UMSS

大学数学科学丛书—5

变分迭代法

曹志浩 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统地讨论了求解奇异和非奇异的大型稀疏线性代数方程组的计算方法和理论. 内容包括: 矩阵和线性方程组的预备知识, 奇异线性方程组迭代法的理论基础, 基本定常迭代法, 多项式加速迭代法(预条件共轭梯度法, Chebyshev 加速迭代法等), 非对称线性方程组的迭代法(BICG, QMR, CGS, BICGSTAB 和 GMRES 等), 多分裂方法, 双对角化方法等.

本书可作为计算数学和应用数学研究生的基础读物. 也可作为理工科相关学科以及从事科学与工程计算人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

变分迭代法/曹志浩 编著. —北京: 科学出版社, 2005

(大学数学科学丛书, 5)

ISBN 7-03-014712-X

Ⅰ.变… Ⅱ. 曹… Ⅲ.线性方程-方程组-计算方法 Ⅳ.O241.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 128604 号

责任编辑: 吕 虹 张 扬 / 责任校对: 宋玲玲

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年2月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2005年2月第一次印刷 印张: 14 1/2

印数: 1—3 500 字数: 268 000

定价: 30.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是同人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的.作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　　言

大型线性方程组的求解是大规模科学与工程计算的核心. 随着计算机的飞速发展, 需求解的问题的规模越来越大, 迭代法已取代直接法成为求解大型线性方程组的最重要的一类方法. 近年来各种新的迭代法不断涌现, 方法的实施和理论分析也获得了很大的进展.

本书系统地讨论了最重要的一些迭代法的收敛理论和有效实施, 也总结了许多基本的分析问题的技巧. 本书的特点是: 除了应用矩阵谱分析方法外, 还应用特殊的变分原理, 即二次泛函极小化作为工具; 不但讨论非奇异线性方程组, 而且对奇异线性方程组的迭代方法的理论和算法也有较深入的阐述. 国内到目前为止尚未见到相同类型的书籍. 本书既重视本学科的基本理论, 也注意本学科的最新进展, 便于读者阅读本书以后能很快地进入本学科的前沿进行研究工作, 或很容易地掌握新的计算方法应用于解决实际问题.

书中带*的章节讨论一些较特殊或较深入的内容.

本书的出版得到国家自然科学基金项目的资助(批准号 10171021 和 10471027).

作者感谢科学出版社吕虹编审的热心支持, 感谢张扬同志为本书出版所做的工作. 限于水平, 不当之处请读者批评指正.

谨以此书献给复旦大学一百周年校庆.

曹志浩

2004 年 6 月于复旦大学

作 者 简 介

曹志浩，1960年毕业于复旦大学数学系．现为复旦大学教授，博士生导师．长期从事计算数学方面的教学与科研工作．主要研究方向是数值线性代数和大规模科学与工程计算．已出版书籍：《矩阵计算与方程求根》(人民教育出版社出版，1979，高等教育出版社出版(第二版)，1984)，《矩阵特征值问题》(上海科学技术出版社出版，1980，第二次印刷，1983)，《多格子方法》(复旦大学出版社出版，1989)，《数值线性代数》(复旦大学出版社出版，1996)．在国内外知名杂志上已发表论文70余篇．

目 录

第1章 预备知识

本章讨论求解线性代数方程组的一些基本概念和基本工具.

§1.1 矩阵谱的性质

用 E_n 表示实 n 维向量空间 R^n 或复 n 维向量空间 C^n. 设 $Q \subset E_n$ 是一个子空间. 对 $\varphi, \psi \in E_n$, 用 (φ, ψ) 表示 φ 和 ψ 的内积, $\|\varphi\|$ 表示由内积诱导的范数.

1.1.1 自共轭矩阵

定义 1.1.1 若矩阵 A 满足

$$(A\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\varphi}, A\boldsymbol{\psi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in Q,$$

则称 A 在子空间 Q 上是自共轭的, 记作

$$A \overset{Q}{=} A^*.$$

显然, 当 $Q = E_n$ 时, 由 $A \overset{E_n}{=} A^*$(以后简记为 $A = A^*$) 可知 A 是自共轭的.

自共轭矩阵有良好的性质. 特别是, 存在酉阵 (正交阵)S 使 A 对角化 (谱分解

$$S^*AS = \Lambda,$$

$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 是特征值对角阵, S 的列是对应的正交规范特征向量. 对一般矩阵 A, S 由根向量为列组成, 而有 Jordan 典则形式

$$S^{-1}AS = J.$$

例如,

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \tilde{J} \end{bmatrix},$$

$S = [\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \cdots, \boldsymbol{s}_n]$, 则 $\boldsymbol{s}_1$ 是特征向量, $\boldsymbol{s}_2$ 是 2 级根向量:

$$A\boldsymbol{s}_1 = \lambda \boldsymbol{s}_1 \quad \text{或} \quad (A - \lambda I)\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}$$

$$A\boldsymbol{s}_2 = \lambda \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{s}_1 \quad \text{或} \quad (A - \lambda I)\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{s}_1, \quad \text{由此} \quad (A - \lambda I)^2 \boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0}.$$

定义 1.1.2　对 n 阶矩阵 A, 满足 $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1})$ 的最小非负整数 k 称为 A 的指标，记为 $\mathrm{index}(A)$.

显然，非奇矩阵的指标等于 0, 而奇异矩阵 A 的指标等于它的 Jordan 典则形中幂零块的最大阶数.

定义 1.1.3　集合 $Q \subset E_n$ 称为关于矩阵 A 是不变的，若

$$A\varphi \in Q, \quad \forall \varphi \in Q.$$

定理 1.1.1　若 $Q \subset E_n$ 是一个关于 A 的不变子空间，则 Q 由 A 的某些根向量张成.

证　设 Q 是 l 维的，由 $n \times l$ 矩阵 X_1 的列张成，因 Q 关于 A 不变，因此

$$AX_1 = X_1 A_{11},$$

其中 A_{11} 是 $l \times l$ 矩阵. 作 A_{11} 的 Jordan 典则分解

$$A_{11} = Q_l J_l Q_l^{-1},$$

由此

$$AX_1 = X_1 Q_l J_l Q_l^{-1}.$$

上式可改写为

$$A(X_1 Q_l) = (X_1 Q_l) J_l.$$

这证明了 $X_1 Q_l$ 的列向量是 A 的某些根向量，由此

$$X_1 = (X_1 Q_l) Q_l^{-1}.$$

这就证明了 Q 是由 $X_1 Q_l$ 的列张成的. □

定理 1.1.2　若 $A \overset{Q}{=} A^*$, 而子空间 $Q \subset E_n$ 关于 A 是不变的，则 Q 由 A 的某些正交特征向量张成.

证　设 Q 是 l 维的，由 $n \times l$ 矩阵 X_1 的列张成，可假定 X_1 是列正交规范的： $X_1^* X_1 = I_l$, 因 Q 关于 A 不变，因此

$$AX_1 = X_1 A_{11}.$$

$l \times l$ 矩阵 $A_{11} = X_1^* A X_1$(在 E_l) 是自共轭的：首先，由 A 在 Q 上的自共轭性可知

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in Q. \tag{1.1.1}$$

显然， φ 和 ψ 有表达式

$$\varphi = X_1 \tilde{\varphi}, \quad \psi = X_1 \tilde{\psi}, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in E_l.$$

因此 (1.1.1) 可写为

$$(AX_1\tilde{\varphi}, X_1\tilde{\psi}) = (X_1\tilde{\varphi}, AX_1\tilde{\psi}),$$

此即

$$(A_{11}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = (\tilde{\varphi}, A_{11}\tilde{\psi}), \quad \forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in E_l.$$

这就证明了 A_{11} 是自共轭的.

作 A_{11} 的谱分解

$$A_{11} = Q_l \tilde{\Lambda}_l Q_l^*,$$

其中 l 阶方阵 Q_l 满足 $Q_l^* Q_l = I_l, \tilde{\Lambda}_l$ 是对角阵. 由此

$$AX_1 = X_1 Q_l \tilde{\Lambda}_l Q_l^*,$$

上式可改写为

$$A(X_1 Q_l) = (X_1 Q_l)\tilde{\Lambda}_l.$$

这证明了 $X_1 Q_l$ 的列向量是 A 的某些特征向量，易知，这些列是相互正交的. 因此

$$X_1 = (X_1 Q_l) Q_l^*.$$

这就证明了 Q 是由 $X_1 Q_l$ 的列张成的. □

1.1.2 矩阵乘积的谱的性质

考虑矩阵乘积 AB 和 BA 的特征值和特征向量的关系，其中 A 和 B 是 n 阶矩阵.

考察矩阵恒等式

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & \mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I & A \\ B & \mu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I & A \\ 0 & \mu^2 I - BA \end{bmatrix}, \tag{1.1.2}$$

$$\begin{bmatrix} \mu I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I & A \\ B & \mu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^2 I - AB & 0 \\ B & \mu I \end{bmatrix}. \tag{1.1.3}$$

引进记号

$$\mu^2 = \lambda, \quad Z = \begin{bmatrix} \mu I & A \\ B & \mu I \end{bmatrix}.$$

对 (1.1.2) 和 (1.1.3) 两端取行列式

$$\mu^n \det Z = \mu^n \det(\lambda I - BA),$$

$$\mu^n \det Z = \mu^n \det(\lambda I - AB).$$

因此 AB 和 BA 有相同的特征多项式. 所以它们的谱集是相同的:

$$\sigma(AB) = \sigma(BA).$$

再讨论特征向量. 设 $\lambda \in \sigma(AB), \lambda \neq 0$, 它的几何重数是 m, $\{\varphi^{(i)}\}_1^m$ 是它的 m 个线性无关特征向量. 由

$$AB\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \lambda\boldsymbol{\varphi}^{(i)}, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{1.1.4}$$

两端乘以 B, 记 $\boldsymbol{\psi}^{(i)} = B\boldsymbol{\varphi}^{(i)}, i = 1, \cdots, m$, 得到

$$BA\boldsymbol{\psi}^{(i)} = \lambda\boldsymbol{\psi}^{(i)}. \tag{1.1.5}$$

因 $\lambda \neq 0$, 由 (1.1.4) 可得

$$\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \frac{1}{\lambda}A\boldsymbol{\psi}^{(i)}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

由此, 从 $\{\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\}_1^m$ 的线性无关性可推得 $\{\boldsymbol{\psi}^{(i)}\}_1^m$ 的线性无关性. 由此可知 $\lambda \neq 0$ 作为 AB 和 BA 的特征值, 其几何重数也是一样的:

$$\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - AB)) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - BA)).$$

由此可知 AB 和 BA 的 Jordan 典则阵 $J(AB)$ 和 $J(BA)$ 的对应于 λ 的 Jordan 块的个数相同. 我们已证明了下述.

定理 1.1.3　设 A 和 B 是两个同阶方阵, 则 $\sigma(AB) = \sigma(BA)$, 且对任何 $\lambda \in \sigma(AB), \lambda \neq 0$, 成立

$$\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - AB)) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - BA)).$$

对 $\lambda = 0, \lambda \in \sigma(AB) = \sigma(BA)$, 上述关于核 (零) 空间的结论不一定成立. 然而, 若 A 和 B 是对称的, 则有更完满的结论.

引理 1.1.1　设 A 和 B 是两个同阶实对称阵, 则 $\sigma(AB) = \sigma(BA)$, 且对任何 $\lambda \in \sigma(AB)$ 成立

$$\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - AB)) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - BA)).$$

若对乘积矩阵再附加正半定性质, 则可得下述结果.

定理 1.1.4　设 A 和 B 对称, 且 A 或 B 对称正半定, 则 $\sigma(AB)$ 全为实数. 若 A 和 B 皆对称正半定, 则 AB 和 BA 是可对角化的.

证　先设 B 对称正定, 则对称正定阵 $B^{1/2}$ 存在, 故

$$AB = B^{-1/2}(B^{1/2}AB^{1/2})B^{1/2},$$

由此 $\sigma(AB) = \sigma(B^{1/2}AB^{1/2})$ 全为实数. 当 B 对称正半定时结论由特征值的连续性得到.

现在证明当 A 和 B 都是对称正半定时, AB 必可对角化. 用反证法. 若 AB 非可对角化, 则必存在 $\lambda \in \sigma(AB)$ 对应一个特征向量 $\boldsymbol{y}$ 和一个 2 级根向量 $\boldsymbol{x}$:

$$AB\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y} \quad 和 \quad AB\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}. \tag{1.1.6}$$

由此

$$\begin{aligned}\lambda \boldsymbol{x}^* B\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}^* BAB\boldsymbol{y} = (AB\boldsymbol{x})^* B\boldsymbol{y} = (\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^* B\boldsymbol{y} \\ &= \lambda \boldsymbol{x}^* B\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^* B\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

由上式立即得到

$$\boldsymbol{y}^* B\boldsymbol{y} = 0, \quad 即 \quad \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}B.$$

由 (1.1.6) 得到

$$\lambda = 0, \quad AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}(\neq \mathbf{0}), \tag{1.1.7}$$

由上式可推出

$$\boldsymbol{x}^* BAB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* B\boldsymbol{y} = 0,$$

即 $(B\boldsymbol{x})^* A(B\boldsymbol{x}) = 0$, 因 A 对称正半定, 故

$$B\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}A.$$

这样一来, 由 (1.1.7) 得到

$$\boldsymbol{y} = AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

这与 $\boldsymbol{y}$ 是特征向量矛盾. □

系 两个正交投影矩阵的乘积必可对角化.

§ 1.2 正定性和范数

1.2.1 正定和正半定矩阵

定义 1.2.1 设 $Q \subset R^n$ 是一个集合, 若 $A \in R^{n,n}$ 满足

$$(A\varphi, \varphi) > 0, \quad \forall \varphi \in Q, \quad \varphi \neq \mathbf{0},$$

则称矩阵 A 在集合 Q 上是正定的, 记作 $A \underset{Q}{>} 0$. 若

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in Q,$$

则称矩阵 A 在 Q 上正半定，记作 $A \underset{Q}{\geqslant} 0$.

定义 1.2.2　设 $A \in C^{n,n}$, 若

$$\mathrm{Re}\{(A\varphi, \varphi)\} > 0, \quad \forall \varphi \in C^n, \quad \varphi \neq \mathbf{0},$$

则称 A 是正定的，记作 $A > 0$. 若

$$\mathrm{Re}\{(A\varphi, \varphi)\} \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in C^n,$$

则称 A 是正半定的，记作 $A \geqslant 0$.

引理 1.2.1　Hermite(对称) 矩阵 A 是正定的充要条件是其所有主子式为正；或其全部特征值为正.

对任意矩阵 $A \in C^{n,n}$ 的特征值界限成立下述

引理 1.2.2(Bendixon)　将 A 分解为自共轭部分 H_1 和反自共轭部分 iH_2 之和：

$$A = H_1 + iH_2,$$

其中

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

都是 Hermite 阵，则

$$\lambda_{\min}(H_1) \leqslant \mathrm{Re}\lambda(A) \leqslant \lambda_{\max}(H_1),$$
$$\lambda_{\min}(H_2) \leqslant \mathrm{Im}\lambda(A) \leqslant \lambda_{\max}(H_2).$$

证　由 Hermite 矩阵的 Courant-Fisher(极大 – 极小) 定理可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\lambda(A) &\leqslant \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \mathrm{Re}\frac{\varphi^* A\varphi}{\varphi^*\varphi} = \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \frac{1}{\varphi^*\varphi}\cdot\frac{1}{2}(\varphi^* A\varphi + \varphi^* A^*\varphi) \\
&= \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \frac{\varphi^* H_1\varphi}{\varphi^*\varphi} = \lambda_{\max}(H_1). \\
\mathrm{Im}\lambda(A) &\leqslant \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \mathrm{Im}\frac{\varphi^* A\varphi}{\varphi^*\varphi} = \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \frac{1}{\varphi^*\varphi}\cdot\frac{1}{2i}(\varphi^* A\varphi - \varphi^* A^*\varphi) \\
&= \max_{\varphi\neq\mathbf{0}} \frac{\varphi^* H_2\varphi}{\varphi^*\varphi} = \lambda_{\max}(H_2).
\end{aligned}$$

这就证明了上界，下界可类似地证明.　□

引理 1.2.3　矩阵 $A \in R^{n,n}$ 正定 (正半定) 的充要条件是 $A + A^* > 0(A + A^* \geqslant 0)$.

证　由等式

$$(A\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}((A + A^*)\varphi, \varphi), \quad \forall \varphi \in R^n$$

就可证得. □

由引理 1.2.3 可知， A 的正定性 (正半定性) 可归结为对称阵 $A+A^*$ 的正定性 (正半定性). 由引理 1.2.2 可知，正定阵 A 的特征值全部在右半复平面.

引理 1.2.4　对 $A \in R^{n,n}$, 设 $A \geqslant 0, Q \subset R^n$ 且 $Q \perp \mathrm{Ker}(A+A^*)$, 则

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant \alpha(\varphi, \varphi), \quad \forall \varphi \in Q,$$

其中

$$\alpha = \min\left\{\lambda : \lambda \in \sigma\left(\frac{A+A^*}{2}\right), \quad \lambda \neq 0\right\},$$

从而 $A \underset{Q}{\gtrless} 0$.

证　$Q \subset (\mathrm{Ker}(A+A^*))^{\perp} = \mathrm{Im}(A+A^*)$, 所以 Q 属于 $A+A^*$ 的一个不变子空间. 由定理 1.1.2 $\mathrm{Im}(A+A^*)$ 由 $A+A^*$ 的对应于非零特征值的正交特征向量张成. 所以对 $\forall \varphi \in Q$ 有表达式

$$\varphi = \sum \alpha_i \boldsymbol{x}^{(i)},$$

而 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 满足

$$\frac{1}{2}(A+A^*)\boldsymbol{x}^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{x}^{(i)}, \quad \lambda_i \neq 0.$$

由此

$$(A\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}((A+A^*)\varphi, \varphi) = \sum \alpha_i^2 \lambda_i \geqslant \min_i \lambda_i (\varphi, \varphi).$$ □

下述结果是很有用的.

引理 1.2.5　设 $Q \subset R^n$ 是一个闭集，满足条件:

$$Q_1 \equiv \{\varphi : \varphi = \psi/\|\psi\|, \quad \forall \psi \in Q, \quad \psi \neq \mathbf{0}\} \subset Q,$$

且 $A \underset{Q}{\gtrless} 0$. 则存在正数 $\alpha > 0$ 使

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant \alpha(\varphi, \varphi), \quad \forall \varphi \in Q.$$

证　因 $A \underset{Q}{\gtrless} 0$, 而 Q_1 是一个有界闭集，故泛函

$$F(\varphi) \equiv \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \left(A\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) \equiv (A\psi, \psi), \quad \varphi \in Q, \quad \varphi \neq \mathbf{0}, \quad \psi \in Q_1$$

在 Q 上为正， $(A\psi, \psi)$ 的极小值在 Q_1 上达到. 令

$$\alpha = \min_{\psi \in Q_1} (A\psi, \psi).$$ □

1.2.2　有限维空间的范数

只在有限维空间上成立的关于范数的一个重要性质是下述

定理 1.2.1　若在有限维空间上引进两种范数：$||\cdot||^{(1)}$ 和 $||\cdot||^{(2)}$, 则存在正数 $\beta \geqslant \alpha > 0$ 使

$$\alpha||\varphi||^{(1)} \leqslant ||\varphi||^{(2)} \leqslant \beta||\varphi||^{(1)}.$$

定理 1.2.1 指出，有限维空间上的所有范数是等价的. 因此对这空间中的一个序列在一种范数下的收敛性可推出任何其他范数下的收敛性.

在范数的构造方式中，正定矩阵起着重要的作用. 设 $Q \subset R^n$ 是一个子空间，且 $A \underset{Q}{\gtrless} 0$, 则由引理 1.2.5 可知，由关系式

$$||\varphi||_{(A)} \equiv (A\varphi, \varphi)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in Q$$

定义了 Q 上的一种范数.

利用任一给定的 n 阶非奇矩阵 G 和 E_n 上的任一向量范数 $|||\cdot|||$, 我们可以定义 E_n 上的范数：

$$||\varphi||_G \equiv |||G\varphi|||, \quad \forall \varphi \in E_n.$$

引理 1.2.6　由向量范数 $|||\cdot|||_G$ 诱导的矩阵范数 $|||\cdot|||_G$ 是

$$|||A|||_G = |||GAG^{-1}|||,$$

上式右端的矩阵范数是由向量范数 $|||\cdot|||$ 诱导的.

证　由诱导范数的定义,

$$|||A|||_G = \sup_{\substack{\varphi \in E_n \\ \varphi \neq 0}} \frac{|||A\varphi|||_G}{|||\varphi|||_G} = \sup_{\substack{\varphi \in E_p \\ \varphi \neq 0}} \frac{|||GA\varphi|||}{|||G\varphi|||} = \sup_{\substack{\psi \in E_n \\ \psi \neq 0}} \frac{|||GAG^{-1}\psi|||}{|||\psi|||} = |||GAG^{-1}|||.$$

□

关于矩阵的任何一种范数和矩阵的谱半径，我们知道总成立

$$\rho(A) \leqslant ||A||.$$

进而我们有下列有用的结果.

定理 1.2.2　设 $A \in C^{n,n}$, 则对任何 $\varepsilon > 0$ 存在非奇阵 G, 使

$$||GAG^{-1}||_2 \equiv ||A||_G \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

证　令 S 是非奇阵，将 A 变换为 Jordan 典则形

$$S^{-1}AS = J,$$