数学奥林匹克

(1987—1988)

（高中版）

单墫　胡大同

北京大学出版社

数学奥林匹克

(1987—1988)

高 中 版

单 墫 胡大同

北京大学出版社

数学奥林匹克

(1987—1988)

高中版

单 墫 胡大同

责任编辑：王明舟

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 32开本 8.625印张 190千字
1990年8月第一版 1990年8月第一次印刷
印数：00001—21,000册
ISBN 7-301-01339-6/G·69
定价：4.10元

前　　言

国际数学竞赛(IMO)已经举行了二十九届。

近几年，各参加国为IMO提供了大量问题，供命题委员会选用。这些问题内容丰富，解法多样，是极好的资料，可供各数学奥林匹克学校与有兴趣的师生参考。为此，我们翻译了二十八、二十九届预选题近一百五十道，并拟了解答。有些题目提供的国家和地区未能找到，有些题目未收入，故题号不连续。对几道题目我们未给出解答，留给读者。

汇集在这本小书里的还有1987年美国与加拿大的赛题和解答，以及加拿大为1988年IMO所准备的训练题。

感谢加拿大Albert大学Andy。刘教授供给我们很多资料。他是加拿大数学会委派的教练，对中国的数学竞赛也十分关心。

二十九届预选题，我曾在教委委托清华大学与北京师范大学主办的数学试点班中讨论过。陈平、苏飞、马彦源等同学提供了不少好的解法。

根据试验班同学的意见，二十九届预选题中以6,19,18,31,32,56,33,46,84这九题为最佳，以68,32,19,6,11,3,31,33,20,55这十题为最难，不知读者是否有同样的感觉。

单　墫

1989年1月

目　录

一、各国和地区提供给第28届(1987年)国际数学竞赛的问题及解答

问题

1．a,b,c,d 为实数，满足 $a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$，求 $(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$ 的最大值。

2．将顺序为 $1,2,3,\cdots,2n$ 的 $2n$ 张牌变成 $n+1,1,n+2,2,\cdots,n-1,2n,n$，即原先的前 n 张牌移至第 $2,4,\cdots,2n$ 张，而其余的 n 张牌，依照原来顺序排在奇数位置 $1,3,5,\cdots,2n-1$，这称为一次"完全"洗牌，试确定有哪些 n，从顺序 $1,2,\cdots,2n$ 开始，经过"完全"洗牌可以恢复到原来状况。

3．确定最小的自然数 n，使 $n!$ 的结尾恰有 1987个 0。

4．K_1,K_2,K_3 为三个圆，交于 P 点。圆心分别为 O_1,O_2,O_3。设 K_1 与 K_2 又交于 A，K_2 与 K_3 又交于 B，K_3 与 K_1 又交于 C。X 为 K_1 上任意一点，直线 XA 交 K_2 于 Y，直线 XC 交 K_3 于 Z，证明

(1) Z,B,Y 共线。

(2) $\triangle XYZ$ 的面积$\leqslant\triangle O_1O_2O_3$ 的面积的 4 倍。

5．设 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$ 为九个正数。令

$$S_1=a_1b_2c_3,\quad S_2=a_2b_3c_1,\quad S_3=a_3b_1c_2,$$
$$T_1=a_1b_3c_2,\quad T_2=a_2b_1c_3,\quad T_3=a_3b_2c_1.$$

设集合 $\{S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3\}$ 至多有两个元素，证明

$$S_1+S_2+S_3=T_1+T_2+T_3.$$

6．对每个自然数 $k\geqslant 2$，定义数列 $a_n(k)$ 为

$$a_0=k,\ a_n=\tau(a_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,$$

其中 $\tau(a)$ 是 a 的不同的正整数因数的个数。求出所有的 k，使数列中没有平方数。

7. 在锐角$\triangle ABC$ 内求一点 P，使

$$(BL)^2+(CM)^2+(AN)^2$$

为最小，这里 L,M,N 分别为P 到 BC,CA,AB 的垂线的垂足。

8. 证明若 x,y,z 为实数，且 $x^2+y^2+z^2=2$，则

$$x+y+z\leqslant xyz+2。$$

9. 已知$\triangle ABC$ 的边 $BC=a$，外接圆的半径 $R(2R>a)$ 及差 $c^{-1}-b^{-1}$。这里 $c=AB$，$b=AC$，求作$\triangle ABC$。

10. 若 a,b,c 为一三角形的三边长，$2s=a+b+c$，则

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}(n\geqslant1)。$$

11. 令 P 为$\triangle ABC$ 的内点，直线 l,m,n 过 P，分别垂直于 AP,BP,CP。若 l 交 BC 于 Q，m 交 AC 于 R，n 交 AB 于 S，证明 Q,R,S 共线。

12. (1) 设 $gcd(m,k)=1$，证明存在整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，使每一乘积 $a_ib_j(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,k)$除以 mk 时得出不同的余数。

(2) 设 $gcd(m,k)>1$。证明对任意整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，总有两个乘积 a_ib_j与 a_sb_t（$(i,j)\neq(s,t)$）除以 mk 时得到相同的余数。

13. 从集合$\{1,2,\cdots,n\}$中随机地连续取出五个不同的数。证明前三个数或所有五个数可排成等差数列的概率均大

于$6/(n-2)^3$。

14．设C为一个定圆，l为一定直线与C相交。设P_1，$P_2,\cdots,P_{2n}$为l上的固定点，且有一顶点全在C上的多边形$A_1A_2\cdots A_{2n}$满足P_i在直线$A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,2n-1)$上，$P_{2n}$在$A_{2n}A_1$上。证明：若$V_1V_2\cdots V_{2n}$是圆$C$的内接多边形且$P_i$在$V_iV_{i+1}(i=1,2,\cdots,2n-1)$上，则$P_{2n}$在$V_{2n}V_1$上。

15．设f是平面上使每个闭矩形变为闭矩形的一一对应。证明f将正方形变为正方形(注意，未假定f是连续的)。

16．$\triangle ABC$的角B与角C的平分线分别交对边于B'与C'。证明直线$B'C'$与$\triangle ABC$的内切圆必相交。

17．对任一整数$r\geqslant1$，确定具有下述性质的最小整数$h(r)$：在集合$\{1,2,\cdots,h(r)\}$任意分为r类时，总存在整数$a\geqslant0$及$1\leqslant x\leqslant y\leqslant h(r)$，使得$a+x,a+y,a+x+y$属于同一类。

18．已知a_{11},a_{22}为实数，x_1,x_2,a_{12},b_1,b_2为复数，满足$a_{11}a_{22}=a_{12}\bar{a}_{12}$（$\bar{z}$为复数$z$的共轭），考虑方程组

$$\begin{cases}\bar{x}_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)=b_1,\\ \bar{x}_2(\bar{a}_{12}x_1+a_{22}x_2)=b_2.\end{cases}$$

（1）给出这方程组相容的条件。

（2）给出x_1的辐角主值比x_2大90°的条件。

19．十进制数$d_1d_2\cdots d_n$（这里d_i是数字，允许$d_1=0$）中，由它的连续(至少两个)数字组成的最大的递增或递减的段称为副，如024379有三副，024,43,379，对任意$n\geqslant2$，确定集合$\{d_1d_2\cdots d_n|d_k\neq d_{k+1},\ k=1,2,\cdots,n-1\}$中的十进数的副数的平均值。

20．一次集会有n对夫妇参加，每个人在一段时间内属

于某一个聊天的小组，称之为团。每个人与他(她)的配偶从不在同一个团内。除此而外，每两个人都恰有一次在同一个团内。证明若 $n\geqslant 4$，则团的总数 $k\geqslant 2n$。

21. 若 $\{a_k\}$ 为正实数，$a_1\geqslant 1, a_{k+1}-a_k\geqslant 1\ (k=1,2,\cdots)$。证明对所有 $n\geqslant 1$，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}\sqrt[1987]{a_k}}<1987.$$

22. 设 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 为两个正数数列，满足

(1) $a_k<b_k$;

(2) 对所有实数 x 与 $k=1,2,\cdots$,

$$\cos a_k x+\cos b_k x\geqslant -\frac{1}{k}.$$

证明 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k/b_k$ 存在并求出它的值。

23. 设 S 为有 n 个元的集合，使 S 中恰有 k 个元固定的排列数记为 $P_n(k)$。证明

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)^2P_n(k)=n!$$

23′. (本届试题 1) 在上题中，有

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=n!.$$

24. 证明对每个 $k=2,3,4,\cdots$，存在无理数 r，使得 $[r^m]\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,k)$ 对每个自然数 m 成立。这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

25. 设正数 α,β,γ 满足 $\alpha+\beta+\gamma<\pi$。证明 $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ 可以组成一个三角形，其面积

$$S \leqslant \frac{1}{8}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

（注：应加上条件 α, β, γ 中任一个小于其它两者的和。）

26．对每个整数 $k \geqslant 0$，令 $a^k_{n_k} \cdots a^k_0$（$a^k_{n_k} \neq 0$）为 $(1987)^k$ 的十进表示（于是 $n_0 = 0$，$a^0_0 = 1$，而 $n_1 = 3$，$a^1_3 a^1_2 a^1_1 a^1_0 = 1987$ 等等）。作无限小数

$$x = 0.11987 a^2_{n_2} \cdots a^2_0 \cdots a^k_{n_k} \cdots a^k_0 \cdots.$$

证明：x 为无理数。

27．设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为平面上 n 个点，问至少需连多少条线段 P_iP_j 才能使每四个点中均有三点构成一个三角形，其三边为所连的线段？怎样连？

28．求出方程 $[n\sqrt{2}] = [2 + m\sqrt{2}]$ 的所有整数解。

29．设 $P_1, P_2, \cdots, P_{2n+3}$ 为平面上 $2n+3$ 个点，每四个点不共圆（任意三点不共线）。通过其中三个点作圆，将其余 $2n$ 个点均分，使圆内、圆外各有 n 个点，这种圆的个数记为 K。证明

$$K > \frac{1}{\pi} C^2_{2n+3}.$$

30．A 为整数组成的无限集，每一元 $a \in A$ 是至多 1987 个质数的乘积（重数计算在内）。证明必存在一个无限集 $B \subset A$ 及一个数 b，使 B 中任意两个数的最大公因数为 b。

31．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个整数，k 为小于 n 的整数。令

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_k, & T_1 &= x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n,\\
S_2 &= x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}, & T_2 &= x_{k+2} + x_{k+3} + \cdots + x_n + x_1,\\
S_3 &= x_3 + x_4 + \cdots + x_{k+2}, & T_3 &= x_{k+3} + x_{k+4} + \cdots + x_1 + x_2,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
S_n &= x_n + x_1 + \cdots + x_{k-1}, & T_n &= x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{n-1}.
\end{aligned}$$

(x_i循环出现，在x_n的后面x_1重新出现。）又令$m(a,b)$为i的个数，使得S_i除以3余a，T_i除以3余b，这里a,b为0，1或2。

证明$m(1,2)$与$m(2,1)$除以3时余数相同。

32．a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为正整数，证明

$$(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_1+a_1b_3)^2 \geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1).$$

并证明。当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时等式成立。

33．若函数f：$(0,+\infty)\to R$具有性质

$$f(x)=f(1/x)\ （对所有\ x>0）.$$

证明存在函数u：$[1,+\infty)\to R$，满足

$$u\left(\frac{x+1/x}{2}\right)=f(x)\ （对所有\ x>0）$$

34．在象棋循环赛中，$n\geqslant 5$个参加者已赛过$\left[\frac{n^2}{4}\right]+2$盘。

(a) 证明有5名选手a,b,c,d,e互相赛过如下这几盘：ab,ac,bc,ad,ae,de。

(b) 若仅赛过$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$盘，结论是否仍成立？

35．实$t_1,t_2,\cdots,t_n$为n个实数，满足$0<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n<1$。证明：

$$(1-t_n)^2\left[\frac{t_1}{(1-t_1^2)^2}+\frac{t_2^2}{(1-t_2^3)^2}+\cdots+\frac{t_n^n}{(1-t_n^{n+1})^2}\right]<1.$$

36．设$\triangle ABC$中，BC上一点M到AC,AB的正射影分

别为 B', C'，确定 M 使 $B'C'$ 为最小。

37. 定义数 $d(n,m)$ 如下 (m, n 为整数并且 $0\leqslant m\leqslant n$)：

$$d(n,0)=d(n,n)=1 \text{（对所有 } n\geqslant 0\text{）}$$

且对 $0<m<n$ 有

$$md(n,m)=md(n-1,m)+(2n-m)d(n-1,m-1),$$

证明所有的 $d(n,m)$ 为整数。

38. 求最小的实数 c，具有如下性质：对每一正实数的数列 $\{x_i\}$，若

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x_{n+1},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

则

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

$$n=1,2,3,\cdots。$$

39. 考虑中心为 O 的正 1987 边形 $A_1A_2\cdots A_{1987}$。证明集 $M=\{\overrightarrow{OA_j},\ j=1,2,\cdots,1987\}$ 的任一真子集中的向量的和不为 0。

40. 证明若方程 $x^4+ax^3+bx+c=0$ 的根均为实数，则 $ab\leqslant 0$。

41. 在空间中是否有一点集 M，对任一平面 σ，$M\cap\sigma$ 都是有限的非空集？

42. 设 S_1 与 S_2 为两个半径不同的球，互相外切，这两个球在一个圆锥 C 内并且与锥相接触的部分都是一个完整的圆。在锥内还有 n 个实心球，围成一圈，每一个球与锥 C 相切，并且与 S_1, S_2 外切，每两个实心球也互相外切。求 n 的可能值。

43．设$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$为实数，满足

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0,$$

证明$|\sin\theta_1+2\sin\theta_2+\cdots+n\sin\theta_n|\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$。

44．将集$\{1,2,\cdots,n\}$分拆为三个子集A_1,A_2,A_3，其中允许有空集，具有性质：

(1) 若每个子集的元素依递增次序排列，则每相邻的元素奇偶性不同；

(2) 若A_1,A_2,A_3均非空，则其中恰有一个集合其最小元是偶数。求这种分拆的个数。

（注：分拆的意思是$A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,2,\cdots,n\}$且$A_1\cap A_2=A_2\cap A_3=A_3\cap A_1=\phi$。这些子集的其它排列如$A_2,A_3,A_1$给出与$A_1,A_2,A_3$同样的分拆。）

45．设P,Q,R为实系数多项式，满足$P^4+Q^4=R^2$。证明存在实数p,q,r及多项式S，使

$$P=pS,\quad Q=qS,\quad R=rS^2.$$

46．证明数$1,2,\cdots,1987$可以用四种颜色染色，使得没有一个十项的等差数列，它的项是同一种颜色。

47．设$r>1$为实数，n为小于r的最大整数，考虑满足$0\leqslant x\leqslant n/(r-1)$的任意实数$x$，$x$关于底$r$的展开式是指把$x$表示成如下形式：

$$x=\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}+\frac{a_3}{r^3}+\cdots,$$

其中a_i是满足$0\leqslant a_i<r$的整数。你可以假定（无须证明）区间$0\leqslant x\leqslant n/(r-1)$中每一个数$x$至少有一个底为$r$的展开式。

证明：若 r 不是整数，则存在一个数 p，它有无穷多种不同的底为 r 的展开式。

48．一个 $m\times n$ 的矩形能否用 L 形的瓦（由3个 1×1 的正方形组成的图形）覆盖，若

(a) $m\times n=1985\times1987$？

(b) $m\times n=1987\times1989$？

49．用 n 个数字，每个取自集 $\{0,1,2,3,4\}$ 中，构成词，如果每相邻的两个数字必须相差1，共能组成多少个词？

50．已知

$$x=-2272,\quad y=10^3+10^2c+10b+a,\quad z=1$$

适合方程 $ax+by+cz=1$，这里 a,b,c 是正整数，$a<b<c$。求 y。

51．若 PQ 为一线段，长度固定。令它在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上滑动(次序是 $BPQC$)。过 P,Q 作 AC,BC 的平行线，分别交 AC 于 P_1,Q_1，交 AB 于 P_2,Q_2。证明梯形 PQQ_1P_1 与 PQQ_2P_2 的面积之和与 PQ 在 BC 上的位置无关。

52．设 l,l' 为空间中的两条直线，在 l 上取 A,B,C 三点，B 为线段 AC 中点。若 a,b,c 分别为 A,B,C 到 l' 的距离，证明 $b\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$，当且仅当 $l\parallel l'$ 时等式成立。

53．a_k 为展开式

$$(1-\sqrt{2}x+x^2)^n=\sum_{k=0}^{2n}a_kx^k$$

中的系数．求 $\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$。

54．已知五个实数 u_0,u_1,u_2,u_3,u_4。证明总可以找到五

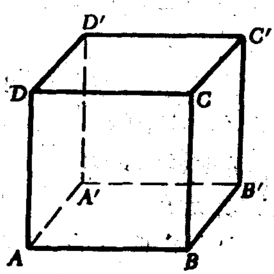
个实数 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 满足下列条件：

(1) 对每个 i，$u_i - v_i$ 是整数；

(2) $\sum\limits_{0 \leq i < j \leq 4} (v_i - v_j)^2 < 4$。

55．在笛卡尔平面中，圆 C_1 以 $O_1(-2,0)$ 为心，3 为半径，O 为原点，A 为$(1,0)$。证明存在一个正的常数 c，使得对 C_1 外任意一点 X，有 $\overline{OX} - 1 \geqslant c\min\{\overline{AX}, \overline{AX}^2\}$，求 c 的最小值。

56．设给定的 $\triangle ABC$ 不是等边三角形，顶点依反时针顺序排列。正三角形 $A'B'C'$（顶点依反时针顺序排列）的顶点 B', C' 与 A 共线；A', C' 与 B 共线；A', B' 与 C 共线。求 $\triangle A'B'C'$ 的重心轨迹。



57．设 $ABCDA'B'C'D'$ 为平行六面体。如图所示。证明

$$AB' + AD' + AC \leqslant AB + AD + AA' + AC'.$$

等号何时成立？

58．是否存在一个二次的二元多项式 $P(x,y)$，对每一个非负整数 n，有且仅有一个非负整数对 (k,m)，使 $P(k,m) = n$？

59．设 f 是满足下列诸条件的函数：

(1) 若 $x > y$ 且 $f(y) - y \geqslant v \geqslant f(x) - x$，则对于某个介于 x 与 y 之间的数 z，有 $f(z) = v + z$；

(2) 方程 $f(x) = 0$ 至少有一个解，并且在该方程的解中存在一个解不小于所有其它解；

(3) $f(0) = 1$；

(4) $f(1987)\leqslant1988$;

(5) $f(x)\cdot f(y)=f(xf(y)+yf(x)-xy)$。

求：$f(1987)$。

60．解方程$28^x=19^y+87^z$这里x,y,z为整数。

解答

1．
$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4\\&\quad+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\\&\leqslant(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4\\&\quad+(b+d)^4+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4\\&\quad+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leqslant6.\end{aligned}$$

当且仅当$a=b=c=d=\pm1/2$时取得最大值6。

2． n可为任意自然数。事实上，令$m=2n+1$。一次洗牌将x变为$y\equiv2x\pmod m$。因此经过k次洗牌后x变为$2^kx\pmod m$。由于m为奇数，所以$2^{\varphi(m)}\equiv1\pmod m$，这里$\varphi(m)$是欧拉函数，从而$2^{\varphi(m)}x\equiv x\pmod x$，即经过$k(=\varphi(m))$次洗牌恢复原状。

3． 关键是计算$n!$中素因子5的幂指数。$n!$中p的幂指数等于$\frac{n-s(n)}{p-1}$，其中$s(n)$是n在p进制中的数字和。

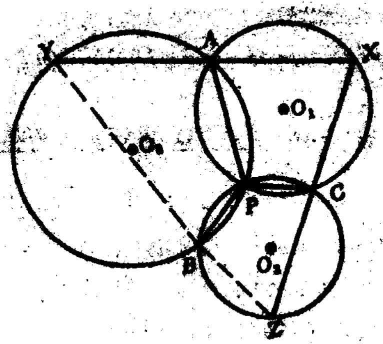
$$1987\times4=7948,$$

而
$$7948=(223243)_5,$$

所以在五进制中7948的数字和为16；$7948!$中5的幂指数为

$$\frac{7948-16}{5-1}=1987-4.$$

由于7950恰被5^2整除，7955，7960恰被$5'$整除，所以$7960!$中5的幂指数恰为1987，即$n=7960$。



4.(1) $\angle PBY+\angle PBZ=\angle PAX+\angle PBZ$

$$=\angle PCZ+\angle PBZ=\pi.$$

(2) 由于$\angle X,\angle Y$的大小不变，故所有的$\triangle XYZ$均相似，其面积在XY最大时最大， 这时$XY\parallel O_1O_2$且为O_1O_2的两倍。

5. 由S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3组成的集合中仅有一个元素时结论显然。设它有两个不同的元素S,T。由于

$$S_1S_2S_3=T_1T_2T_3. \qquad (*)$$

若$S_1=S_2=S_3=S$，则$T_1T_2T_3=T^3$或T^2S或TS^2，不论哪种情况均会导致$S=T$的矛盾。 同样$T_1=T_2=T_3$也导致矛盾。现设$S_1=S_2=S$，$S_3=T$，则由(*)，T_i中有两个为S、一个为T，从而

$$S_1+S_2+S_3=T_1+T_2+T_3.$$

6. 若k为质数，则$a_1=a_2=\cdots=2$。反之， 设$a_{n(k)}$中无平方数。若