初始条件和载荷情况

1.3.1 几何形状的模拟

真实的结构、构件或区域一般都是很复杂的,所以必须抽象出易于处理的几何模型。几何形状的曲线(面)部分可以使用曲线或曲面模拟,然而,必须注意几何模型最终要由单元集合所表示,所以,如果使用线性单元,曲线或曲面是用分片的直线或平面来近似。图 1.2 显示了由三角形单元的直边来表示曲线边界,对曲线部分的表示的精度是由所使用的单元的数量来控制的,显然,单元的数量越多,用直边表示的曲边部分就越光滑和越精确。但是,单元越多所需要的计算时间就会越长。由于受到计算机硬件和软件的限制,控制单元数量是很有必要的。因此,为了决定所采用的最优单元数量,通常采用折中的方法,人们只在精度要求很高的区域,才对几何形状的细节进行精细模拟。当然,分析者在分析计算结果时必须考虑到这些几何近似所带来的影响。

根据所采用的软件,人们可以用很多种方法在计算机上生成适当的几何形状的有限元网格。点可以通过简单的键入坐标的方式生成,连接点或节点可以生成直线和曲线,连接、旋转、平移已经生成了的直线或曲线可以生成面,实体可以通过连接、旋转、平移已经存在的面来生成。点、线、面、体都可以通过平移、旋转或反射来生成新的点、线、面、体。

图形界面通常可以用来帮助生成和处理几何对象。现在有很多工程设计的计算机辅助设计(CAD)软件包可以生成工程设计系统所需的几何模型文件。通常,模拟软件包可以直接读入这些文件,这样在生成模型的几何形状时就可大大节省时间。然而,在很多情况下,从CAD文件中直接读入的复杂物体在划分网格或离散之前可能还需要进行一些修改和简化。值得提及的是,有些CAD软件包已将模拟软件合并在一起。这种CAD软件包对于快速制造新产品的样品有很重要的作用。

在模拟系统的几何形状时,知识、经验和工程判断力是非常重要的,在很多情况下,一些几何细节特征只是起着美观的作用,而对于工程系统的性能影响却是可以忽略不计的。那么我们就可以删除、忽略或简化这些细节特征,虽然在某些情况下这样做可能会导致不正确的结果,例如对有些问题,一些细微的几何改变可能得到完全不同的仿真结果。

在对物理问题进行数学建模时丰富的知识和经验是重要的。例如,一个具有三维几何尺寸的板,在力学中的板的理论中,板是表示为二维物体(其原因将在第2章中详细介绍)。因此,力学板的几何形状就只是一个二维平面,对这个平面划分网格可采用板单元,类似情况在壳体中也是存在的。物理上的梁是三维的,但在力学中梁的理论中,梁表示一维物体,因此力学梁的几何形状只是一个一维直线,对这根直线划分网格时,必须采用梁单元,桁架结构亦是如此。

1.3.2 网格划分

网格划分就是将几何形状离散成称之为单元或网格的小块。为什么要离散呢?我们可以用非常简明且合理的方式来解释其原因。因为工程问题的解是非常复杂的,并且通常在问题的整个域中函数的变化是不可预知的。如果将问题的区域用一组节点或网格划分成一些小的单元,则在每个单元内的解就可以用简单函数,如使用多项式来近似。这样,所有单元的解就构成了所求问题的整个区域的解。

我们应该进行哪些工作呢?首先,在需要离散的区域内离散控制微分方程时需要适当的理论依据,不同问题所依据的理论也有所不同,本书对于各种问题的理论将在后面章节中详细讨论。但在这之前,我们必须将所研究问题的区域生成网格。

网格生成在前处理中是一个非常重要的工作,这可能会消耗分析者很多的时间,一个有经验的分析者常常会更有效地处理复杂问题并生成更可靠的网格。网格生成的目的在于将问题区域划分成合适形状的单元,如三角形单元和四边形单元,在划分网格时必须形成单元连接信息,作为以后组建有限元方程时使用。如果能有完全自动的网格生成器是最理想的,但是当前在市场上还得不到这种网格生成器。在一些商业应用软件包里可以得到半自动前处理器,还有一些专门为划分网格而设计的软件包,它们能够生成网格文件,而其他模拟和仿真软件包能够读入这种网格文件。

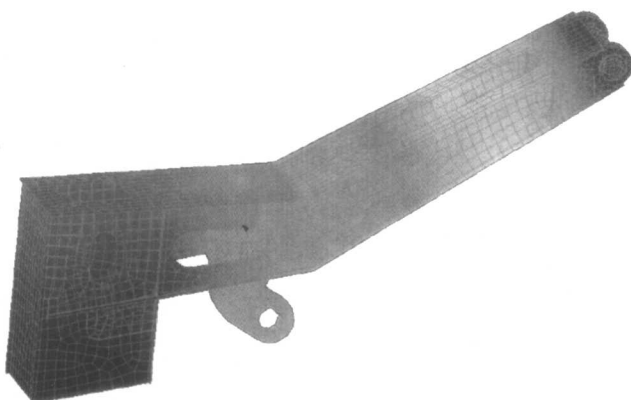


图 1.5 显示应力分布的吊杆的网格(由 EDS PLM Solutions 同意使用的图形)

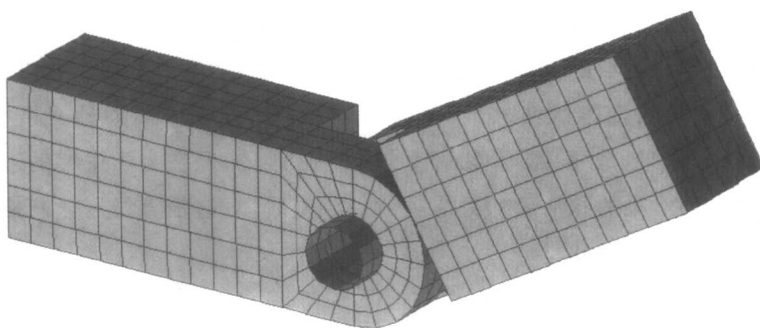


图 1.6 铰链的网格

用三角形单元划分网格是最灵活的建立网格的方法,它通常能够完全自动划分二维平面甚至三维空间,因此,这种划分方式在大多数前处理器中通常是可以得到的。三角形单元的另一个优点就是模拟复杂几何形状及复杂边界的灵活性,缺点就是三角形单元模拟结果的精度通常低于四边形单元,但四边形单元更难自动生成。图 1.3~1.7 给出了一些有限元网格的例子。

1.3.3 材料或介质性质

很多工程系统是由不止一种材料构成的,材料性质可以针对一组单元来定义,必要时,也可对单个单元来定义。模拟不同的现象,需要定义不同组的材料性质。例如,对于固体和结构中的应力分析,需要定义杨氏模量和剪切弹性模量,而对于热分析就需要定义热传导系数。材料性质常数通常可直接输入前处理器中,分析者需要做的是键入这些材料性质数据并指定数据适用于几何物体中的哪个区域或哪些单元。然而,获得这些材料性质并不是那么容易的事,尽管有些商业软件存在可供选择的材料数据库,但要精确确定系统所使用的材料性质通常需要进行试验,不过这不属于本书范围,在本书中我们

认为材料性质是已知的。

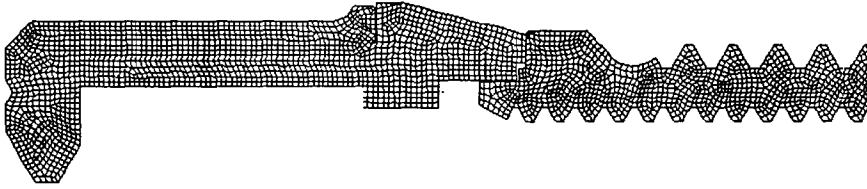


图 1.7 齿床嵌入体的轴对称有限元网格(CeraOne 连接系统, Nobel Biocare)

1.3.4 边界、初始条件和加载情况

边界、初始条件和加载情况在求解时起了决定性的作用。利用商用前处理器通常很容易输入这些条件,且常与图形界面相连接,用户既可以对几何元素(点、线或曲线、表面和实体),也可对单元或节点给定这些条件。同样,准确模拟这些条件在实际工程系统中需要丰富的经验、知识和正确的工程判断力。边界、初始条件和加载情况对于各种问题是不同的,并将在后续各章中详细介绍。

1.4 仿真

1.4.1 离散系统方程

根据生成的网格,采用已有的方法可以得到离散系统的联立方程组。建立联立方程的方法有许多类型:第一种基于能量原理,如哈密尔顿原理(第3章)、最小势能原理等等,常用的有限元法就是根据这些原理建立的;第二种方法是加权残值法,它也常常用于建立各种物理问题的有限元方程,并将在第12章的热传导问题中给予说明;第三种方法用泰勒(Taylor)级数导出传统的有限差分方程(FDM);第四种方法是以控制域内每个有限体积(单元)的守恒定律为基础,有限体积方法(FVM)就是用这种方法建立的;另一种方法是某些无网格方法(Liu,2002)中使用的积分表示方法。工程实践表明:对固体和结构前两种方法用的最多,而对流体流动的模拟常常使用其他两种方法;而且,对于流体流动和热传导问题,也利用有限元法研制商业软件,对固体和结构也能用有限差分法。在这里我们不作详细论述,顺便指出所有这三种方法的数学基础是加权残值法,在加权残值法中,适当选择权函数就可以导出有限元法、有限差分法和有限体积法的方程。

本书首先根据能量原理推导固体力学与结构的有限元方程。为了说明怎样用加权残值法推导有限元法的方程,我们使用了加权残值法来推导热传导问题的有限元方程,这为用有限元法处理其他物理问题提供了基本方法和关键步骤。

1.4.2 方程求解器

在生成计算模型之后,将所建立的线性方程组输入到求解器中,对这些联立方程组进行求解以得到在网格节点处的场变量,这种求解运算对计算机硬件要求最高。由于所要模拟的物理现象不同,不同的软件包所用的算法也不相同。求解系统方程选择算法有两个重要的考虑:一是存储量的需求,另一个就是CPU(中央处理器)运算时间。

求解联立方程组的方法有两个主要类型:直接法和迭代法。通常所用的直接法包括高斯消去法和LU分解法,这些方法对于求解较小的方程组很有效。直接法是针对整个组装系统方程进行求解,因而需要较大的存储空间,也可以用这样一种方法编制程序,即只对包含当前阶段所求解的方程的单元进行组装,这样可以大大地减少对存储空间的要求。

间接法包括高斯-雅可比(Guass - Jacobi)方法、高斯-赛代尔(Guass - Seidel)方法、SOR方法、广义共轭残数法、线松弛法等等。这些方法能有效的求解较大的系统方程。迭代法常采用这样一种方法编制程序,即避免了系统矩阵的全部组装以大大地节省存储量。这些方法的收敛性通常取决于所求解的问题,在采用迭代法时,预处理对于加速收敛过程起了很重要的作用。

对于非线性问题,还需要进行另一层迭代循环。在迭代时,必须将非线性方程适当的简化为线性方程。对于与时间有关的问题,还需要一层时间步进运算,即首先求初始时刻的解(或者由分析者给定),然后使用该结果向前推进求解下一个时间步的解,如此下去直到得到所要求的时间的解。有两种主要的时间步进格式:隐式方法和显式方法。通常来说,隐式方法比显式方法的数值稳定性要好,但计算时时间步进效率低,此外,采用显式算法能够更容易发展接触算法,关于这些情况的讨论将在第3章中给出。

1.5 可视化

求解系统方程后得到的结果通常是大量的数据,因此,这些计算结果必须直观地显示出来以便进行解释、分析和报告说明。可视化可以通过包含在软件包里的所谓的后处理器来完成,很多这类处理器允许用户用彩色的方式地在显示器上显示出三维物体。这些实体可以用边框线、单元组和节点组的形式显示在显示器上。用户可以对实体旋转、平移和缩放。场变量可以用等势线、条纹线、边框线和变形线在物体中画出。通常,用户还可以生成变量的等势面或变量矢量场,也可以使用增强显示效果的工具,如划阴影线、光照和褶皱。对模拟动力学方面的问题,还可以产生动画和电影。表格输出、文本文件和x-y绘图等。本节的所有例题都给出了各种后处理结果。

现在还有一些高级的视图工具,如虚拟实体,这些高级工具能提供更接近真实的三