

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数学 建模

主 编 刘振航

 中国人民大学出版社

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数 学 建 模

主 编 刘振航

副主编 梁邦助

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模/刘振航主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2004

(新世纪大学数学立体化系列教材)

ISBN 7-300-05527-3/I · 50

I. 数…

II. 刘…

III. 数学模型-高等学校-教材

IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 043509 号

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

数学建模

主编 刘振航 副主编 梁邦助

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511239 (出版部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京密兴印刷厂		
开 本	787×965mm 1/16	版 次	2004 年 5 月第 1 版
印 张	12.25	印 次	2004 年 5 月第 1 次印刷
字 数	223 000	定 价	25.00 元 (含光盘)

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会

主 任 于义良

副主任 刘振航 徐金岭 安建业 鄢 茵

委 员 (按姓氏笔画排序)

王玉津	王全文	王延臣	王莉琴	龙建新
沙荣方	吴振奎	宋香暖	张凤宽	张建新
张银生	李乃华	李 天	李秉林	李美凤
杨海宣	杨富贵	罗智明	罗蕴玲	郑昌明
段俊生	赵芬霞	唐 洋	梁邦助	程 伟
滕树军	魏家林			

总 序

随着科学技术的迅猛发展,数量分析已渗透到各个领域,数学的重要性已被整个社会所公认;由于计算机技术的广泛普及与提高,许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀,数学的应用越来越深入;随着人类素质的不断提高,数学素质教育已成为全体公民的必修课,数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要,信息技术与学科课程整合已是教育教学改革的“重中之重”,运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。经过多年的教学研究和实践,我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师,编写了这套“新世纪大学数学立体化系列教材”,奉献给大家。

这套系列教材是“21 世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》”成果的延伸,包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》、《运筹学》五本教材和《微积分名师导学》、《线性代数名师导学》、《概率论与数理统计名师导学》三本教学指导书。这套教材力求体现如下特点:

第一,以实用为原则,“教、学、做”融为一体,内容体系整体优化,使读者实现由知识向能力的转化。

第二,以实际为背景,概念阐述简明、通俗化,举例贴近

生活,运用多媒体技术使内容直观化、图形化,使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感,激活求知欲,增强学好数学、做好数学的信心。

第三,以计算机为工具,传统内容与信息技术应用融为一体,注重基本知识、基本思想、基本能力的培养,对繁、难、抽象的内容,充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现,比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等。

第四,每册教材均配有多媒体助学助教光盘,包括课程要求、电子教案、模拟演示、练习详解、单元测试、实例选编、试题分析、名人简介等众多模块,信息量大,使用方便,便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识,并有助于及时检测和提高。

总之,这套系列教材配有光盘,方便教学,信息量大;融入软件,突出技能,实用性强。内容可视化,你不会再为抽象而烦恼;计算软件化,你不会再为繁难而困扰;方法现实化,你不会再因无用而厌学。

2003 年冬季,我有幸到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察,亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践,它们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用,“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”做得非常出色。让我们可喜的是即将出版的这套系列教材恰好在这方面做了有益的尝试。

我们期盼这套系列教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会主任、总主编 于义良

2004 年 3 月

前言

进入新世纪,人类社会逐步迈向信息化社会,这个社会所呈现出的两大特点是:计算机技术的迅速发展与广泛应用,以及由之引发的数学的应用向各个领域更为广泛和深入的渗透。这两个特点无疑对信息化社会的数学教育提出了新的要求。由于数学应用的普遍性,数学教育质量的高低就关系到国民素质的高低;由于未来高新技术从某种意义上可归结为数学技术,所以培养应用数学的意识和能力已经是数学教学的一个重要方面。

《数学建模》(Mathematical Modeling)是把数学与客观实际问题联系起来的纽带,可以说有了数学并要用数学去解决实际问题,就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画实际问题,而这种刻画的数学表达就是一个数学模型,其过程就是数学建模的过程。

经过多年的教学实践和认真学习讨论,并调查了解国内外数学教育的改革动态,我们认为《数学建模》课程从内容到教学方法,都应突出这门课的两大特点,即理论联系实际和计算机技术应用,以培养学生用数学语言描述实际现象,用数学知识和计算机技术分析处理实际问题的能力为基本思路,真正使学生的数学实践能力(数学知识、数学建模、数值计算、数据处理)得到培养和提高。

现在奉献给大家的这本《数学建模》教材,力求将基本知识、方法与计算机应用融为一体,使学生感受到所学知识、方法的可用性;通过完成“现实题材—数学问题—数学建模—数学知识与方法—成果释译”的学习过程,帮助学生实现由知识向能力的转化。教学内容贴近实际,让学生边学边提出解决问题的思路和设想,引导学生运用所学知识解决实际问题,培养学生的社会责任感。

参加本书编著的有:刘振航、于义良、梁邦助、安建业、张凤宽。

在本书编写过程中,得到了天津市教委高教处、天津商学院教务处的指导,特别是得到天津商学院教材中心、中国人民大学出版社许多同志的大力支持,天津职业技术学院何文章教授、天津科技大学张大克教授提出了非常好的建议,为体现内容的典型性,书中部分例题引自他人著作,在此一并表示衷心的感谢。由于数学建模是一个很新的课程,在内容选择、教材编写、教学方式等方面国内外都没有较为定型的模式。加之我们水平有限,书中若有不尽如意的地方,敬请广大读者雅正。

编著者

2004年3月18日

目 录

第 1 章 数学模型概论	1
第 1.1 节 数学与数学模型	1
第 1.2 节 数学模型的分类	4
1. 观察模型和决策模型	4
2. 确定型模型和随机型模型	4
3. 连续模型和离散模型	4
4. 解析模型和仿真模型	5
第 1.3 节 建立数学模型的一般步骤	5
1. 建模准备	5
2. 模型假设	5
3. 模型建立	6
4. 模型求解	6
5. 模型检验	6
6. 模型应用	6
第 2 章 微分方程模型	8
第 2.1 节 引例	8
第 2.2 节 微分方程的定解问题及建模准则	11
1. 微分方程的定解问题	11
2. 微分方程的平衡解与稳定性	12
3. 微分方程的建模步骤	13

第 2.3 节	微分方程模型	13
第 3 章	概率方法建模	37
第 3.1 节	报纸零售问题	37
第 3.2 节	随机存贮模型	39
	1. 提出问题	39
	2. 模型假设	40
	3. 建模与求解	40
第 3.3 节	随机人口模型	41
	1. 模型假设	41
	2. 建模与求解	42
第 3.4 节	随机服务模型	43
	1. 模型假设	43
	2. 模型求解	44
第 3.5 节	轧钢中的概率问题	46
	1. 模型假设与问题分析	46
	2. 建模与求解	46
第 3.6 节	蠓虫分类问题	48
	1. 模型假设	48
	2. 建模与求解	49
第 4 章	统计分析模型	52
第 4.1 节	回归分析模型	52
	1. 一元线性回归	53
	2. 可化为一元线性回归的曲线回归 ...	59
	3. 多元线性回归	60
	4. 自变量中含有定性变量的回归	70
	5. 岭回归与主成分回归	73
第 4.2 节	聚类分析	84
	1. 相似性度量	85

	2. 系统聚类法	85
第 4.3 节	判别分析	92
	1. 多组距离判别	92
	2. 典型判别	93
第 4.4 节	主成分分析	95
	1. 主成分分析的基本思想	95
	2. 主成分分析的具体步骤	96
	3. 主成分分析的主要应用	97
第 4.5 节	因子分析	98
	1. 什么是因子分析	98
	2. 因子模型	99
第 5 章	层次分析法建模	105
第 5.1 节	层次分析法的基本步骤	105
	1. 成对比较矩阵和权向量	106
	2. 比较尺度	107
	3. 一致性检验	108
	4. 层次总排序及组合一致性检验	108
第 5.2 节	层次分析法的应用实例	109
第 6 章	运筹学模型	118
第 6.1 节	线性规划模型	118
	1. 引例	118
	2. 线性规划模型常用解法	120
	3. 线性规划模型	122
第 6.2 节	动态规划模型	125
	1. 引例	125
	2. 动态规划模型的基本概念和 基本方程	128
	3. 动态规划模型	130

第 6.3 节	对策论模型	138
1.	对策论的基本概念	138
2.	对策模型	140
第 6.4 节	决策分析模型	143
1.	引例	143
2.	决策问题的基本概念	144
3.	决策分析模型	146
第 7 章	自动控制论模型	152
第 7.1 节	在控制系统中创建数学模型	152
1.	模型的引出	152
2.	建模实例	153
第 7.2 节	控制模型的基本理论简介	155
1.	控制系统的一般概念	155
2.	控制系统的数学模型	155
3.	最优滤波	159
4.	传递函数	161
5.	由系统的动态方程求传递函数	162
6.	另外几个常用的控制概念	163
7.	系统仿真	163
第 7.3 节	模型的应用实例及其解法	164
1.	滤波应用实例:水面舰艇综合导 航系统数学处理模型设计及仿真 实验研究	164
2.	通过合理配置提高步进链轮机构的 总体精度的应用实例	171
参考文献		185

第 1 章

数学模型概论

应用数学知识和计算机技术去解决各门学科和社会生产中的实际问题时,首先要通过对实际问题的分析、研究,组建用以描述这个问题的数学模型,使用数学的理论和方法或者编程计算对模型进行分析从而得到结果,再返回现实去解决实际问题.在当前实现数学作为一种技能的过程中使用数学解决实际问题的技能的培养是十分重要和必需的,这主要是数学模型的有关知识的学习和数学建模能力的培养.

第 1.1 节 数学与数学模型

人类已进入以计算机、网络、数码光纤和多媒体等为代表的信息时代.这个时代是电子计算机的时代,计算机的应用深刻地改变了人类的生活方式,在人类历史上引起了一场革命,在这场革命中,数学方法的应用已逐步深入到各个领域.例如,生物学、生态学、经济学、社会学、政治学等等.数学的重要性正为越来越多的人所认识.数学使得以前很多定性的东西逐步定量化和精确化.数学的发展提供了解决随机问题、确定问题、离散问题的途径,使得数学在各个学科中的应用显得越来越重要.

众所周知,数学最引人注目的特点是它思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性.这是在数学发展的漫长的历程中逐渐地形成的.它源于人们的生产和生活的需要,对其中有关的空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而形成今天的数学.它的出现为我们更深刻地认识世界提供

了一条重要的途径. 它的抽象性和严谨性特点也成为我们科学思维和组织构造知识的一个有效手段. 而数学应用的广泛性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面的发展奠定了坚实的基础. 但是在过去由于种种原因, 数学强调的是思维的抽象性、推理的严谨性, 而忽略了数学应用的广泛性. 数学的这个特点在人们的印象中反映的并不充分. 往往把数学看成训练学生逻辑思维能力的工具, 致使常常感到学了大量的数学知识和方法但是不能应用到实际问题之中. 当前, 数学科学与其他科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能, 在变化万千的世界里, 人们无时无刻不在运用数学的方法去认识、改造这个世界. 数学应用的特征在现今就显得更加突出和重要.

一个科学问题的内容能用数学方法来分析和表示, 这是该问题定量化和精确化的一种表现. 利用数学这一工具可以更加深刻认识到客观现象的本质. 许多物理概念用语言叙述很难说清楚, 例如变速运动的瞬时速度, 变力沿曲线所做的功等, 而在微积分中用导数和积分很容易描述和解决这些问题. 又如许多经济现象, 利用微积分的概念会描述得更深刻, 分析得更透彻.

在生产过程中, 为了分析和改进生产中出现的问题, 虽然可采取较简单的直接实验的方法, 但在很多情况下这种方法是行不通的, 而必须通过模拟计算的方法进行. 如某设备正式投产后往往不允许破坏正常生产过程进行实验. 因此, 在很多情况下人们先进行一些数据收集, 然后在计算机上进行模拟实验来代替直接实验.

所谓数学模型是指通过抽象和简化, 使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画, 以便于人们更深刻地认识所研究的对象. 数学模型也不是对现实系统的简单的模拟, 它是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具. 数学模型是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、翻译的结果. 它使用数学语言精确地表达了对对象的内在特征. 通过数学上的演绎推理和分析求解, 使得我们能够深化对所研究的实际问题的认识. 例如, 描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$, 尽管由于它忽略了性别、年龄、社会经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素, 相对于实际人口的动态来说大大地被简化了, 虽然这个数学模型对现在人口的预测有较大的偏差, 但它所揭示出的人口的指数增长的结论是人们不得不面对的严酷事实.

现在数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中. 电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型. 用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算, 才能实现有效的过程控制. 气象工作者为了得到准确的天气预报, 一刻也离不开根据气象站、期限卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型. 生物制药学家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型, 就可以分析药物的疗效, 有效地指导临床应用. 城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型为城市发展的决策提供科学的依据. 生产厂家和经营者要根据产品的需求状况、生产条件、成本及利润等信息, 建立一个合理安排生产和销售的数学模型, 以获得最大的经济效益.

在实践中, 能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的. 也就是说, 实际问题很少直接以数学的语言出现在我们面前. 而且对于如何使用数学语言来描述所面临的实际问题也往往不是轻而易举的. 应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象, 并从中抽象出恰当的数学关系, 也就是组建这个问题的数学模型, 这个过程就是数学建模.

数学模型主要是使用数学知识来解决问题. 因此数学是人们掌握和使用数学模型这个工具的必要条件和重要的基础. 没有深厚的数学基础、严格的数学逻辑思维是很难使用数学模型来解决实际问题的. 但是数学模型本身也还具有若干不同于数学的特征, 还需要掌握其他方面的许多知识, 这些都是在学习和掌握数学模型过程中特别要注意的. 建立模型以解决问题所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也是迥然不同的. 一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学. 作为一成功的模型应该有较强的实际背景, 最好是直接针对某个实际问题的. 模型应该是经过实际检验表明是可以接受的, 它应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解, 而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的.

总而言之, 当前科学技术的发展要求我们更好地应用数学这一工具为各方面服务, 用数学方法来反映、模拟或描述各种各样的现象, 揭示内在规律, 这就是本书要介绍的应用数学模型.

第 1.2 节 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式来分类.

按照模型的应用领域,可以分为数量经济模型、医学模型、地质模型、社会学模型等,更具体的有人口模型、交通模型、环境模型、生态模型等等.

按照建立模型的数学方法,可以分为几何模型、微分方程模型、图论模型、优化模型等等.

数学建模的初衷是洞察源于数学之外的事物或系统.通过选择数学系统,建立原系统的各部分与描述其行为的数学部分之间的对应,达到发现事物运行的基本过程的目的.因此,人们通常也用如下的方法分类.

1. 观察模型和决策模型

基于对问题状态的观察、研究,所提出的数学模型可能有几种不同的数学结构.例如,决策模型是针对一些特定目标而设计的.典型的情况是,某个实际问题需要作出某种决策或采取某种行动以达到某种目的.决策模型常常为了使技术的发展达到顶峰而设计,它包括算法和由计算机完成的为特定问题提供解的模拟.一般的马尔可夫链模型是观察模型,而动态规划模型是决策模型.

2. 确定型模型和随机型模型

确定型模型建立在如下假设的基础上,即如果在时间的某个瞬间或过程的某个阶段有充分的信息,则系统的特征就能准确地预测.确定型的模型常用于物理和工程之中.常见的确定型模型是微分方程模型.随机型模型在概率意义上描述系统的行为,已广泛应用于社会科学和生命科学中出现的问题.

3. 连续模型和离散模型

有些问题可用连续变量描述,比如空中飞行安全的设计;有些问题适合离散变量描述,比如足球赛的赛程方案设计.有些问题由连续型变量描述更接近实际,但也允许作离散化处理.例如,最优捕鱼策略问题中,鱼群是随时间变化而变化的可视为连续模型,但如果观察的时间段较长,则用

离散模型描述更适合。

4. 解析模型和仿真模型

模型可直接用解析式表示,结果可能是特定问题的解析解,或得到的算法是解析形式的,通常可认为是解析模型.而实际问题的复杂性经常使目前的解析法满足不了实际问题的要求或无法求解.因此,很多实际问题需要进行仿真,仿真模型可以对原问题直接或间接地仿真。

第1.3节 建立数学模型的一般步骤

一般地说,数学模型是我们所研究的实际问题有关属性的模拟,它应当具有实际问题中我们关心和需要的主要特征.数学模型是运用数学的语言和工具,对部分现实世界的信息加以翻译、归纳的产物.数学模型经过演绎、求解、推断、分析给出数学上的预报、决策或控制,再经过翻译和解释,回到现实世界中.最后,这些推论或解释必须接受实际问题的检验,完成实践—理论—实践的循环。

建立一个实际问题的数学模型的方法大致有两种:一种是实验归纳的方法,即根据测试或计算数据,按照一定的数学方法,归纳出问题的数学模型;另一种是理论分析的方法,即根据客观事物本身的性质,分析因果关系,在适当的假设下用数学工具去描述其数量特征。

建立数学模型一般分为如下几个步骤。

1. 建模准备

在建模前要对实际问题的背景有深刻的了解,进行全面的、深入细致的观察,明确所要解决问题的目的和要求,并按要求搜集各种必要的信息.首先需要明确研究的对象和研究的目的,问题所依据的事实和数据资料的来源是什么?它们是否真实?以及与问题有关的背景知识.需要明确所研究问题的类型:是确定的还是随机的,是连续的还是离散的。

2. 模型假设

模型假设是数学建模的关键的一步.一般地说,一个实际问题是复杂的,涉及的,方面很多,不可能考虑到所有因素.为了利用数学的方法,通常