

机械动力学分析

蒋伟 编著

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1,2,\dots,s)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q'_k \end{cases} \quad (k=1,2,\dots,s)$$

中国传媒大学出版社

机械动力学分析

蒋伟 编著

中国传媒大学 出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

机械动力学分析/蒋伟著.

—北京:中国传媒大学出版社,2005.6

ISBN 7-81085-502-6/K·313

I 机… II. 蒋… III. 机械学:动力学—高等学校—教材

IV. TH113

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 064515 号

机械动力学分析

作 者: 蒋 伟

责任编辑: 杨歆颖

装帧设计: 任名书装

出版发行: 中国传媒大学出版社 (原北京广播学院出版社)

北京市朝阳区定福庄东街1号 邮编: 100024

电话: 010-65450532 65450528 传真: 010-65779405

网 址: <http://www.cucp.com.cn>

经 销: 新华书店总店北京发行所

印 刷: 北京市后沙峪印刷厂

开 本: 880 × 1230 毫米 1/32

印 张: 11.375

版 次: 2005年6月第1版 2005年6月第1次印刷

ISBN 7-81085-502-6/K·313 定价: 23.00 元

版权所有 翻印必究 印装错误 负责调换

内 容 简 介

本书介绍了机械动力学的基本理论和方法,包括刚体动力学、分析力学和机械振动理论及其应用。本书各章既相互联系又具有相对独立性,在理论推导过程中,着重于物理概念的阐明,尽量避免采用过于抽象的数学表达。

本书可作为机械类工科专业的研究生教材,也可作为工程力学专业的本科生教材,还可供高等工科院校教师和从事机械设计与研究的工程技术人员参考。

序 言

动力学的任务是研究物体的机械运动与受力之间的关系，在理论力学课程中已建立了动力学的基本概念，如质点动力学、质系动力学等。由于动力学中研究的质点、刚体都必须考虑惯性，所以点成为有质量的质点，几何体成为有质量的刚体。随着科技的不断发展，机械和工程结构向高速化、精密化和自动化发展的趋势愈来愈突出，对其进行动力学分析也就显得愈来愈重要，这就要求相关工程技术人员掌握更广博的动力学知识、了解更丰富的动力学内容，如怎样对复杂的机械系统建立起动力学方程，怎样在数学模型的基础上分析机械系统的运动规律等等。

本书包括以下几部分内容：第1章介绍刚体动力学的基本理论和方法。第2~6章介绍分析力学的基本理论和方法。第7~9章介绍了振动理论及其应用。本书各章既相互联系也具有相对独立性，在理论推导方面尽量避免采用过于抽象的数学表达，在例题和习题的选用上力求联系工程实际，以培养解决实际问题的能力。

本书可作为机械类工科专业的研究生教材，或作为工程力学专业的本科生教材。也可作为从事机械设计与动力学研究有关的工程技术人员的参考书。本书初稿作为讲义已经在研究生教学中试用过3遍。高天方教授和殷祥超教授对书稿进行了详细的审阅并提出许多宝贵意见，作者谨致衷心感谢。限于水平，书中错误与不妥之处望读者不吝指正。

蒋 伟

2004年12月

于中国传媒大学工学院自动化系

目 录

第一部分 刚体动力学	(1)
第一章 刚体动力学	(3)
§ 1—1 刚体绕相交轴转动的合成.....	(3)
§ 1—2 刚体位置的确定、欧拉角、欧拉运动学方程.....	(5)
§ 1—3 刚体对任意轴的转动惯量、惯性椭球.....	(11)
§ 1—4 刚体定点转动的欧拉动力学方程.....	(15)
§ 1—5 对称刚体作规则进动的回转力矩.....	(19)
§ 1—6 刚体的一般运动.....	(24)
习题.....	(28)
第二部分 分析力学基础	(32)
第二章 分析力学的基本概念	(33)
§ 2—1 约束、约束方程和约束的分类.....	(33)
§ 2—2 广义坐标与自由度.....	(39)
§ 2—3 广义速度、广义加速度.....	(43)
§ 2—4 实位移、可能位移和虚位移.....	(44)
§ 2—5 虚位移原理.....	(49)
§ 2—6 虚位移原理的应用.....	(54)
§ 2—7 达朗伯原理和动力学普遍方程.....	(68)
习题.....	(73)
第三章 第二类拉格朗日方程	(81)
§ 3—1 第二类拉格朗日方程.....	(81)
§ 3—2 第二类拉格朗日方程的有关问题.....	(85)
§ 3—3 第二类拉格朗日方程的应用.....	(94)

§ 3—4 第二类拉格朗日方程的初级积分·····	(108)
§ 3—5 第二类拉格朗日方程在其他方面的应用·····	(118)
习题·····	(132)
第四章 哈密顿正则方程·····	(142)
§ 4—1 哈密顿正则方程·····	(142)
§ 4—2 能量积分·····	(148)
§ 4—3 循环坐标与循环积分·····	(150)
习题·····	(152)
第五章 哈密顿原理·····	(156)
§ 5—1 变分的基本概念·····	(157)
§ 5—2 哈密顿原理·····	(159)
习题·····	(168)
第六章 非完整系统动力学方程·····	(172)
§ 6—1 非完整系统约束方程的研究·····	(172)
§ 6—2 第一类拉格朗日方程·····	(173)
§ 6—3 非完整系统的拉格朗日方程·····	(176)
§ 6—4 阿沛尔方程·····	(182)
§ 6—5 凯恩方法·····	(189)
习题·····	(192)
第三部分 微振动理论·····	(195)
第七章 单自由度系统的振动·····	(198)
§ 7—1 单自由度系统的力学模型及运动微分方程·····	(198)
§ 7—2 无阻尼系统的自由振动·····	(200)
§ 7—3 固有频率的计算·····	(205)
§ 7—4 有阻尼系统的自由振动·····	(212)
§ 7—5 系统在简谐激励下的强迫振动·····	(218)
§ 7—6 系统在周期性激励下的强迫振动·····	(233)
§ 7—7 系统在任意激励下的强迫振动·····	(240)
§ 7—8 等效粘滞阻尼·····	(258)
习题·····	(262)

第八章 两自由度系统的振动	(269)
§ 8—1 两自由度系统的自由振动.....	(269)
§ 8—2 两自由度系统在简谐激励下的强迫振动 动力 吸振器.....	(279)
§ 8—3 阻尼对强迫振动的影响 阻尼减振器.....	(285)
§ 8—4 坐标耦合与主坐标.....	(289)
习题.....	(293)
第九章 多自由度系统的振动	(297)
§ 9—1 多自由度系统的运动微分方程.....	(297)
§ 9—2 固有频率与主振型.....	(311)
§ 9—3 主振型的正交性 展开定理.....	(322)
§ 9—4 坐标变换及系统对初始激励的响应.....	(329)
§ 9—5 多自由度系统的强迫振动.....	(336)
§ 9—6 有阻尼系统的强迫振动.....	(341)
习题.....	(345)
主要参考文献	(351)

第一部分 刚体动力学

一般所说的刚体动力学，其主要内容是研究刚体绕定点的运动。因为刚体的一般运动可以分解为随质心的平动和相对质心的转动，而随质心的平动可以归结为质点动力学问题。刚体绕定点运动是从18世纪开始研究的。当时，由于航海事业的发展，提出了关于船舶摇摆运动规律的问题，欧拉（1707~1783年）最初的研究就属于这类问题。在工程中把具有一个固定点，并绕自身的对称轴高速转动的刚体称为陀螺，如图1-1所示。陀螺仪如图1-2所示。

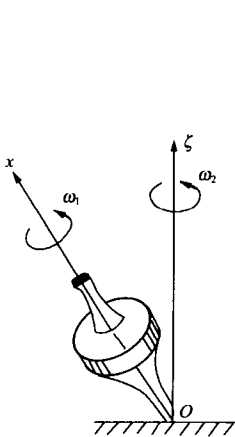
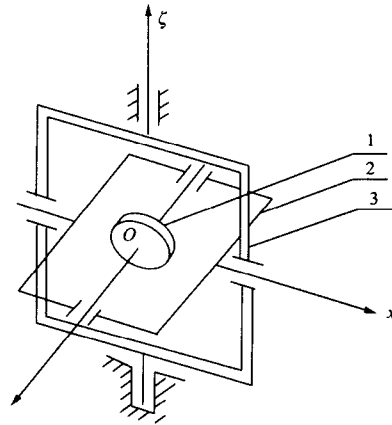


图 1-1



1—转子；2—内环；3—外环

图 1-2

它在工程上有着重要的应用，如在现代导航技术中作为指示仪或稳定器的主要元件。它还在地下钻探、掘进、测量等领域得

到应用。另外在机械中高速自转的部件，如轮船上的汽轮机转子、飞机的螺旋桨、发动机的涡轮转子等，当它们的转轴在空间改变方向时，会产生不可忽视的陀螺力矩和陀螺效应。因此，研究陀螺的运动规律和特性，在工程实际中具有重要的意义。由于对刚体绕定点运动规律的不断研究，从而促进了陀螺仪器的发展，同时也使刚体绕定点运动的研究工作在陀螺仪器的发展过程中获得新的进展。本书只介绍一些基础知识。

第一章 刚体动力学

§ 1—1 刚体绕相交轴转动的合成

设动参考系在动轴 OO_2 上，定系在地面上，刚体绕动系的运动是相对运动，以 ω_r 表示相对角速度矢，动系统定轴转动是牵连运动，以 ω_e 表示牵连角速度矢，则刚体的绝对运动是绕相交轴的 2 个转动的合成。如图 1—3。

以角速度矢 ω_e 和 ω_r 为邻边，作平行四边形 $OACB$ 。显然， C 点的牵连速度和相对速度分别等于 $\omega_e \cdot CD$ 和 $\omega_r \cdot CE$ ，两者的大小都等于平行四边形 $OACB$ 的面积，而且方向相反，故 C 点的速度为零。又因 O 点的速度为零，故

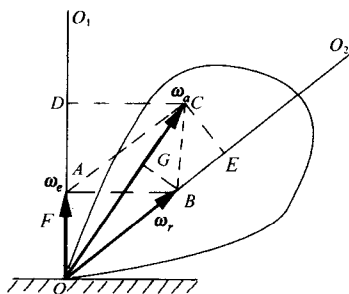


图 1—3

刚体 OC 线上任一点的速度均为零， OC 称为瞬时轴。

刚体绕瞬时轴转动的角速度称为绝对角速度 ω_a 。

由于

$$v_B = \omega_e \cdot BF = \square OACB$$

而且

$$v_B = \omega_a \cdot BG \quad \text{则} \quad \omega_a \cdot BG = \square OACB$$

于是

$$\omega_a = \frac{\square OACB}{BG} = OC$$

显然绝对角速度 ω_a 之值，等于以角速度矢 ω_e 和 ω_r 为邻边而作的平行四边形的对角线之长。因此可用 ω_a 表示瞬时轴的位置，而绝

对角速度的大小和转向为

$$\omega_a = \omega_o + \omega_r \quad (1-1)$$

即：刚体同时绕 2 个相交轴的转动可视为绕通过相交轴交点 O 的瞬时轴的转动，瞬时轴的位置与绕瞬时轴转动的角速度 ω_a 都由 2 个转动角速度矢的合矢量来决定。

上述结论可推广到刚体同时绕多个相交轴转动的合成。

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \sum \omega_i \quad (1-2)$$

即：刚体绕 n 个相交轴转动的合成运动，可视为绕通过定点 O 的某一瞬时轴的转动，绕瞬时轴转动的角速度等于各分转动角速度的矢量和，称为角速度合成定理。

例 1—1 辘轮 A 沿固定水平底盘滚动而不滑动，轮轴 OA 以匀角速度 ω_o 绕铅垂轴 ζ 转动如图 1—4，如果辘轮的半径为 r ， OA 长 l ，试求辘轮的绝对角速度 ω_a ，对于轮轴 OA 的相对角速度 ω_r 以及辘轮最高点 M 的绝对速度。

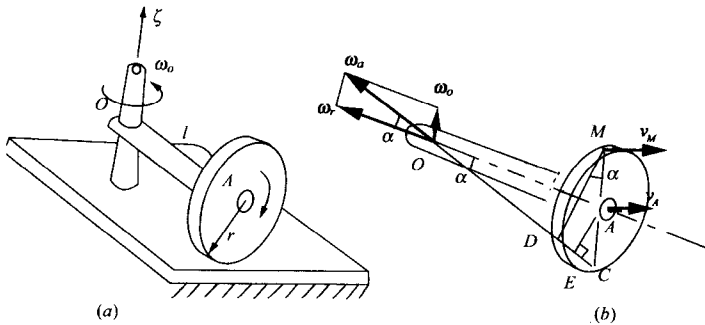


图 1—4

解 辘轮既绕其对称轴 OA 作相对运动，又以角速度 ω_o 绕铅垂轴 ζ 作牵连运动，因此，辘轮的绝对运动可视为绕这两轴的交点 O 作定点转动。因辘轮垂直于自转轴的对称面沿固定水平底盘作纯滚动，故轮缘与固定水平底盘的接触点 C 的速度为零。因此连

线 OC 就是辘轮的瞬时轴。

由角速度合成定理式 (1-1) 可得轮的绝对角速度

$$\omega_a = \omega_p + \omega_r = \omega_o + \omega_r$$

绝对角速度的大小为

$$\omega_a = \frac{\omega_o}{\sin\alpha} = \omega_o \sqrt{\frac{r^2 + l^2}{r^2}} = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

方向如图 1-4b 所示。辘轮的相对角速度的大小为

$$\omega_r = \omega_o \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{r} \omega_o$$

方向如图 1-4b 所示。

辘轮的运动视为以角速度 ω_a 绕瞬时轴 OC 的转动, 则点 M 的速度大小为

$$\begin{aligned} v_M &= MD \cdot \omega_a = 2r \cos\alpha \frac{\omega_o}{\sin\alpha} \\ &= 2r \omega_o \frac{l}{r} = 2l \omega_o \end{aligned}$$

此速度垂直于平面 OCM , 其指向如图 1-4b 所示。

通过分析轮心 A 的速度也可以求出绝对角速度 ω_a , 因为 A 点绕 O 点作圆周运动, 故 A 点速度的大小为 $v_A = OA \cdot \omega_o = l \omega_o$

另一方面辘轮以绝对角速度 ω_a 绕瞬时轴 OC 转动, 故 A 点的速度又可表示为 $v_A = AE \omega_a = l \omega_a \sin\alpha$

比较以上 2 式可得轮的绝对角速度的大小为

$$\omega_a = \frac{\omega_o}{\sin\alpha} = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \text{结果与前面所求相同。}$$

§ 1-2 刚体位置的确定、欧拉角、欧拉运动学方程

一、方向余弦

为了进一步研究刚体绕定点转动的规律, 先研究绕定点转动

刚体在空间位置的确定方法。选 2 套坐标系如图 1—5，坐标原点都为固定点 O ，其中

- $\{O\xi\eta\zeta$ ——固连于惯性空间的固定坐标系；
- $\{Oxyz$ ——固连于刚体本身或陀螺转子的动坐标系。

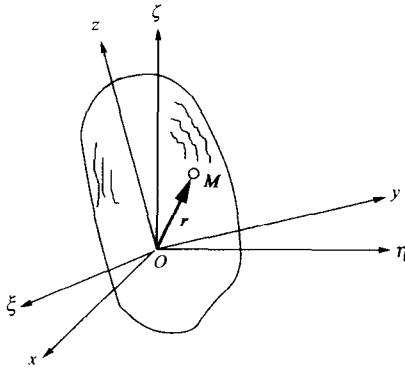


图 1—5

设在刚体内任取一点 M ，它的矢径用 r 表示。若沿固定坐标轴 $\xi\eta\zeta$ 的单位矢量为 $\xi^\circ, \eta^\circ, \zeta^\circ$ ，沿动坐标轴 x, y, z 的单位矢量为 i, j, k ，而 2 套坐标系各轴间方向角为 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1, 2, 3$)。那么，矢径 r 在坐标系中的解析形式分别表示为

$$\begin{cases} r = \xi\xi^\circ + \eta\eta^\circ + \zeta\zeta^\circ \\ r = xi + yj + zk \end{cases} \quad (1-3)$$

其中 ξ, η, ζ 是矢径 r 在 $O\xi\eta\zeta$ 各轴上的投影， x, y, z 是 r 在 $Oxyz$ 各轴上的投影。

设 $Oxyz$ 与 $O\xi\eta\zeta$ 各轴间方向角的余弦值如下表所示。

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

称表中的 9 个余弦值为方向余弦, 分别等于单位矢量之间的标积, 即有

$$\begin{cases} \mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\xi}^\circ = \cos\alpha_1 = a_{11}, & \mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\eta}^\circ = \cos\beta_1 = a_{12} \\ \dots \\ \dots, & \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}^\circ = \cos\gamma_3 = a_{33} \end{cases} \quad (1-4)$$

由式 (1-3) 得

$$xi + yj + zk = \xi\xi^\circ + \eta\eta^\circ + \zeta\zeta^\circ \quad (1-5)$$

将式 (1-5) 两边各依次标乘以 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , 并利用式 (1-4) 可得

$$\begin{cases} x = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ y = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ z = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{cases} \quad (1-6)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (1-6)'$$

上式就是矢径 \mathbf{r} 端点 M 的坐标从轴系 $O\xi\eta\zeta$ 到 $Oxyz$ 的变换公式, 于是, 对应的变换矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

由式 (1-7) 可见, 变换矩阵的元素由 2 套坐标系间的 9 个方向余弦所组成, 刚体的位置就可由这 9 个参数充分确定。但这 9 个参数中有 6 个存在相互关系, 即独立参数只有 3 个, 这说明绕定点转动的刚体具有 3 个自由度, 确定其位置只需 3 个独立参数。因此用这种方法确定刚体的位置是很繁琐的。下面将介绍另一种方法, 即用欧拉角来确定刚体的位置。

二、欧拉角、欧位运动学方程

用上述方法选取 2 套坐标系如图 1-6 所示, 即固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 和动坐标系 $Oxyz$ 。下面介绍欧拉所提供的确定位置的

方法。

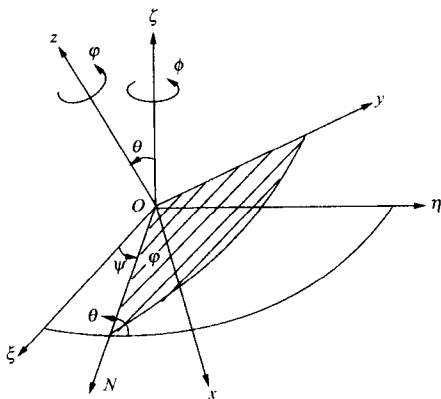


图 1--6

动坐标平面 Oxy 与定坐标平面 $O\xi\eta$ 的交线以 ON 表示, 该直线称为节线, 图中以 ψ 表示节线 ON 与定坐标轴 $O\xi$ 之间所夹的角, ψ 角是在定坐标平面 $O\xi\eta$ 内; 以 θ 表示动坐标轴 Oz 与定坐标轴 $O\xi$ 所夹的角, θ 角是在与节线 ON 垂直的 OzN 平面内; 以 ϕ 表示动坐标轴 Ox 与节线 ON 所夹的角, ϕ 角是在动坐标平面 Oxy 内。以上 3 个角 ψ , θ , ϕ 分别以 $O\xi$, ON , Oz 为轴按照右手螺旋规则定正负值, 这 3 个角称为欧拉角, 在天文学上 ψ 称进动角, θ 为章动角, ϕ 为自转角。

用上述 3 个角可以完全确定刚体在空间的位置, 事实上刚体每占有一个位置都可以看做借 3 次转动而得到, 如图 1—6 的动坐标系的位置, 可以由 $O\xi\eta\zeta$ 与 $Oxyz$ 重合的位置, 先使动坐标系 $Oxyz$ 绕定轴 $O\xi$ 转过一个 ψ 角, 然后使动坐标系绕节线 ON 转过一个 θ 角, 最后使刚体绕 Oz 转过一个 ϕ 角, 刚体即达到指定位置。

根据以上分析, $O\xi\eta\zeta$ 坐标变换到 $Oxyz$ 坐标可以分 3 次进行。3 次分转动的分变换矩阵为

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1-8)$$

刚体总的转动为上面 3 个顺次转动的合成，其变换矩阵 A 即为 3 个转动矩阵的乘积。

$$A = A(\varphi) \cdot A(\theta) \cdot A(\psi)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & \\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \\ \sin\psi\sin\theta & & -\cos\psi\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{array} \right\} \quad (1-9)$$

当刚体绕 O 点转动时，欧拉角 ψ , θ , φ 一般将随时间而变化，所以欧拉角是时间 t 的单值连续函数，即

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \quad (1-10)$$

这组方程称为刚体的定点运动方程，它完全确定了绕定点转动的刚体每一瞬时在空间的位置。

当刚体运动时，3 个欧拉角都随时间而变，其对应的转动角速度数值分别为

$$\omega_\psi = \frac{d\psi}{dt}, \quad \omega_\theta = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1-11)$$

上式中 ω_ψ , ω_θ , ω_φ 分别称为进动角速度、章动角速度和自转角速度。这 3 个转动是同时进行的，其合成运动是绕瞬时轴的转动。将 ω_ψ , ω_θ , ω_φ 按矢量相加便可求出刚体绕瞬时轴的角速度。根据角