

考研图书全国知名品牌
全国十大考研辅导班指定辅导用书

JINBANG KAOYAN
金榜 考研成功 系列

2006 年全国硕士研究生入学考试用书

线性代数 辅导讲义

XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

主编：李永乐

第二版

考研名师倾情巨献
决胜考场的宝典



 **sina 新浪教育**
edu.sina.com.cn

新华出版社

门户网站独家网络支持

考研图书全国知名品牌
全国十大考研辅导班指定辅导用书

0151.2
173

JINBANG KAOYAN
金榜 考研成功 系列

2006年全国硕士研究生入学考试用书

线性代数 辅导讲义

XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

主编：李永乐

第二版

考研名师倾情巨献
决胜考场的宝典

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义/李永乐主编. -北京:新华出版社,2004.5

2006年硕士研究生入学考试用书

ISBN 7-5011-6583-1

I. 线... II. 李... III. 线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第016573号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

2006年全国硕士研究生入学考试用书

线性代数辅导讲义

主编:李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路8号 邮编:100043)

新华出版社网址:<http://www.xinhupub.com>

中国新闻书店:(010)63072012

新华书店总经销

北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

787毫米×1092毫米 16K 11印张 255千字

2005年3月第2版 2005年3月第1次印刷

ISBN 7-5011-6583-1/O·10 定价:14.00元

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570299

第二版前言

本次修订篇幅有所增加,除了补充、更换、编写了一些新题之外,对于同学不太好理解,或不大注意的地方,在评注中增加了较多的题外话,同时对全书的结构有所调整。

希望本书的修订再版,能对同学们的复习备考有更大帮助。

编者
2005年2月

前 言

本书是为准备考研的同学复习线性代数而编写的一本辅导讲义,由编者近年来辅导班笔记改写而成。全书共分六章及一个附录,每章均由知识结构网络图,基本内容、重要结论归纳,典型例题分析选讲,练习精选题四部分组成。章节安排、内容取舍与教材的顺序略有不同,主要是为了便于总结、复习以及知识间的相互渗透与结合。力求在较少的时间内,用不多的篇幅,帮助同学搞清基本概念,掌握基本理论、公式,了解重点、难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。通过典型例题的分析以及较为系统的归类、比较、总结、讲评,帮助考生学会分析解答线性代数问题,梳理解题的思路,熟悉常用的方法和技巧;练习题能使我们更好的理解、掌握基本内容,基本解题方法,达到巩固、悟新与提高的目的。典型性、综合性、启发性是选取编制例题、习题的原则;题后的点评与评注,其目的在于指出重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题;一些概念性、理论性选择题的设置,常常是为了帮助理解和掌握基本概念、基本定理与公式,纠正容易发生的错误。当前线性代数每年有 5 个考题,分值在 30 至 38 分,若平均对待应当在 30 分钟至 45 分钟解答完毕,因而我们设计了一个附录 45 分钟的水平测试,希望你在复习完本书,用三套自测题检查一下你的提高与不足。

本书也可作为大一新生学习线性代数时的学习参考书。

由于编者水平有限,疏漏错误之处在所难免,欢迎批评指正。

编 者

2004 年 3 月

目 录

第一章 行列式

一、知识结构网络图	(1)
二、基本内容与重要结论	(3)
三、典型例题分析选讲	(11)
代数余子式	(11)
数字型行列式	(12)
含参数行列式	(17)
抽象行列式	(18)
关于 $ A =0$	(20)
四、练习题精选	(21)
答案与提示	(23)

第二章 矩阵

一、知识结构网络图	(25)
二、基本内容与重要结论	(26)
三、典型例题分析选讲	(34)
矩阵运算	(34)
伴随矩阵	(39)
可逆矩阵	(41)
初等变换	(44)
矩阵方程	(47)
四、练习题精选	(50)
答案与提示	(51)

第三章 n 维向量

一、知识结构网络图	(52)
二、基本内容与重要结论	(53)
三、典型例题分析选讲	(58)
正交矩阵	(58)
线性相关	(60)
线性表出	(66)
向量组的秩	(71)
矩阵的秩	(72)
Schmidt 正交化	(75)
向量空间	(76)
四、练习题精选	(78)
答案与提示	(79)

第四章 线性方程组

一、知识结构网络图	(82)
二、基本内容与重要结论	(83)
三、典型例题分析选讲	(86)
基础解系	(86)
有解判定、解的结构、性质	(91)
解方程组	(97)
公共解	(102)
四、练习题精选	(103)
答案与提示	(104)

第五章 特征值与特征向量

一、知识结构网络图	(107)
二、基本内容与重要结论	(108)

三、典型例题分析选讲	(110)
特征值、特征向量	(110)
相似、相似对角化	(118)
求相似对角化时的可逆矩阵 P	(121)
用相似求 A^n	(124)
求参数的问题	(127)
反求矩阵 A	(129)
实对称矩阵	(131)
四、练习题精选	(136)
答案与提示	(137)

第六章 二次型

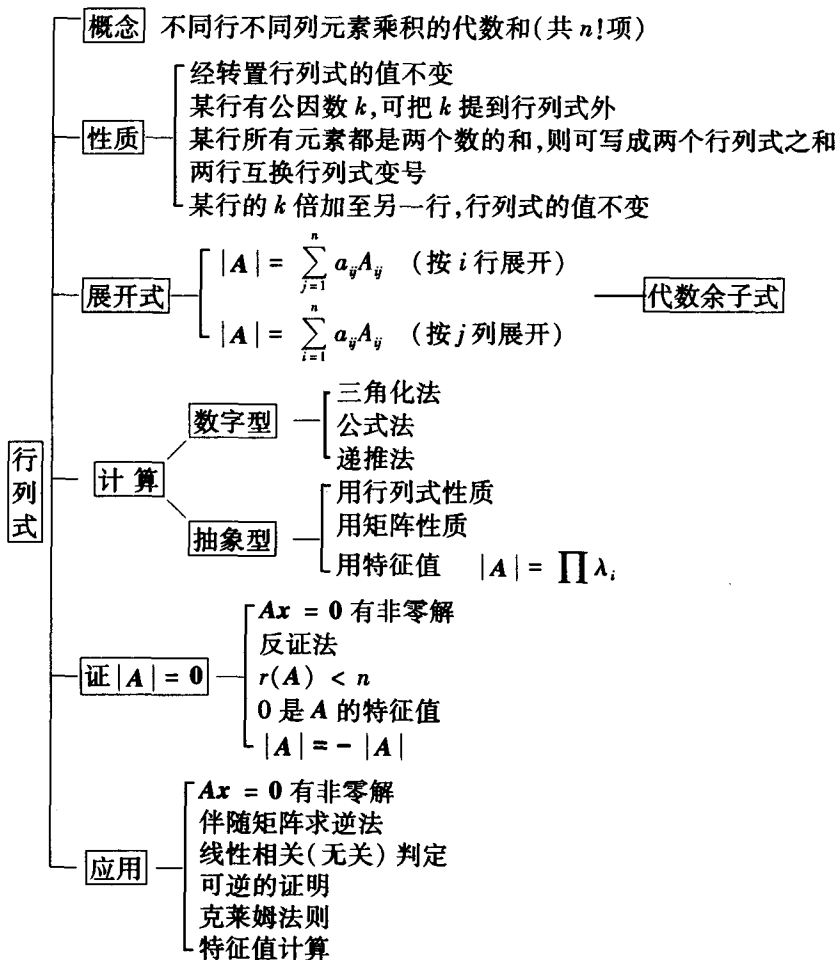
一、知识结构网络图	(140)
二、基本内容与重要结论	(141)
三、典型例题分析选讲	(145)
二次型的标准形	(145)
二次型的正定性	(150)
矩阵的等价、相似、合同	(153)
四、练习题精选	(155)
答案与提示	(155)

附录

45 分钟水平测试(一)	(158)
45 分钟水平测试(二)	(158)
45 分钟水平测试(三)	(159)
参考答案与提示	(160)

第一章 行列式

一、知识结构网络图



学习札记:

点评 (1) 二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

这样的计算方法对4阶及4阶以上行列式不适用.

(2) 对行列式的性质3要理解正确, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

对于 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 有 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, 由于行列式 $|A + B|$ 中每一行都是两个数的和, 所以若用性质3把行列式 $|A + B|$ 拆开, 则 $|A + B|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此 $|A + B| \neq |A| + |B|$.

特别地,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} \\ & = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda \\ & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(3) 要会用行列式性质及展开定理计算数字型行列式

(4) 要熟悉抽象型行列式的计算.

二、基本内容与重要结论

基本概念

定义 1.1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

定义 1.2 一个排列中, 如果一个大的数排在小的数之前, 就称这两个数构成一个逆序. 一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数, 则称这个排列为偶排列, 否则称为奇排列.

【例 1.1】 在 5 级排列 25134 中, 有逆序 21, 51, 53, 54, 因此排列 25134 的逆序数为 4, 即 $\tau(25134) = 4$. 所以排列 25134 是偶排列.

定义 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项的前面带正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项的前面带负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1.1)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1) 称为 n 阶行列式的完全展开式.

【例 1.2】 已知 $a_{14} a_{2j} a_{31} a_{42}$ 是四阶行列式中的一项, 那么根据行列式的定义, 它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j = 3$.

由于 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$ 列的逆序数

$$\tau(4312) = 3 + 2 + 0 = 5$$

是奇数, 所以该项所带符号为负号.

定义 1.4 在 n 阶行列式

学习札记:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列, 由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 而称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (1.2)$$

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.3)$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.2 n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \quad (1.4)$$

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.3 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} , 当 $i \neq k$ ($i, k = 1, 2, \cdots, n$) 时, 有

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0; \quad (1.5)$$



当 $j \neq k$ ($j, k = 1, 2, \dots, n$) 时, 有

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{kn} = 0; \quad (1.6)$$

点评 根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5), 对于

$$\text{矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ 和行列式 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ 我们有}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即 $AA^* = |A|E$, 类似地由(1.4)与(1.6)有 $A^*A = |A|E$

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

这是一个重要的公式, 要会灵活运用, 关于伴随矩阵 A^* 要防止两种错误:

- (1) 行列式 $|A|$ 中第 i 行元素的代数余子式在伴随矩阵 A^* 中是第 i 列
- (2) 求代数余子式 A_{ij} 时, 不要忘记所带正负号 $(-1)^{i+j}$

【例 1.3】 设

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (8.1)$$

则 (1) $A_{12} + 2A_{22} + 3A_{32} + 4A_{42} =$ _____

(2) $A_{31} + 2A_{32} + A_{34} =$ _____

【分析】 (1) 由于 $a_{11} = 1, a_{21} = 2, a_{31} = 3, a_{41} = 4$, 据(1.6)立即有

$$A_{12} + 2A_{22} + 3A_{32} + 4A_{42} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} + a_{41}A_{42} = 0$$

(2) 因为 A_{ij} 与元素 a_{ij} 的大小无关, 可构造一个行列式(用 A_{3j} 的系数置换 $|A|$ 第 3 行的元素), 即

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$



学习札记:

则行列式 $|A|$ 与 $|B|$ 第三行元素的代数余子式是一样的,一方面,对 $|B|$ 按第三行展开(用(1.3))有

$$|B| = A_{31} + 2A_{32} + A_{34}$$

另一方面,对行列式 $|B|$ 恒等变形,有

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 96 \end{aligned}$$

所以, $A_{31} + 2A_{32} + A_{34} = 96$.

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad (1.7)$$

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \quad (1.8)$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{nm} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$



学习札记:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (1.11)$$

(5) 特征多项式

设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵, 则 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |A| \quad (1.12)$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

评注 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维非零列向量, 若

$$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$$

则称 λ 是矩阵 A 的特征值, α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

$$\text{由 } A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \lambda\alpha - A\alpha = 0 \Rightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0$$

知 α 是齐次方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解, 故系数行列式 $|\lambda E - A| = 0$

关于 (1.12) 的推导请参看 P1 之点评 (2).

特别地, 若秩 $r(A) = 1$, 由 (1.12) 知特征多项式

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (\sum a_{ii})\lambda^2 = (\lambda - \sum a_{ii})\lambda^2$$

那么, 矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

【例 1.4】 (92, 3) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, 则 $|C| =$ _____

【分析】 由拉普拉斯展开式 (1.10), 有

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| = (-1)^{mn} ab$$



学习札记:

所以应填 $(-1)^{mn}ab$

【例 1.5】 (96,1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

[]

【分析】 本题解法较多,较简单的方法是用两列对换,两行对换,把零元素调至行列式的一角,就可用拉普拉斯展开式,例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

而知应选(D).

【例 1.6】 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】 把第2行加至第1行,提取公因式,即为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

【例 1.7】 设 A 是 3 阶矩阵且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是矩阵 A 的 3 个特征值,那么由 (1.12) 有

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + S_2\lambda - |A| \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

比较同次方的系数,有

$$|A| = \prod_{i=1}^3 \lambda_i \text{ 与 } \sum_{i=1}^3 a_{ii} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$$



方阵的行列式

$$(1) \text{ 若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, 则 } |kA| = k^n |A|; \quad (1.12)$$

$$(2) \text{ 若 } A, B \text{ 都是 } n \text{ 阶矩阵, 则 } |AB| = |A| |B|; \quad (1.13)$$

$$(3) \text{ 若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, 则 } |A^*| = |A|^{n-1}; \quad (1.14)$$

$$(4) \text{ 若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶可逆矩阵, 则 } |A^{-1}| = |A|^{-1}; \quad (1.15)$$

$$(5) \text{ 若 } A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵, } \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 则 } |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \quad (1.16)$$

$$(6) \text{ 若 } A \sim B, \text{ 则 } |A| = |B|. \quad (1.17)$$

克莱姆法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} \quad (1.18)$$

其中

$$D_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0, 则方程组只有零解.

推论 2 若齐次线性方程组