高等学校教学用書

电子計算机及其在測量計算中的应用

鄒海明　李鳴山
华彬文　甘伯祥　編著

中国工业出版社

高等学校教学用書

电子計算机及其在測量計算中的应用

鄒海明、李鳴山、华彬文、甘伯祥 編著

本書內容可分为三部份：第一部份介紹电子数字計算机的基本構造和工作原理。第二部份介紹了“烏拉尔”、M-3和БЭСМ等三架电子数字計算机的技术数据和它們的指令系統，并詳細叙述了初等程序設計的方法，其中着重講解了程序設計的“算子法”。第三部份提供了应用电子計算机解算大地測量和航空攝影測量中一些問題的程序实例。

本書可作为天文大地測量、航空攝影測量和工程測量等專業“电子計算机在測量計算中的应用”課程的教学用書。也可作为測繪工作者和其他科学技术工作者学習电子計算机及其程序設計时的参考書。

电子計算机及其在測量計算中的应用

郁海明、李鳴山、华彬文、甘伯群 編著

*

中国工業出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市書刊出版事業許可証出字第110号）

北京市印刷一厂印刷

新华書店科技發行所發行·各地新华書店經售

*

开本 787×1092 1/16·印張 $10\frac{3}{8}$·字数 245,000

1961年8月北京第一版·1961年8月北京第一次印刷

印数 0001—2,533·定价(10-6) 1.25元

統一書号：15165·269（測繪-4）

序

本書是根据編者在武汉測繪学院天文大地測量、航空攝影測量和工程測量等專業講授同名課程时的講义修改补充而成的。

本書內容，按其性質，可以划分为三大部分：第一部份（第二、三章）叙述电子数字計算机的基本工作原理。考虑到本書的目的是着重講解电子計算机的应用，因此这一部份的要求是以較少的篇幅，講清楚电子計算机的構造、各元件和各部件的工作原理等，使讀者对电子計算机获得初步的了解。

第二部份（包括第四至第十一章）是本書的重点，講解初等程序設計。为了使讀者在学完程序設計后，能直接为計算机編制程序，我們介紹了三架具有一定代表性的电子計算机，即烏拉尔机、M-3 机和 БЭСМ 机。全部程序的实例，都是根据这三架机器的指令系統編制的。在程序設計的方法方面，着重講解了“算子法”，因为它是当前公認的改进初等程序設計的最有效方法之一。

第三部份（包括第十二、十三、十四章），給出了在大地測量和航空攝影測量的內業工作中一些应用电子計算机的例子。

本書是在武汉測繪学院党委和院領导的鼓励和領导下編写的。在編写过程中，学院的天文大地測量系和航空攝影測量系为本書提供了一部份資料，对此，編者表示衷心的感謝。

参加編写工作的有邹海明、李鳴山、华彬文和甘伯祥等同志。由于編者水平有限，編写时間匆促，書中的錯誤和缺点在所难免，希望讀者予以指正。

編　者

1961 年 4 月

目　录

第一章 概 論

§ 1-1 計算机的作用及分类

随着社会生产力的不断提高，科学技术领域中大型复杂的計算工作也就日益增加，这就促使現代計算技术迅速向新的方向發展，現代快速电子計算机就是在这种情况下产生的。

計算机基本上可分成兩大类：一类是**模拟計算机**，或称**連續式計算机**。另一类是数字計算机，或称**不連續式計算机**。

模拟計算机并不直接对数字进行运算，而是对数学問題找出它的模拟系統，用長度、角度、电压、电流等物理量的大小来代替数量的大小，得到数学式子的模拟方程，然后对模拟方程式进行运算，以获得由相当的物理量表示的結果。大家所熟悉的計算尺，就是一种簡單的模拟式計算工具（它是通过对長度运算来完成数值的乘、除等运算的）。又如圖1-1 的电阻电桥，也能用来作为演算乘法

$$Z=x\times y \tag{1-1}$$

的电模型。因为当电桥平衡时，

$$R\times R_Z=R_x\times R_y. \tag{1-2}$$

如果把該电桥的四臂規定如下：R 为阻值不变的固定电阻，R_x、R_y 的电阻值分别相当于被乘数 x 和乘数 y 的值。于是 R_Z 的电阻值就相当于 x、y 兩数相乘的結果。

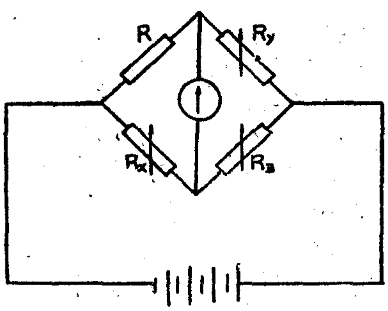

圖 1-1

模拟电子計算机是应用电阻、电容、电子管以及旋轉电机等構成的模拟式計算裝置，以电压作为模拟变数。

数字計算机的計算方法及原理与模拟計算机截然不同，它是对数字本身直接进行运算的。例如算盤就是一种簡單的数字式計算工具。它是用算盤珠代表数字，对算盤珠进行运算就是对数字进行运算。在台式計算机中，用齿輪的一个个齿代表数字。在电子数字計算机中，常常用电脉冲和不同的电位等稳定的物理狀态来代表数字。

电子数字計算机就其应用范圍来講，可分为**通用机**和**專用机**。通用机可解一般的計算問題和邏輯問題。專用机則对于解算某些方面的問題特别方便。

电子数字計算机就其使用目的来講，可分为**計算机**和**控制机**。控制机用于自动控制系統中，成为自动控制系統中的一个主要部分。控制机一般为專用机。

电子計算机❶ 的应用范圍極广，現在很难断言某个部門是完全与电子計算机無关的。根据电子計算机运用性質的不同，大致可將它的用途分为三个方面：(1)在数值計算上的应用；(2)在自动控制中的应用；(3)在信息加工中的应用。我們將它分述于下。

❶ 本書今后凡提到电子計算机，計算机或机器时，都是指电子数字計算机。

(1) 电子計算机在数值計算上的应用　电子計算机可以完成大量和复杂的計算，一个每秒完成1万次运算的电子計算机，如果工作24小时，它完成的运算次数为：

$$10,000\times24\times60\times60\approx10^9.$$

然而，一个有經驗的計算員，一个工作日（8小时）只能完成1000到2000次运算。由此可見，一个每秒完成1万次运算的机器工作24小时的运算量，相当于50～100万个計算員一个工作日的运算量。

許多学科，过去由于受到計算工具的限制，它們的發展受到了阻碍。例如在气象学中，采用数值預报法預报24小时后的天气，需要若干計算員用台式机工作若干个星期。采用这种預报方法当然是毫無意义的，因为那时早已失去时效了。但如果采用电子計算机計算，則只要一个多小时，就能获得令人滿意的結果。

又如大型水坝的应力分析，需要解数百个未知数的綫性方程組，由于計算工作复杂，过去常常采用消耗大量資金的实驗方法进行分析，現在有了电子計算机，就可以用精确的計算代替实驗了。这类例子是举不胜举的。

苏联在征服宇宙空間方面不断取得了震动全世界的輝煌成就，成功地發射了人造地球卫星和卫星式宇宙飞船，用宇宙火箭射中了月球，最近更發射成功了載人的宇宙飞船，开辟了人类征服宇宙空間的新紀元。在这一系列偉大的胜利中，电子計算机都起了十分重要的作用。火箭、卫星、飞船的研究設計、發射入軌道、跟踪观察、整理所获数据資料等一系列工作，都要用电子計算机。以宇宙火箭軌道計算为例，需要考虑到地球、月球和太陽的引力以及它們的相对位置和相对运动，这样，計算公式將極其复杂。同时軌道的計算，必須非常迅速才有意义，因为大家知道，火箭的飞行速度是十分惊人的。然而現代計算机的速度仍然走在火箭的前面：电子計算机在一个半小时內算出的一段火箭运行軌道，宇宙火箭需要几十个小时方能飞完这段軌道。电子計算机的运算不但高度快速，并且高度精确，宇宙火箭之所以能命中月球，就是依靠計算的高度精确性。

(2) 电子計算机在自动控制中的应用　电子計算机可用于生产过程的自动控制。它的控制方式是：計算机接受被控制过程和影响这过程的外界因素的有关信息，經过計算，确定生产过程怎样才能处于最优狀态，应校正那些参数，然后对控制裝置發出相应的指令。現在，电子計算机已应用于控制化学反应过程、鋼鉄冶煉过程等等生产系統中。

此外，計算机也可控制高速运动的物体，其方式是：机器不断从許多仪表上获得与被控制对象运行情况有关的各种数据，例如速度、通过的路程、風速、气压、航向等运行情况的参数，迅速地解算被控制物体的运动方程式，确定出最佳运行的参数校正值，然后向控制裝置發出相应的調整指令。現在，电子計算机已能用于控制火車、飞机以及火箭等的运行。

(3) 电子計算机在信息加工中的应用　电子計算机也用以进行文字的自动翻譯，文献情报的加工处理如查詢資料、編制索引、編写文摘等等。这是电子計算机具有邏輯运算等功能的結果。

电子計算机进行文字翻譯的过程是这样的：首先將具有一定数量詞彙的字典和重要的語法規則，变成机器能接受、記忆和运算的符号——数碼，然后將預定的翻譯工作步驟及需要翻譯的資料送入机器，于是計算机就按翻譯工作步驟自动地工作，即进行單字的比較（相当于查字典），將查好的單字根据語法規則組織起来，这样逐句进行翻譯。

在测量内業中有某些大量的計算工作，为了完成这些工作，需要一支龐大的計算队伍，因此，將电子計算机用于测量計算中，具有重大的意义。

在测量計算中运用电子計算机，能够节省大批人力，使生产进度加快，并且能提高計算精度。例如在二等三角網平差計算中，若以計算一点需5.5工天估計，則对于120个未知点的二等網，分四組同时进行解算，每天工作8小时，需要解算144天。如果把同一个問題交給电子計算机 БЭСМ 計算，那末它只需要90分鐘（不包括某些准备工作在內）。又如苏联在將电子計算机应用于空中三角测量中确定"航空像片的相对定向元素"❶的研究材料表明，即使是一架小型的"烏拉尔"电子計算机，它全年的工作效果，可以代替10架精密立体测圖仪和26个計算員。如果大量縮減某些准备工作时間和采用更高速的电子計算机，效果將更加提高。此外，用人工对二等三角網进行平差計算时，必須分区解算，但如果利用电子計算机平差，就不必再分区計算了，因而也就提高了平差工作的質量。

由此可見，与其他部門一样，在測繪科学事業中运用电子計算机，將使劳动生产率显著地增長。

§ 1-2　电子計算机的基本工作原理

任何一个通用的电子計算机都由四个基本部分組成：

(1) 对代碼进行运算的**运算器**。

(2) 存儲代碼的**存儲器**。

(3) 控制机器自动工作的**控制器**。

(4) 机器的附屬設备，包括：輸入和輸出代碼的装置，称为**輸入器**和**輸出器**；以及中

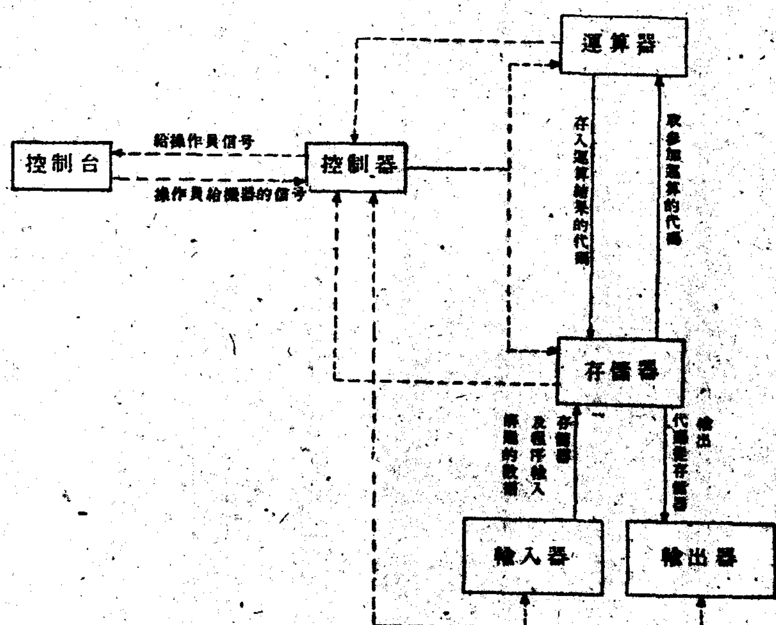

圖 1-2

❶ 参考苏联杂誌"測量与制圖"(Геодезия и картография)1958年第11期。

間存儲器（或称**外存儲器**）。这些部件統称为机器的**外部設备**。

此外，机器还有一个**控制台**，操作人員是在控制台上进行操作的。控制台上有很多按鈕、开关以及氖灯。工作人員通过控制台給予机器必要的信息，同时从控制台上的氖灯指示，了解机器工作的情况。

除以上各部份以外，电子計算机还需要特殊的**电源設备**，以获得所需要的各种电压和必要的功率，因而电源設备也就成为电子計算机的組成部分之一。

圖1-2是机器的結構框圖，圖中虛綫部份表示控制器与各部份的联系（控制联系），箭头方向代表作用方向。实綫則表示其它部件之間的联系。

对于自动完成計算的电子計算机而言，进行运算的数据以及計算过程中获得的中間結果，均需加以記录。在人工計算时是將数据記录在紙上，而在自动完成計算的电子計算机中，則由存儲器来完成此項工作，所以存儲器实际上是起着記忆的作用，有时称它为記忆裝置。可以設想，存儲器是由許多編了号碼的小格子組成的，这些小格子称为**存儲单元**。一般每一个單元存放一个数，存儲單元的号碼称为**地址**。欲取兩数进行运算时，只需指出該兩数所在的地址、进行何种操作以及結果送往那里，計算机就能自动完成这項运算。給机器的这种指示叫**指令**。例如下面形式的指令

+	5	8	7

即表示取存儲器中第5号和第8号兩單元中的数相加，其結果須送入第7号單元。指令中指示操作性質的部份，叫做**操作碼**，通常以θ表示，如上述中的"+"号就是操作碼。指令中指示参加运算的数或存放运算結果的存儲單元号碼的部份，叫做**地址碼**，根据其先后次序，分別叫作第一、第二及第三地址，通常以A_1、A_2、A_3表示。于是上述指令可用一般形式表示如下：

θ	A_1	A_2	A_3

它表示取A_1与A_2單元內的数，完成θ运算。將結果存放在A_3單元內。

事实上，机器中指令的操作碼及地址碼都以数碼表示，如以001代表加法，則指令

001	0005	0008	0007

就表示0005号單元里的数加0008号單元里的数，結果存放在0007号單元里。

每一架計算机都有它自己的一套**指令系統**。其指令形式可能只包含一个地址，即

θ	A_1

这种只包含一个地址的指令称为**一地址指令**●，这一类計算机称为**一地址机**。也有的計算机其指令包含兩个地址，这种机器称为**二地址机**●，二地址指令的形式是：

θ	A_1	A_2

我們最先講的那种指令中包含三个地址的机器，称为**三地址机**。不論上述那一类机器，指

● 一地址指令及二地址指令將在第四、第五章解釋。

令中地址 A_i 必須能表达該机器存儲單元的任一編号。

指令本身也是存放在存儲器里的，我們往往以某指令所在單元的号碼来标誌这条指令，因此指令中的地址碼不仅可以表示保存数的單元号碼，也可以表示保存指令的單元号碼。

用电子計算机解决一个算題表現为順次执行一系列指令。这一系列指令叫作算題的程序。程序是根据該算題的解法及某一机器的指令系統而事先編好的。程序和数据經过輸入器送入机器的存儲器，此后計算机就能按程序自动地完成确定的計算任务。例如計算

$$y=ax+b,$$

其中 x 已知，欲求 y。若 a、x、b 分别存放在以下單元：

a—0001

b—0002

x—0003；

求得的結果 y 規定存入 0004 單元，0008 可以用来存放計算的中間結果。对某架三地址机器而言，为实現这样一个計算，需用以下几条指令：

指令	說明
×0001　0003　0008	0001 內的数（即 a）乘 0003 內的数（即 x），乘积 ax 放入 0008 內。
+0008　0002　0004	0008 內的数（ax）加 0002 內的数 b，和数（$ax+b$）放入 0004 內。

若以代碼 003 表示乘法，001 表示加法，則上述指令表示为：

003	0001	0003	0008
001	0008	0002	0004

应該特别强調的是，在指令中地址号碼 0001，0003 等，只是表示存放参加乘法操作的乘数和被乘数的單元号碼，幷不是 0001，0003 本身参加运算。

由此可見，只要順序执行这兩条指令，就可以求得 y 值；这兩条指令就組成了解算 y 值的程序。这是一个極其簡單的示例。

在通常情况下，这兩条指令也分别放在兩个存儲單元中，如第一条指令存入 0005 單元，第二条存入 0006 單元，此时我們就可以用 0005 标誌第一条指令，用 0006 标誌第二条指令。通常机器是通过順序执行存放于存儲器內的各条指令来完成算題任务的。

§ 1-3　計算机的发展过程

我国劳动人民自古以来，在計算技术方面，就有着很多的創造發明，例如远在周秦时代就运用"算筹"（算子）来进行加、減、乘、除的演算，后来唐宋兩代的数学家总結了过去的經驗，使乘除法得到了簡化，出現了一种比"算筹"更灵活更方便的"算珠"（算盤），幷且有一套完整的口訣（加、減、乘、除、斤兩互算等等）。算珠成为世界上最早的計算工具。这是我們的祖先在計算技术領域內的輝煌成就和貢献。

生产力每向前發展一步，对計算工具和計算技术的要求也就提高一步，計算技术就是这样在生产实踐的直接推动下發展起来的。在今天，生产实踐的需要更是强有力地推动着电子計算机往新的方向發展。

世界上用机械装置来構造計算机开始于1640年，当时法国帕斯卡尔（B. Pascal）制造了一架能作加减法的机器，用来計算法国的税收。

随帕斯卡尔之后，德国莱布尼兹(G. W. F. Leibnitz)于1671年制造了一架用計算輪的机器，它不仅能作加、减法，还能作乘法和除法运算。随着工程技术的提高和齿輪的出現，促使計算机大大地向前發展。1822年英国巴貝治（C. Babbage）設計了一架差分机，瑞典的舒兹（Scheutz）按照巴貝治的設計完成了这架机器，并且效果很好。

1833年，巴貝治已經有了近代电子計算机的某些概念，不过由于他企圖用机械方法加以实现而沒有成功。

俄国学者对計算技术有着巨大的貢献。早在1874年彼得堡工程师欧德訥（Однер）就發明了欧德訥輪，奠定了台式計算机的基础。1878年切伯雪夫（П. П. Чебышев）院士發明了手摇計算机，它是現代台式計算机的原型。杰出的近似計算学者克雷洛夫(А. Н. Крылов)院士就是微分方程分析机的創始人。

1944年，美国貝尔电話公司利用繼电器作出了一架計算机，由于应用繼电器代替了机械，使得运算速度有了很大的提高。

1946年，美国制造了“ENIAC”計算机。这架計算机用了18000个真空管，消耗100瓩的电力，同时体积也相当大，拿現代的标准来衡量，当然是既浪費又不完善。但由于在这架机器內第一次采用了真空管，因此計算速度比机械的計算机有着惊人的提高。从此，开辟了用电子裝置来制造計算机的道路。

1952年左右，美国又制造了“EDVAC”計算机，用了3500个真空管，比起“ENIAC”来說要进步得多了。此后电子計算机进入了蓬勃發展和大量生产的阶段。美国的壟断資本为了霸占市場，攫取高額利潤，建立了电子計算机制造工業，壟断了电子計算机的生产。

苏联对于电子計算机給予了特殊的注意。1953年，苏联制成了当时欧洲第一流的БЭСМ快速电子計算机，运算速度达到每秒鐘8000次。此外苏联还制造了М-3、М-2、烏拉尔(Урал)、箭牌（Стрела）等机器，而且迅速地建立了計算机制造工業。目前苏联已成批生产每秒5千到1万次的快速电子計算机了。

帝国主义国家，由于它的侵略本質，將电子計算机用于战争准备中。例如用来帮助制訂战争計划；用于研究和生产大规模杀人武器等。在社会主义国家，电子計算机为和平事業服务。在苏联，电子計算机被广泛地应用于国民經济各部門和用于对宇宙空間的探索与研究。

用电子計算机代替人工計算和控制生产过程自动化的結果，在帝国主义国家里，招致了工人和职員的失業；而在社会主义国家里，这意味着大大减輕工人和职員的劳动强度和进一步縮短工作时間。

由此可見，电子計算技术这門新兴的技术科学，也像原子物理和火箭技术等科学技术一样，它的發展和应用，在帝国主义国家里，給劳动人民帶来巨大的痛苦和灾难；而在社会主义国家里，給劳动人民帶来和平和幸福。

第二章 运 算 基 础

§ 2-1 計 数 系 統

我們經常以十个数字，即0、1、2、3、4、5、6、7、8、9等的組合来表示一个数，这称为**十进位計数制**。这种計数制是以"十"为基数的。

对于任意一个十进位数，如995.6，我們可以写成

$$995.6=9\times10^2+9\times10^1+5\times10^0+6\times10^{-1}.$$

在十进位計数制中"10"代表"十"。在一个数中，各数字根据它所在的不同位置而有不同的意义，如最左的9字代表九百，左起第二个9字代表九十。若以数学式子来表示某数x，則一般形式为：

$$x=\sum_{i=-l}^{n}a_i10^i, \qquad (2-1)$$

式中l和n皆为正整数，l为小数点后数的位数，n为数的整数位减一。如上例的995.6，用(2-1)式表达时則l为1，n为2，a_i为数碼0、1，2，……，9中的一个。

十进位計数制并不是唯一的計数系統。如果我們取"八"作为基数，就可获得**八进位計数制**，此时可用0、1、2、3、4、5、6、7等八个数字的組合来表示一个数。对于某数x，同样可以用(2-1)式表示。例如八进位数567.4可写成：

$$567.4=5\times10^2+6\times10^1+7\times10^0+4\times10^{-1}。$$

要注意的是这里的"10"已不代表"十"而是代表"八"。(2-1)式中l、n、a的含义与上面相同，但a只能是0，1，2，……，7等，不能再出現8和9。

我們取"二"为基数，就可以获得**二进位計数制**，此时数字只有0与1。在二进位計数制中，我們也可以用(2-1)式来表示一个数，只是式中"10"代表"二"，而a只能是0或1。

以二进位数表示零至拾伍有以下形式：

零—0	捌—1000
壹—1	玖—1001
貳—10	拾—1010
叁—11	拾壹—1011
肆—100	拾貳—1100
伍—101	拾叁—1101
陆—110	拾肆—1110
柒—111	拾伍—1111

要表示大于拾伍的数可类推，其推算原則就是凡出現2的位就有进位，而这一位应写0。

由以上所述可知，我們可以按照需要，任意地选擇不同的計数系統。在計算中除采用上面介紹的几种进位制外，还采用**十六进位計数制**。十六进位制由于取"十六"为基数，因此需有十六个不同的数字。0至9十个数字显然已經不够用了，因而必須增添一部分新的

数字。对于十六进位制的十六个不同的数字，我們常用下列方法表示：

0—零	8—捌
1—壹	9—玖
2—貳	$\bar{0}$—拾
3—叁	$\bar{1}$—拾壹
4—肆	$\bar{2}$—拾貳
5—伍	$\bar{3}$—拾叁
6—陆	$\bar{4}$—拾肆
7—柒	$\bar{5}$—拾伍

数一百九十五在上述几种进位制中分别表示成以下形式：

十进位制 $195=1\times10^2+9\times10^1+5\times10^0$；

八进位制 $303=3\times10^2+0\times10^1+3\times10^0$；

二进位制 $1100\ 0011=1\times10^{111}+1\times10^{110}+0\times10^{101}+0\times10^{11}+0\times10^{10}+1\times10^1+1\times10^0$；

十六进位制 $\bar{2}3=\bar{2}\times10^1+3\times10^0$。

由此可見，同一个数，在不同进位制中具有不同的表示形式。

各种进位制之間存在着一定的关系，可以互相轉換。

由于"八"是"二"的整数次方(三次方)，因而八进位数与二进位数的轉換很簡單。一位八进位数可以直接轉換成三位二进位数，三位二进位数也可写成一位八进位数。如八进位数 56 在二进位制中写成 101110，实际上是把 5 写成 101 而把 6 写成 110。將二进位数轉換成八进位数时，对于整数部分，只要从最低位往左每三位合成一位；对小数部分則由左往右每三位合併写成一位。例如 1101 11.011 写成八进位数应該是 67.3。若遇到某数的整数位数或小数位数不为三的倍数，此时在整数部分应在最高位补上若干个零，对小数部分則往后补零。总之，必須記得，一定要三位二进位数合成一位八进位数。十六进位数与二进位数之間的换算方法，与上述情况相似，只是由于"十六"为"二"的四次方，故四位二进位数合成一位十六进位数。

当用 (2-1) 式表达某一数时，若基数不以"10"表示，而用十进位数表示，同样 i 也用十进位数表示，就能將任意一种进位制的数轉换成十进位数。例如八进位数 303 可写成：

$$(303)_8=3\times8^2+0\times8^1+3\times8^0=192+0+3=(195)_{10}$$

十六进位数 $\bar{2}3$ 可写成：

$$(\bar{2}3)_{16}=\bar{2}\times16^1+3\times16^0=192+3=(195)_{10}$$

二进位数 11000011 可写成：

$$(11000011)_2=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^1+1\times2^0=(195)_{10}。$$

將十进位数轉換成二进位数，可以采用不同的方法，在此介紹其中的一个方法。若轉換的数为整数，重复地用 2 除，余数为 1，則相当的位上为 1，直到所得的商数为零时止。例如 $(243)_{10}$ 用这个方法轉換为二进位数的过程如下：

2|243	第一次余数：1
2|121	第二次余数：1
2|60	第三次余数：0
2|30	第四次余数：0

2 | 15	第五次余数：1
2 | 7	第六次余数：1
2 | 3	第七次余数：1
2 | 1	第八次余数：1

最后得的商数为零时的那个余数就相当于二进位数的最高位，倒数的第二个余数，相当于二进位数的第二位，依此类推得到 (243_{10}) 的相当二进位数为 11110011。

現在来証明上述换算的正确性：設已知 $x_{(10)}$ 是一个大于 1 的十进位整数，求 $x_{(2)}$。由于 $|x_{(10)}|>1$，故可以表示成下式：

$$\begin{aligned}x_{(10)}=x_{(2)}&=\beta_0 2^0+\beta_1 2^1+\beta_2 2^2+\cdots+\beta_n 2^n\\&=\beta_0+(\beta_1+\beta_2 2^1+\cdots+\beta_n 2^{n-1})2\\&=\beta_0+(\beta_1+(\beta_2+\beta_3 2^1+\cdots+\beta_n 2^{n-2})2)2\\&=\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

故 β_0 为 $x_{(10)}$ 用 2 第一次整除后的余数，β_1 为 $x_{(10)}$ 用 2 第二次整除后的余数，依此类推，而二进位数的最高位数 β_n 則为用 2 整除得商为 0 时的余数。

如果换算的数为絕对值小于 1 的小数，則小数部分重复地用 2 乘，若乘积的整数位为 1，則相当的二进位上亦为 1。例如 $(0.413)_{10}$ 轉换成二进位数的过程如下：

	0.413
	× 2
第一次乘 2 后的整数位：0	0.826
	× 2
第二次乘 2 后的整数位：1	1.652
	× 2
第三次乘 2 后的整数位：1	1.304
	× 2
第四次乘 2 后的整数位：0	0.608
	× 2
第五次乘 2 后的整数位：1	1.216
	× 2
第六次乘 2 后的整数位：0	0.432
	× 2
第七次乘 2 后的整数位：0	0.864
	× 2
第八次乘 2 后的整数位：1	1.728
	× 2
第九次乘 2 后的整数位：1	1.456
	× 2
第十次乘 2 后的整数位：0	0.912
	⋮

第一次乘 2 后的整数位相当于轉换为二进位数后从最高位起的第一位，第二次乘 2 后的整数位相当于二进位数的第二位，依此类推，于是得 $(0.413)_{10}$ 的相当二进位数是 0.0110100110……。可見 $(0.413)_{10}$ 化为二进位数时，是一个不尽小数。

現在来証明这种换算方法的正确性。設已知十进位的一个小数 $x_{(10)}$，求 $x_{(2)}$。

由于$|x_{(10)}|<1$，故可表示成下式：

$$\begin{aligned}x_{(10)}=x_{(2)}&=\beta_1 2^{-1}+\beta_2 2^{-2}+\beta_3 2^{-3}+\cdots+\beta_n 2^{-n}+\cdots\\&=(\beta_1+\beta_2 2^{-1}+\beta_3 2^{-2}+\cdots+\beta_n 2^{-n+1}+\cdots)\ 2^{-1}\\&=(\beta_1+(\beta_2+\beta_3 2^{-1}+\cdots+\beta_n 2^{-n+2}+\cdots)2^{-1})2^{-1}\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

故 β_1 为 $x_{(10)}$ 第一次用2乘后整数位的值，β_2 为 $x_{(10)}$ 第二次用2乘后整数位的值，依此类推，β_n 为 $x_{(10)}$ 第 n 次用2乘之后，整数位的值。

如果一个十进位数既有整数部分，又有小数部分，則須分别轉換为二进位数。

十进位轉換为八进位数或十六进位数的方法，則是与轉換为二进位数的方法相同的。但也可以先轉換成二进位数，再由二进位数轉換成八进位数或十六进位数。

用类似于十进位数轉換成二进位数的方法，也可把二进位数轉換成十进位数。此处不再詳述。

現代計算机的数，大多采用二进位制，因为二进位制有下述优点：

(1) 在二进位制中只有兩个数字，即0与1，因此每一位数只需用一个具有兩种不同稳定狀态的元件就可以表示，而这种元件是比較容易获得的。例如継电器、电子管等，利用它們的通与不通的兩个狀态，就可以表示"0"和"1"。要制造多于兩个不同稳定狀态的物理元件，則比制造具有兩个稳定狀态的元件困难得多。

(2) 二进位数作乘法运算簡便，因为乘数或为0，或为1，相乘时，其被乘数或者不变地写在相应的位置上（即乘1时），或轉換到乘数的下一位的計算（即乘零时）。

用二进位制表示的数的值，書写不大方便，因为对同一个数用二进位制表示时，所需位数往往要長得多。但对于計算机来說，可以証明，用十进位制表示数时所需的設备反而比用二进位制时还多。

机器內的数一般用二进位制表示，但是我們日常都用十进位制；因此，原始数据及結果都需要經过十进位与二进位制的換算。这項工作往往由机器自动完成。我們把原始数据写成十进位数，送入机器后，利用專門設备或程序，可將其譯成二进位数，对于計算結果，則可由机器自动譯成十进位数后再送出来。在数据很多而运算量較小的情况下，机器將把很多时間消耗在数制轉換上，在这种情况下，（机器內的数，可以考慮采用十进位制表示。

§ 2-2 电子計算机中数的表示法

任意数 x 可写为：

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_i R^{p-i}=R^p\sum_{i=1}a_i R^{-i} \tag{2-2}$$

式中 R 为基数，为十进位数表示；$a_i=0$，1，2，…，…，$R-1$；n 为 x 的位数；p 表示 x 的小数点位置，小数点在自最高位数起的第 p 位数之后，例如：$x=234.5$，則 $p=3$，p 称为数的阶。

在計算机上表示的数，p 值可能是固定值，也可能是不固定值。前一类計算机称为**定点机**；在某些定点机上，取 p 恒为0，于是它能表达的数的范圍是 $-1<x<1$。在使用定点机算題时，必須引进比例因子，使整个計算过程中可能出現的一切数，不超出該机器所能

表示的数的范圍。比例因子問題將在第十章作專門叙述。

p 值不固定的計算机称为**浮点机**。p 值可正可負。不难想象，浮点机表示的数的范圍比定点机要大得多。

在定点机中，数 x 表示成：

$$x=a_0a_1a_2\cdots\cdots a_n$$

式中 a_0 为数的符号，若以二进位制表示数，則常以 $a_0=0$ 表示正数，$a_0=1$ 表示負数；$a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 为数的模，对于 $p=0$ 的定点机，則 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 皆表示小数点后的各位数字。

在浮点机中，数 x 分成阶及**尾数**两个部分，表示为：

$$b_0b_1b_2\cdots\cdots b_r; \qquad a_0a_1a_2\cdots\cdots a_n$$

其中 $b_0b_1b_2\cdots\cdots b_r$ 为阶，b_0 是阶的符号；$a_0a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 为尾数，a_0 是数的符号。在二进位制中，若 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$，在½与 1 之間，亦即 a_1 为 1 时，則称 x 为規格化了的数。例如：

$807600=0.8076\times10^6$	浮点記法	$+06$	8076
$-0.8076=-0.8076\times10^0$	浮点記法	00	-8076
$0.08076=0.8076\times10^{-1}$	浮点記法	-01	8076

在計算机中，常用脉冲的有無或电位的高低表示二进位制的两个数，如圖 2-1，2-2 所示：

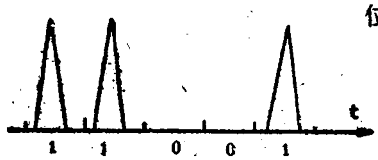

圖 2-1

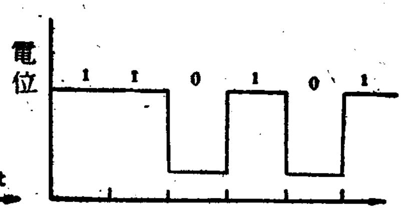

圖 2-2

在圖 2-1 中，有脉冲的狀态代表"1"，無脉冲的狀态代表"0"。

在圖 2-2 中，高电位代表"1"，低电位代表"0"。

§2-3 負数的表示法

習慣上，对于負数，往往在其前面加"－"号，以区别于正数。如十进位数負 271，則写成－271。負数的这种表示方法，称为**原碼**表示法。数的正負号也可以用数碼来表示。例如对十进位数，可以用"0"表示"正"，用"9"表示"負"，－271 就可以写成 9271，而＋271 則可写成 0271；这里数的第一位只是代表数的符号，不影响数的模的大小。对于二进位数，它只有两个不同的数碼"0"和"1"，我們常以"0"表示"正"，以"1"表示"負"。例如二进位数＋101 可以写成 0101，－101 可以写成 1101；最高位只是表示数的符号。

除了用原碼表示負数外，还可用**补碼**或**反碼**表示負数。下面通过具体例子来說明十进位数的补碼表示法。假定对每个十进位数規定取四位，最高位表示数的符号，且以"0"表示"正"，以"9"表示"負"。

数	原碼表示	补碼表示
正 貳	0002	0002