周易的数学原理

欧阳维诚著

湖北教育出版社

内 容 简 介

作者以现代数学为工具研讨周易，方法新颖、观点大胆，为周易研究另辟了一条蹊径. 作者提出"易卦是古人研究思维决策的数学模型"、"卦、爻辞是解释决策模型的例题"等重要假说. 作者还对易卦的起源、易卦的卦序、大衍之数等历来议论纷纭、莫衷一是的重要问题，用数学的观点重新进行研究，提出了新的观点、结论和证据. 作者还对前人及今人在易学研究中的不足作了评论.

本书分 8 章. 第一章绪论，粗略论述周易中的数学内容. 第二章至第七章分别论述周易与集合论、布尔代数、群论、整数论、组合论、概率论等的联系. 第八章是数学原理在易学研究中的应用.

序

在科学研究中，结论固然重要，但有时候，方法或更甚焉. 在易学研究史上，每一个重大的进展无不伴随着研究方法的突破. 汉儒的象数学，王弼的得意说等等，莫不得力于研究方法的创新. 数学方法对社会科学研究的渗透，推动了社会科学研究的现代化，也有可能促进易学研究的现代化. 作者不揣浅陋，在这本小书中试图探讨如何将现代数学工具引进易学研究中. 作者在拙著《周易新解》一书中，曾经用数学方法考察易卦，提出了“易卦是一个6维布尔向量”、“易卦是古人研究思维决策的数学模型”、“卦、爻辞是解释决策模型的例题”的假说，并力图根据这一假说对《易经》卦爻辞进行新的诠释. 本书则是作者的进一步尝试，试图利用数学方法对易学研究中某些悬而未决的难题，如通行本的“卦序”问题、“大衍之数”问题等等进行探讨.

无庸讳言，在《周易》的《经》、《传》中不太可能包含现代科学技术的内容或预见，把《周易》无限地神秘化的做法本身就是不科学的. 不过，也必须看到，易学与数学是确有极为密切的联系的. 第一，作为一种抽象的符号系统，易64卦所成之集是一个良好的代数结构，有着丰富的数学内容. 例如，易卦集是一个格、一个布尔代数、一个交换群、一个古典概型的样本空间，等等. 易学中的某些概念，如果只涉及卦画的结构，就可以进行严格的数学

描述.从而,这些概念的所有的逻辑的结论,都必然在相应的数学描述中得到平行的反映;第二,各种揲蓍成卦的方法蕴含着数学的内容和技巧,不同的筮法涉及组合论、数论、概率论中某些深刻的定理;第三,历代学者特别是某些现代科学易学家曾经将许多数学问题"援易以为说",在"易学愈繁"的同时,不少数学内容事实上已被"援以入易".由此可见,在易学研究中引进数学方法,不仅是必要的,而且是可能的.易卦集所包含的丰富数学内容,为在易学研究中引进数学方法提供了坚实而广泛的基础.

本书既是探讨如何利用现代数学工具去研究易学问题,因此,写作的重点在于研究方法的建立,而不是易学或者数学知识的罗列;着眼于易学与数学之间的有机的深层的联系,而不是将《周易》与现代数学作牵强附会的比附.全书内容共分八章:第一章绪论,粗略地回顾了历代易学研究中涉及的数学内容.第二章至第七章是《周易》的数学原理,它包括《周易》与集合论、布尔代数、群论、整数论、组合论、概率论等的关系.为了便于不熟悉数学的读者阅读和理解,所有数学概念的引入,都是通过易学中的有关概念来解释的.第八章讲的是《周易》的数学原理在易学研究中的应用.在这一章中,对易学研究中某些令人感兴趣的,至今仍然悬而未决的难题,作了一些新的探讨.

作者衷心感谢湖北教育出版社在她的选题计划中给了本书以一席之地.责任编辑黄邦本先生认真地审读了本书的初稿,写了长达数千字的审读意见,对本书初稿提出了许多中肯的批评和有价值的建议,给了作者以很大的启发.根据黄先生的意见,作者对初稿作了相应的修改.对于黄先生为本书所付出的辛勤劳动,作者谨向他表示由衷的敬意和谢意.

易学不易,数学亦难.把现代数学方法引进易学研究,对于易学肤浅、数学荒疏的作者来说,实在是一种力难胜任的尝试.

既难免离经叛道之嫌，更恐贻画虎类狗之讥.但是，我仍然希望，这本小书的问世.能够给《周易》的爱好者，特别是那些具有一定的数学基础而又喜欢《周易》的读者以一些方法论的启示.我更希望，书中的错误和不妥之处，能得到方家的指正.

欧阳维诚

1992年11月22日深夜

目　录

第一章 绪 论

神无方而易无体.

——《周易·系辞》

在历代易学研究中,《周易》都与数学有着不解之缘.按照传统易学的观点,易学研究的主要内容是象、数、理、占.其中的象立足于卦画,卦画是一套抽象的符号系统,它表示什么意义?“仁者见之谓之仁,智者见之谓之智”,人们可以赋予它们各种各样的内容,但最容易的是被视为数学的符号.其中的数(包括天地数、河图数、筮数等),虽然比较简单,但经过人们长期的推演附会,也与数学发生了密切的、多样的联系.至于占,则因为要通过揲蓍而成卦,“三变得一爻”、“十有八变而成卦”.成卦的过程,涉及到概率论中的贝努里试验与数论中的同余式,与现代数学的关系已经十分密切.因此,易学研究与数学有这样或那样的关系,也就丝毫不足为怪了.《四库全书·总目提要》指出:“易道广大,无所不包,旁及天文、地理、乐律、兵法、韻学、算术、以逮方外之炉火,皆可援《易》以为说,而好异者又援以入《易》,故易学愈繁”.数学与易学的关系也正是如此.卦画作为一种抽象的符号,完全可以作为数学研究或运算的对象.不少现代数学的概念,确实可以“援《易》以为说”.更多的数学概念便被“好异者援以入

《易》”，使易学中的数学内容也愈演愈繁了.

本书的目的，一方面是研究、发掘《周易》中蕴含的数学内容，并运用所指出的数学原理对易学研究中一些悬而未决的问题进行新的探讨；另一方面，也对历代易学研究中涉及的种种《周易》与数学的问题，作一些去粗取精，正本清源的工作，使易学与数学之间建立起真正的、有机的联系，而不是肤浅的、标签式的牵强附会. 康德(I. Kant，1724～1804)曾经说过：“任何一门自然科学，只有当它数学化之后，才能称得上是一门真正的科学.”[①]这虽是针对自然科学而说的，但是，对于易学这门特殊的学问，也是有一定的现实意义的.

§1.1 历代易学家的数学研究综述

古今中外不少易学研究的著作都涉及到数学，特别是近年来“科学易”的兴起，更多的数学概念被引进到《周易》中来，致使有人不无感慨地说：“现在开易学会几乎成了百科全书会，相互之间听不懂所讲的内容.”[②]可见，在当代易学研究中引进的数学概念，已经达到了相当的广度和深度.

纵观过去易学中的数学研究，总的说来，大抵可分为以下几种类型(为了说话的方便，笔者杜撰了几个名词).

(一)数理哲学派

这一类研究方法肇源于以“天人合德”为基础的中国古代数理哲学.《系辞》说：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦定吉凶，吉凶生大业.”又说：“大衍之数五十，其用四十

---

① 转引自丁石孙、张祖贵：《数学与教育》，p. 66，湖南教育出版社 1989 年版.

② 刘正：当代易学研究的困境，《哲学研究》，1989 年第 10 期，p. 33.

有九…天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十.天数五，地数五，五位相得而各有合.天数二十有五，地数三十，凡天地之数，五十有五，此所以成变化而行鬼神也.”

数学的符号与某些数字，常常使人产生神秘的观点.古希腊罗马时代的神数观念，毕达哥拉斯学派的万物皆数的观念，都是典型的例子.德国哲学家卡西尔(E. Cassirer，1874～1945)写道："像语言和艺术的符号一样，数学的符号从一开始就被某种巫术的气氛所环绕，人们带着宗教的畏惧和崇拜来看待它们，以后，这种宗教的神秘信仰慢慢地发展为一种形而上学的信仰".①古代西方认为数是上帝的创造，中国没有上帝的观念，中国古代文化一个最显著的特点是"天人合德"的宇宙本体哲学，所有中国古代文化的创造活动都发源于并得力于此种哲学，此种哲学在《易传》中已经有了明确的表现.我国古代对符号与数产生的神秘感，虽不会归结为上帝的创造，但会认为这些符号和数是那些能通神明之德的圣人所发现的某种宇宙法则的体现.《系辞》说："古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情."这表明了古人认为无论是精神文化还是物质文化均取诸天地的法象，神奇的《周易》中的一些数字更不能例外，它们具有"成变化而行鬼神"的功能，有"范围天地之化而不过，曲成万物而不遗"的作用.研究推演它们之间的关系就有可能发现天人之间的奥秘.

以"大衍之数"为例."大衍之数"为什么是 50？实际上为什么又只用 49 呢？历代易学家对它作了种种解释(详见第八章§3).宋朝著名理学家朱熹(1130～1200)尤为突出.他写道："大

---

① 卡西尔著，甘阳译：《人论》，p. 275，上海译文出版社 1986 年版.

衍之数五十，盖以河图中宫，天五乘地十而得之，至用以筮，则又止用四十九，盖出于理势之自然，而非人之知力所能损益也．”①一方面，他认为人的智力很难理解“大衍之数”为什么是50？另一方面，他又力图通过数学运算，探求论证“大衍之数”的来源．

探求“大衍之数”的来源有两条重要线索：

一是《河图》、《洛书》．《系辞》说：“河出图，洛出书，圣人则之．”明确地提出演《周易》的圣人，效法了《河图》、《洛书》．所以，朱熹认为：“大衍之数五十”是以河图中宫的天五乘地十而得来的．他认为《河图》、《洛书》是数之源．他写道：

“自《洛书》以三三积数，为数之原．而自四以下，皆以为法焉．何则？三者天数也，故其象圆．四者地数也，故其象方．自五五以下，皆以三三图为根．自六六以下，皆以四四图为根，而四四图又实以三三图为根，故《洛书》为数之原，不易之论也．”②

这里涉及到了高阶幻方的研究．朱熹还认为：将《河图》、《洛书》合起来的整体称为“未分”，就是“易有太极”的“太极”；分开之后，将是“分而为二以象两”的“两仪”．他设计了一个《河图未分未变方图》，以进一步说明《河图》、《洛书》是数理之原．

“《河图》之数，五十有五．《洛书》之数，四十有五，合为一百．此天地之全数也．以一百之全数为斜界而中分之，则自一至十者，积数五十有五．自一至九者，积数四十有五．二者相交而成

---

① 朱熹：《周易本义》，引自《易学精华》，p. 1075，齐鲁书社，1990年影印版．

② 《易学启蒙》，转引自张国梁：《周易原理与古代科技》，p. 215，鹭江出版社，1990年版．

《河》、《洛》数之两三角形矣.”①

另一条线索是《周髀算经》.其中有言:

“数之法出于圆方,圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一.故折矩以为勾广三,股修四,径隅五,既方之外,半其一矩,环而共盘,得成三四五.两矩共长二十有五,是谓积矩.故禹之所以治天下者,此数之所以生也.”②

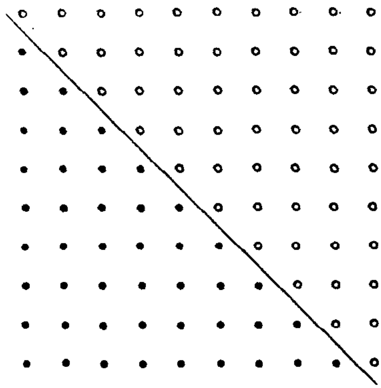


图 1.1.1 河洛未分未变方图

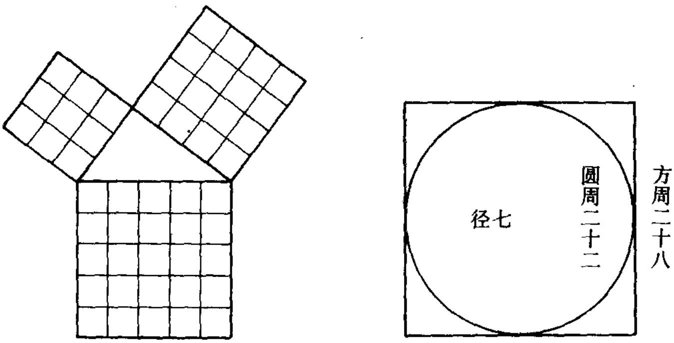
这里说,数出于圆、方,而《周髀算经》中又说:“方属地,圆属天,天圆地方.”也就是说,天地数出于圆方,圆方出于勾股.“大衍之数”既与天地数有关,自然也与勾股相联系.所以朱熹又作《大衍勾股之原图》与《大衍圆方之原图》(图 1.1.2).在《大衍勾股之原》图中,小方格数相加恰为 50.《大衍圆方之原》图是一个

① 《易学启蒙》,转引自张国梁:《周易原理与古代科技》,p. 216,鹭江出版社 1990 年版.

② 《周髀算经》,p. 4,上海古籍出版社 1990 年影印版.

直径为 7 的圆周内切于一个边长为 7 的正方形，方形与圆形的周长之和恰为 50. 所以说："大衍之数五十. "50 开平方未能得整数，减去 1 后，余数 49 恰为整数的平方，故"其用四十有九". 这就是朱熹的解释. 他写道：

"论方圆周围之合数则五十，…此大衍之体也. …蓍策之数，盖以七为用者，盖方圆之形，惟以径七为率，则能得到周围之整数. "①



《大衍勾股之原》图　　《大衍圆方之原》图

图 1.1.2

《大衍勾股之原》图与《大衍圆方之原》图已经用到了较多的数学知识. 两图的数学思想显然来自汉赵爽对《周髀算经》的注解：

"圆径一而周三，方径一而匝四，伸圆之周而为勾，展方之匝而为股，共结一角，邪适弦五. 政圆方斜径相通之率. "

但朱熹没有再采用"周三径一"的旧说，而采用了祖冲之的

---

① 《易学启蒙》，转引自张国梁：《周易原理与古代科技》，p. 218，鹭江出版社 1990 年版.

疏率 $\pi=22/7$.

综上所述，数理哲学派是为了哲学命题的需要，在形而上学的假定之下，与某些数学命题作了牵强附会的联系，并没有真正揭露出易卦丰富的数学内涵；但他们的工作对我国古代数学的发展，还是起了一定的作用的.

值得注意的是，今天仍有一些易学研究者，相信《周易》中蕴藏了“成变化而行鬼神”的数学公式，他们力图找到这种公式. 例如，有人最近在杂志上发表文章，提出了所谓的《周易》预测公式，自称其公式不仅灵验，而且是完全“符合代数学的原理与规律的.”①文章写道：

“1991 年 3 月 13 日晚 8 时为人占一朋友的身高，得“泽风大过卦”，一爻变，其本、之、互卦的卦数及时序数如下：

本卦(䷛,☰)	之卦(䷪)	互卦(䷀)
$2+5=7$	$2+1=3$	$1+1=2$
四二九	四二九	一四九
五三八	一四九	一四九

运算：第一步，将本卦体卦的时序数逐个相加

$$4+2+9=15(\text{分米})=150(\text{厘米})$$

第二步，三卦的卦数相加

$$7+3+2=12(\text{厘米})$$

第三步，将以上两项得数相加

$$150+12=162(\text{厘米})$$

时因问者立着，当半迟半速，用

$$B=A(1\pm\frac{1}{40})$$

① 蓝允恭等：八卦的数在预测中的运用，《智力开发》，1992 年第 1 期.

的公式得

$$1.62\times(1\pm\frac{1}{40})=1.62(\text{米})\pm4.5\text{ 厘米}$$

取＋号得 1.67(米). 后证实其人身高果为 1.67 米."

文章描写得非常详细具体,灵验得很.是否真有其事姑且放开不论,而该文作者自称"符合代数学的运算原理",则令人决不敢苟同.这套所谓的预测方法与数学研究风马牛不相及.我们要说的只是:"善为易者不占!"

(二)易数源流派

中国古代数学曾经取得过光辉的成就,但是却一直得不到社会的重视.在中国古代典籍中,强调数学的重要性的虽也不乏其例,如宋朝著名数学家秦九韶(1202～1261)认为数学"大则可以通神明,顺性命;小则可以经世务,类万物."①但这种观点,没有任何社会文化基础,不仅没有被社会所接受,就连数学家本人也都认为数学只能"经世务,类万物",最多是一种不能登大雅之堂的济世之术.

封建王朝的制度也明确地反映了这一点.唐朝的最高学府——国子监虽然设有明算科,把数学作为一个专业,但算学博士的官秩才是"从九品下",算学助教则没有品级.而国子监的经学博士官秩为正五品上,连助教也是从六品上.②两者的地位相差极为悬殊,因此出现了"士族所趋唯明经、进士二科而已"的局面.总之,在漫长的封建社会中,数学作为一种不能登大雅之堂的术,一直处于十分低下的地位.

中国古代许多优秀的数学家,为了提高数学的地位,使它能

---

① 转引自吴文俊主编:《秦九韶与〈数书九章〉》,扉页书影,北京师范大学出版社,1987 年版.

② 《旧唐书》卷 44,职官志.

和经学一样，得到社会的同等对待，不得不把自己的优秀数学成果，附会成经学的内容. 在重要的儒家经典中，除了《周易》之外，都难以附会出数学的命题，而抽象的易卦符号系统，正是附会数学内容的绝好工具. 所以，不少优秀的古代数学家都曾以自己的优秀成果附会为《周易》的固有内容. 例如，秦九韶将他的一次同余式组解法称为《大衍求一术》；唐朝僧一行（683～727）的“大衍历议”都是典型的例子. 在这种风气的影响下，不少数学命题，都被“援易以为说”.

以秦九韶的“大衍求一术”为例. 秦氏所著《数书九章》在数学内容上颇多创新，能道前人之所未道. 但秦氏却把书中 81 个问题的第一个命名为“蓍卦发微”. 并在序言中宣称：“昆仑旁礴，道本虚一，圣有大衍，微寓于易. 奇余取策，群数皆捐，衍而究之，探隐知原. …其书九章，唯兹弗纪. ”①明确肯定“大衍求一术”来源于《周易》.

实际上，秦九韶的“大衍求一术”与传统易学所讲的筮法相去很远，看不出它们之间有什么逻辑的承袭关系. 试将其作一简单的比较：

关于占筮的具体方法，最早的也是最权威的记载见于《系辞》：“大衍之数五十，其用四十有九，分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂…是故四营而成《易》，十有八变而成卦. …”这是一套严格的程序. 对此，传统易学的一般解释如下：

(1)取 50 根蓍草，去其 1，实际只有 49 根：

$$R=50-1=49$$

---

① 转引自吴文俊主编：《秦九韶与〈数书九章〉》. p. 89，北京师范大学出版社，1987 年版.

(2)将 R 任意分为两部分：

$$R=R_1+R_2$$

(3)在 R_1 或 R_2 的任一份(不妨设为 R_1)中去其 1：

$$(R_1-1)+R_2=48$$

(4)将两份蓍草每 4 根一次数出，余数分别为 r_1, r_2($1\leqslant r_1, r_2\leqslant 4$)：

$$(R_1-1)\equiv r_1(\bmod 4),\ R_2\equiv r_2(\bmod 4), 1\leqslant r_1, r_2\leqslant 4$$

(5)去掉两份中的余数 r_1, r_2 以及(3)中拿走的 1 根，共去掉

$$r_1+r_2+1=5 \text{ 或 } 9$$

(6)剩下的蓍草数必为 44 或 40：

$$R-(r_1+r_2+1)=44 \text{ 或 } 40$$

这叫做“一变”．将第一变后剩下的蓍草数重复(1)～(6)的过程：

(A)	(B)
$44=R_1+R_2$	$40=R_1+R_2$
$(R_1-1)+R_2=43$	$(R_1-1)+R_2=39$
$R_1-1\equiv r_1, R_2\equiv r_2(\bmod 4)$	$R_1-1\equiv r_1, R_2\equiv r_2(\bmod 4)$
$r_1+r_2+1=4$ 或 8	$r_1+r_2+1=4$ 或 8
$44-(r_1+r_2+1)=40$ 或 36	$40-(r_1+r_2+1)=36$ 或 32

这叫做“二变”，将第二变后剩下的蓍草数重复(1)～(6)的过程：

(C)	(D)	(E)
$40=R_1+R_2$	$36=R_1+R_2$	$32=R_1+R_2$
$(R_1-1)+R_2=39$	$(R_1-1)+R_2=35$	$(R_1-1)+R_2=31$
$R_1-1\equiv r_1$	$R_1-1\equiv r_1$	$R_1-1\equiv r_1$
$R_2\equiv r_2(\bmod 4)$	$R_2\equiv r_2(\bmod 4)$	$R_2\equiv r_2(\bmod 4)$