高等学校研究生教材

Finite Element Method

薛守义 编著

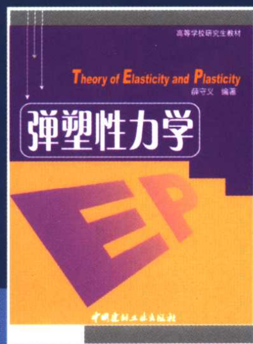
有限单元法

FEM

中国建材工业出版社

责任编辑　闫　兢
封面设计　嘉昱工作室

高 等 学 校 研 究 生 教 材



ISBN 7-80159-853-9
9 787801 598530 >
ISBN 7-80159-853-9/TU·462　定价：36.00 元

高等学校研究生教材

Finite Element Method

有限单元法

薛守义 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法 / 薛守义编著. —北京:中国建材工业出版社,2005.2

ISBN 7-80159-853-9

Ⅰ.有… Ⅱ.薛… Ⅲ.有限元法-研究生-教材
Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 016868 号

内 容 提 要

本书系统地阐述了有限单元法的基本概念、原理和方法,内容涉及结构有限元分析的各个领域,包括平面问题、空间问题、杆系结构、平板结构、壳体结构以及结构动力学问题、材料非线性问题、几何非线性问题、边界非线性问题。此外,还简要介绍了结构物中的热传导、流体与固体相互作用,以及在吸收有限元技术的基础上发展起来的边界单元法、有限条法、有限元线法、无网格法。

本书适宜用于工程力学、结构工程、机械工程、道路与桥梁工程、岩土工程等专业的研究生教材和继续学习的材料,也可作为其他相关专业科技人员的参考书。

有限单元法
薛守义 编著

出版发行:中国建材工业出版社
地 址:北京市西城区车公庄大街 6 号
邮 编:100044
经 销:全国各地新华书店
印 刷:北京鑫正大印刷有限公司
开 本:787mm×960mm 1/16
印 张:21.5
字 数:416 千字
版 次:2005 年 2 月第一版
印 次:2005 年 2 月第一次
定 价:36.00 元

网上书店: www. ecool100.com

前　言

有限单元法(Finite Element Method,简称FEM)起源于20世纪40年代至50年代发展起来的杆系结构矩阵位移法。1956年,Turner等人将这一思想加以推广,用来求解弹性力学平面问题。1960年,Clough把这种解决弹性力学问题的方法命名为“有限单元法”。此后,有限单元法获得迅速发展,逐渐趋于成熟,并以其理论基础坚实、通用性和实用性极强等突出优点,被公认为最有效的数值方法。目前,它已成为科学探索的有力工具;计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)的基本组成部分;而且被普遍列为工程力学、结构工程、机械工程、岩土工程等专业的研究生学位课程。

从学科发展上看,有限单元法在20世纪70年代初期,原理上已基本成熟,方法也逐步趋于完善。不过,到目前为止,在深化理论基础、构造优质单元、扩展应用范围、提高计算效率与精度等方面仍有发展的余地。特别是对于复杂系统行为的过程模拟或仿真计算,有限单元法仍面临巨大挑战,例如空间飞行系统响应的模拟、核反应堆在事故工况下响应的模拟、多场耦合作用分析等。在各种复杂问题中,有些实质性的东西(例如本构方程)并不属于有限单元法的范围,但其发展仍需有限元技术的提高与适时参与。

从应用技术上看,到目前为止,已开发出很多商业化的有限元分析软件。一般结构分析问题均可采取通用程序或专用程序求解,不必花费过多精力和时间另编计算程序。即使如此,为了合理地使用或开发通用程序、准备数据以及恰当地分析计算结果,必须对有限单元法的基本原理与方法有相当程度的理解,否则,现成的有限元程序就只能是一个黑箱,使用者将面临很多困难的选择而处于非常不利的地位。

从本质上讲,有限单元法是求解微分方程的一种近似方法,因此不仅能成功地处理结构分析中的各种复杂问题,而且还被有效地用于求解热传导、流体力学以及电磁场等领域的计算问题。本书以结构有限元分析为主,同时介绍与结构分析有关的热传导问题以及流体与固体相互作用问题。

编写本书的意图是全面而系统地阐述有限单元法的概念、原理和方法,目的在于使读者能够清晰地表达各种结构分析理论,深刻地理解有限单元法的数学

力学基础，正确地构造单元并建立有限元公式，比较全面地掌握各种单元的性能，从而能够有效地利用现有成果和程序进行结构分析，并为改进现有分析理论、方法和计算程序(例如将新型单元或材料模型接入通用程序)打下坚实的基础。

本书旨在为两方面的读者提供服务。其一是作为工程力学、结构工程、机械工程、道路与桥梁工程、岩土工程等专业的研究生教材；其二是作为科技人员和教师的参考书。作为硕士研究生教材时，建议授课内容(根据课时的多少)从前14章中选取，难度较大的第15章和第16章可作为研究生继续学习的内容。第17章简要介绍了在吸收有限元技术的基础上发展起来的边界单元法、有限条法、有限元线法、无网格法，它有助于读者纵向地了解各种方法的特点，以便必要时做出合适的选择。

本书编写过程中参考了大量文献资料，在此向他们表示衷心感谢。同时恳请读者对本书提出批评指正。

编　者

2004年10月

主 要 符 号

A	单元面积
A^e	平面问题或板弯曲问题中的单元面积域
$\boldsymbol{a}^e$	单元节点位移向量
$\boldsymbol{a}$	整体节点位移向量
$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_i$	单元应变矩阵及其子矩阵
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{b}i}$	板单元弯曲应变矩阵及其子矩阵
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{s}i}$	板单元剪切应变矩阵及其子矩阵
$\boldsymbol{C}$	阻尼矩阵或柔度矩阵
$\boldsymbol{D}$	弹性矩阵
E	弹性模量
$\boldsymbol{f}$	体力向量
G	剪切模量
$\boldsymbol{J}, J$	Jacobi 矩阵及其行列式
$\boldsymbol{K}^e, \boldsymbol{K}$	单元刚度矩阵,整体刚度矩阵
L_i	三角形单元的面积坐标
M	弯矩
$\boldsymbol{M}$	质量矩阵或薄板弯曲中力矩组成的广义应力向量
M_x, M_y, M_{xy}	板弯曲问题中垂直 x 轴和 y 轴的截面上单位长度的弯矩及扭矩
$\boldsymbol{N}, N_i$	单元形函数矩阵,节点 i 的形函数
$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}^e$	整体荷载向量,单元等效节点荷载向量
$\boldsymbol{p}$	面力向量
$\boldsymbol{T}$	转换矩阵
t	单元厚度
$\boldsymbol{u}$	单元位移向量
u, v, w	位移向量的分量,表示 x, y, z 方向的位移
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变向量
$\boldsymbol{\sigma}$	应力向量
$\boldsymbol{\phi}$	方向余弦矩阵

$\theta, \theta_{xi}, \theta_{yi}$	梁、板、壳法线转角
ξ, η, ζ	单元局部坐标或等参坐标
Π_c, Π_{mc}	余能泛函及修正余能泛函
Π_p, Π_{mp}	势能泛函及修正势能泛函
Ω, Γ	求解域及其边界

目　　录

第 1 章

有限单元法基本程式

有限单元法(Finite Element Method,简称 FEM)是一种求解微分方程的近似方法,起点自然是针对物理或工程问题建立起来的微分方程,包括控制方程和边界条件;而有限元分析程式早已标准化,典型步骤包括**结构或区域离散**、**单元分析**、**整体分析**和**数值求解**。

本章以弹性力学平面问题为例,阐述有限单元法的基本概念与程式。采用有限单元法求解平面问题不仅简单,而且具有典型性。掌握了平面问题的有限元分析方法,就可以很容易地推广到其他问题中去。

1.1 弹性力学平面问题

1.1.1 基本概念

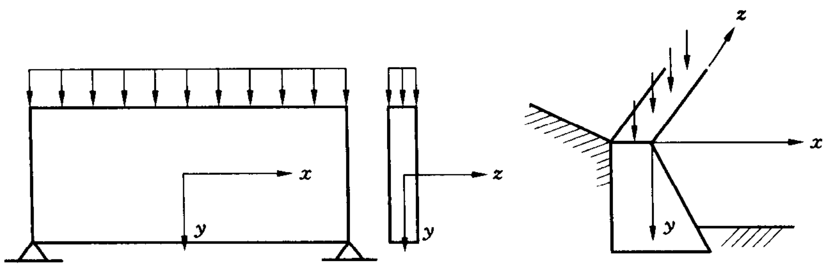
平面问题是指这样一些问题,其结构尺寸及荷载分布沿某个方向(通常取为 z 轴)不变,且具有特殊的边界条件。这样,结构内部的应力和应变就与 z 坐标无关,而只是 x,y 坐标的函数。平面问题分为两种,即平面应力问题和平面应变问题。

(1)平面应力问题

如果在结构内部只存在 xy 平面内的三个应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$,而另外三个应力分量 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$,则称为**平面应力问题**。例如,只承受纵向面内荷载的薄板就可近似地视为这种问题(图 1.1a):由于板很薄,故可认为应力和应变与 z 坐标无关。再注意到平板两面上的 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$,便可近似地认为这些应力分量在板内也为零。对于各向同性线性弹性介质,根据广义 Hooke 定律,平面应力问题中的 γ_{zx}和 γ_{zy}显然为零,而 ε_z 由下式确定

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{1.1}$$

其中,E 为弹性模量;ν 为泊松比。



(a) 平面应力　　(b) 平面应变

图 1.1　平面问题

(2)平面应变问题

如果在结构内部只存在 xy 平面内的三个应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$，而另外三个应变分量 $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$，则称为**平面应变问题**。很多结构分析问题都可简化为平面应变问题，例如水坝、挡土墙、边坡、厚壁圆筒、隧道等。对于各向同性线性弹性介质，根据广义 Hooke 定律，平面应变问题中的 τ_{zx} 和 τ_{zy} 显然也为零，而 σ_z 由下式确定

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{1.2}$$

在平面问题(无论平面应力还是平面应变)中，非零或独立的应力和应变只有三个，即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$，其向量式分别为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

非零或独立的位移分量有两个，即沿坐标轴 x, y 方向的位移 u, v，记为

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [u \quad v]^{\mathrm{T}}$$

1.1.2　控制方程

(1)平衡方程

平衡微分方程简称平衡方程，它所描述的是物体或结构内部应力与外部体积力之间的关系。在平面问题中，平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中 X, Y 分别为体力沿 x, y 方向的分量。$\boldsymbol{f}$ 为体力向量,即

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [X \quad Y]^{\mathrm{T}}$$

(2)几何方程

几何方程表达应变分量与位移分量之间的关系。平面问题几何方程的表达式为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

(3)本构方程

材料的本构方程表达应力与应变之间的关系。对于各向同性线性弹性介质,有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} \tag{1.5}$$

根据广义 Hooke 定律,不难得到平面问题的弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$。例如,对于平面应力问题

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

对于平面应变问题,只要把上述各式中的 E 换成 $E/(1-\nu^2)$,把 ν 换成 $\nu/(1-\nu)$ 即可。

1.1.3 边界条件

边界条件是指**求解域** Ω 的**边界** Γ 上所受到的外加约束或作用。通常 Γ 可以分为两个部分,即**面力边界** Γ_σ 和**位移边界** Γ_u;在 Γ_σ 上给定面力,在 Γ_u 上给定位移。有时在同一边界上,同时给定一部分面力和一部分位移,这种边界称为**混合边界**。

(1)应力边界条件

在 Γ_σ 附近取微元体,面力与应力之间的平衡条件就是应力边界条件。在平面问题中,有

$$\left.\begin{aligned}l\sigma_x + m\tau_{yx} &= \bar{X}\\ l\tau_{xy} + m\sigma_y &= \bar{Y}\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

其中，$\bar{X}$，$\bar{Y}$ 为已知的边界面力沿 x，y 方向的分量，面力向量 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 记为

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \begin{Bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\end{Bmatrix} = [\bar{X} \quad \bar{Y}]^{\mathrm{T}}$$

l，m 为边界外法线 N 的方向余弦，$l = n_x = \cos(N, x)$，$m = n_y = \cos(N, y)$。

(2)位移边界条件

位移边界条件是指结构在位移边界 Γ_u 上所受到的约束。在平面问题中，可表示为

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v} \tag{1.8}$$

其中，$\bar{u}$，$\bar{v}$ 为已知的边界位移分量。

1.1.4 问题解法

(1)解析方法

求解上述问题可以采用**解析方法**，即在给出的边界条件下直接求解控制微分方程，得出解析函数形式的解答。在具体求解时，可选择某些未知量作为基本未知量，从而简化控制方程组。根据基本未知量的选取，可将求解方法分为**位移法**、**应力法**和**混合法**，它们分别以位移分量、应力分量、一部分位移分量和一部分应力分量为基本未知量。

(2)近似方法

对于很多实际问题，要获得解析解是不可能的。为了克服数学上的困难，学者们提出了多种近似求解方法，例如有限差分法、变分法、有限单元法等，其中**有限单元法**以其理论基础坚实、实用性极强等突出优点而被公认为最有效的数值方法。

在有限单元法中，位移法应用最为广泛，其基本思想可简述如下：将结构离散成有限个单元，每个单元设定若干个节点；选取节点位移作为基本未知量，并在每个单元区域内选用某种插值函数以近似地表示单元内位移的分布；利用某种原理(例如虚位移原理)建立求解基本未知量的方程组。

1.2 结构离散

结构有限元分析的第一步是将结构离散化，即用假想的线或面将连续体分割成数目有限的单元，并在其上设定有限个节点；用这些单元组成的单元集合体

代替原来的连续体,而场函数的节点值将成为问题的基本未知量。在位移法中,位移是场变量,节点位移为基本未知量。

对于平面问题,可采用**3 节点三角形单元**(T_3)离散结构,这些单元通过节点互相连接(图 1.2)。

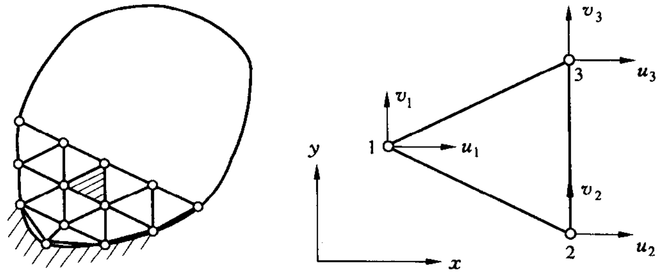


图 1.2 结构离散化

结构离散后,要对所有节点和单元从 1 开始按序进行编号。T_3 单元的节点局部码为 1,2,3,单元节点位移向量表示为

$$\boldsymbol{a}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{a}_3\end{Bmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_i=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\end{Bmatrix}\qquad (i=1,2,3)$$

1.3 单元分析

在结构有限元中,单元分析的基本任务是建立单元节点力与节点位移之间的关系即单元刚度方程,从而确定单元刚度矩阵。此外,还须将外部荷载转化为单元等效节点荷载。

1.3.1 位移函数

给每个单元选择合适的**位移函数**或称**位移模式**来近似地表示单元内位移分布规律,即**通过插值以单元节点位移表示单元内任意点的位移**。因节点位移个数是有限的,故无限自由度问题被转变成了有限自由度问题。

在有限单元法中,普遍地选择多项式作为位移函数,其原因是多项式的数学运算比较简单;其理论根据则在于精确解总是能够在任一点的邻域内由多项式逼近。

既然单元内任意点的位移由单元节点位移参数完全确定,因此选择单元位移函数的一个基本原则就是,位移函数中的待定常数(也称为**广义坐标**)与单元