

天津大学“211工程”丛书

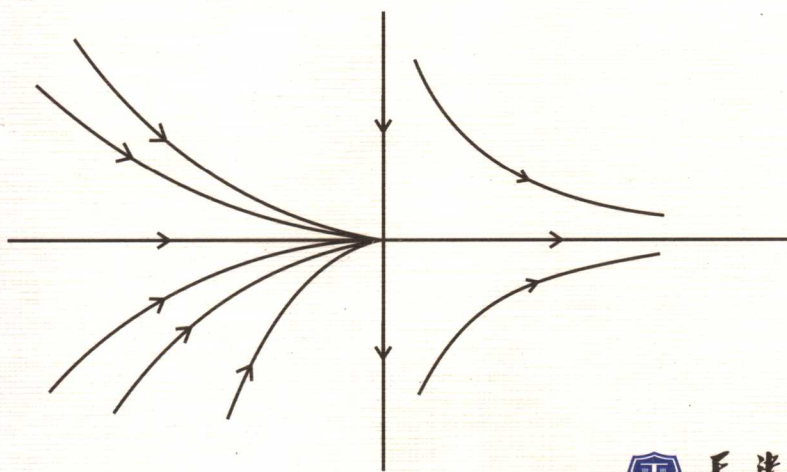
TIANJINDAXUE “211 GONGCHENG” CONGSHU

分岔与混沌

Fencha yu Hundun Lilun ji Yingyong

理论及应用

张琪昌 王洪礼 竺致文 编著
沈 菲 任爱娣 刘海英



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

天津大学“211 工程”丛书

分岔与混沌理论及应用

张琪昌 王洪礼 竺致文 编著
沈 菲 任爱娣 刘海英

 天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书阐述了非线性系统分岔及混沌的基本概念,主要方法和在机电、航空、生态、经济等领域中的应用;介绍了中心流形理论、L-S方法、规范形理论、奇异性理论,混沌理论、混沌控制。在附录中附有用 Mathematica 语言编制的计算中心流形、规范形的程序。全书深入浅出,注意系统性,并有大量例题,以利读者迅速进入分岔理论及应用课题的研究。

本书也可作为力学专业研究生的专业课教材,也可作为机械、动力机械、土木结构、水利、自动化、化工及管理等专业研究生的选修课教材,还可作为自然科学和工程技术领域中的研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

分岔与混沌理论及应用/张琪昌等编著. —天津:天津大学出版社,2005.1

ISBN 7-5618-2085-2

I. 分... II. 张... III. ①非线性系统(自动化) — 动力学②非线性系统(自动化) — 混沌学
IV. TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 003229 号

出版发行 天津大学出版社
出版人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网 址 www.tjup.com
印 刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm × 230mm
印 张 21.75
字 数 491 千
版 次 2005 年 1 月第 1 版
印 次 2005 年 1 月第 1 次
印 数 1 - 2 000
定 价 28.00 元

前 言

近年来随着非线性学科的发展、计算机技术的普及,分岔及混沌理论在各学科的研究领域中得到了广泛应用。本书是在作者多年的科学研究工作及研究生教学实践基础上编写而成的,共分 13 章。

第 1 章介绍了常微分方程定性及运动稳定性理论,包括解的稳定性的基本概念,进行定性分析的基本方法以及如何利用李雅普诺夫运动稳定性定理、后继函数法判定常微分方程解的稳定性。

第 2 章介绍了分岔的基本概念,包括结构稳定性的概念、分岔的类型及三种基本的一维静态分岔和霍普分岔的相关特性。

第 3 章、第 4 章介绍了两种常用的对高维非线性动力系统降维的方法——李雅普诺夫-史密特(Liapunov-Schmidt,简称 L-S 方法)方法和中心流形定理(Center Manifold Theorem)。

第 5 章介绍了规范形(Normal Form)理论和计算规范形的多种实用方法,包括规范形理论的 4 种基本方法,即矩阵表示法、共轭算子法、李代数方法、摄动法,还介绍了多种计算规范系数的实用方法以及相应的用 Mathematica 计算机代数语言编制的程序。

第 6 章至第 9 章介绍了奇异性理论,全局分岔理论、混沌理论,混沌控制的基本理论和方法。

第 10 章至第 13 章分别介绍了分岔、混沌理论在机电系统、海洋环境、社会经济系统、非线性机翼颤振系统中的应用。

本书不仅可以作为力学专业研究生的专业课教材,还可作为机械、动力机械、土木结构、水利、自动化、化工及管理等专业研究生的选修课教材。

限于作者水平,书中难免有疏漏和不足之处,敬希得到读者批评指正。

作者

2004 年 9 月于天津大学

目 录

第 1 章 常微分方程定性及运动稳定性理论	(1)
1.1 解的稳定性的定义	(1)
1.2 相平面上的奇点及其稳定性	(3)
1.3 按一次近似判断定常系统稳定性的准则	(13)
1.4 李雅普诺夫运动稳定性	(17)
第 2 章 分岔的基本概念	(35)
2.1 结构稳定性	(35)
2.2 分岔的基本概念	(36)
2.3 分岔的类型	(37)
2.4 三种基本的一维分岔	(40)
2.5 霍普夫分岔	(43)
第 3 章 李雅普诺夫-施密特理论	(47)
3.1 隐函数定理	(47)
3.2 李雅普诺夫-施密特方法	(49)
3.3 计算实例	(51)
第 4 章 中心流形理论	(53)
4.1 基本概念	(53)
4.2 稳定流形定理	(56)
4.3 中心流形定理	(58)
4.4 中心流形定理的电算程序及算例	(61)
第 5 章 规范形理论	(64)
5.1 概述	(64)
5.2 规范形理论的基本概念	(65)
5.3 矩阵表示法	(68)
5.4 共轭算子法	(72)
5.5 李代数法	(74)
5.6 计算高阶规范形的周期平均法	(83)
5.7 摄动(nayfeh)方法	(90)
5.8 用规范形理论研究强非线性振动问题	(98)
5.9 计算半单系统规范形的通用程序方法	(104)

5.10 用规范形理论研究霍普夫分岔系统的焦点量问题	(114)
第6章 奇异性理论	(122)
6.1 识别问题	(122)
6.2 开折问题	(133)
6.3 分类问题	(137)
6.4 计算实例	(138)
第7章 全局分岔	(145)
7.1 洛伦兹系统的起源	(145)
7.2 洛伦兹系统平衡点的叉形分岔	(147)
7.3 洛伦兹系统平衡点的霍普夫分岔	(150)
7.4 洛伦兹系统的吸引集	(152)
7.5 洛伦兹系统的奇异吸引子	(156)
7.6 洛伦兹系统的全局分岔	(159)
第8章 混沌理论	(169)
8.1 混沌研究的起源	(169)
8.2 混沌的定义	(170)
8.3 混沌运动的基本特征	(171)
8.4 通向混沌的道路	(173)
8.5 常见的几种研究混沌的方法	(175)
8.6 混沌域的结构	(179)
第9章 混沌控制	(188)
9.1 OGY 方法	(188)
9.2 OGY 方法的改进和推广	(190)
9.3 参数自调节控制方法	(192)
9.4 实现控制的关键问题	(193)
9.5 神经网络控制方法	(195)
第10章 分岔与混沌理论在机电系统中的应用	(203)
10.1 形状记忆合金的非线性力学性能分析	(203)
10.2 转子系统的非线性动力学分析	(211)
10.3 转子系统的主动控制	(224)
第11章 非线性动力学理论在赤潮研究中的应用	(232)
11.1 单种群赤潮生态模型的非线性动力学研究	(232)
11.2 多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究	(243)
第12章 非线性动力学理论在社会经济系统研究中的应用	(256)
12.1 非线性动力学理论在金融研究中的应用	(256)

12.2	国内生产总值的非线性混沌预测	(271)
12.3	人口预测中的分岔与混沌	(275)
第 13 章	具有立方非线性机翼极限环颤振的研究	(281)
13.1	机翼颤振系统的霍普夫分岔研究	(282)
13.2	给定系统的霍普夫分岔	(287)
13.3	系统的极限环颤振分析	(291)
13.4	立方非线性颤振系统的分岔行为分析	(298)
附录 1		(305)
附录 2		(316)
参考文献		(329)

第1章 常微分方程定性 及运动稳定性理论

本章介绍常微分方程定性及其运动稳定性理论。所谓定性理论,又称几何方法,就是把微分方程的解看成是充满平面或空间(或其中某一区域)的曲线族。对于已给的方程要求设法描绘出曲线族的大致分布概况,研究它们(局部或大范围)的几何性质,并从中引出有用的结论。在这里自变量和未知函数一般是实数。在常微分方程的定性理论中,一个重要的部分是关于解的稳定性理论,它是19世纪由俄国著名的数学家李雅普诺夫奠基的数学分支。由于其应用的广泛性,几乎已经发展成微分方程的一个单独的重要分支,而且由于科学技术,特别是自动调节、系统工程、人造地球卫星、宇宙飞船等最新科学技术发展的需要,使得这一分支的研究工作日趋蓬勃,不断出现新的支派和成果,并引起了广大数学工作者与工程技术人员的密切注意和研究兴趣。

1.1 解的稳定性的定义

考虑下列微分方程组

$$\dot{y}_i = F_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.1.1)$$

其中 y_i 是与运动有关的变量,例如位移、速度、加速度等满足解的存在性和唯一性条件,其矢量微分方程形式为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (1.1.1a)$$

其中: $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n]^T$ 为 n 维列向量函数。

在今后的讨论中,均假定方程组(1.1.1)的右端在所讨论的 $(y_1, \dots, y_n, t)$ 是在 $n+1$ 维空间的某区域 D 内,满足解的存在唯一性定理、解的延拓与连续性定理以及可微性定理所要求的条件。

稳定性这个词最先出现在力学中,它描述了一个刚体运动的平衡状态。如果说这个平衡状态是稳定的,就是说刚体在受到干扰的作用下从原来位置微微移动后,仍回到它原来的位置。反之,如果它趋于一个新位置,这时的平衡状态就是不稳定的。

在实际应用中,微分方程所描述的乃是物质系统的运动规律。从实际问题中所提出的微分方程,人们只能考虑影响该过程的主要因素,而不得不忽略一些看来较次要的因素,即干扰因素。干扰因素可以瞬时地起作用,也可以持续地起作用。从数学上来看,前者引起初值的变化,而后者则引起微分方程本身的变化。因此,研究下述问题就有着极其深远的理论意义和现实意义。这就是:初始条件或微分方程本身的微小变化是否只引起对应解的微小

变化? 如果由于初始条件或微分方程“差之毫厘”却使对应的解“失之千里”, 那么这样的定解问题在实用上显然是没有什么价值的。

运动系统的稳定性概念是平衡稳定性概念的直接扩大。李雅普诺夫定义下的运动稳定性理论, 是研究微小干扰性因素对于物质系统运动的影响。而微小的干扰因素(或者说涨落)总是存在的, 且不可确定。

对于一些运动, 微小干扰因素的影响并不显著, 因而受干扰的运动与不受干扰的运动差别很小, 这类运动称为稳定的; 对于另外一些运动, 无论干扰多么小, 随着时间的发展, 受干扰的运动与不受干扰的运动相差很大, 这类运动称为不稳定的。由于干扰总是不可避免地存在, 所以运动稳定性的问题就有其重要的理论和实际意义, 在自然科学与工程技术领域受到了人们的普遍关注。

设式(1.1.1)在初始条件

$$\left. \begin{array}{l} y = y_0 \\ t = t_0 \end{array} \right\} \quad (1.1.2)$$

下的解为

$$y_i = \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (1.1.3)$$

选取此式为干扰运动, 考虑其稳定性。设初始条件有微扰动

$$\left. \begin{array}{l} y = \tilde{y} + \boldsymbol{\eta} = y_0 \\ t = t_0 \end{array} \right\} \quad (1.1.4)$$

其中, $\boldsymbol{\eta}$ 为 n 维扰动向量, 是一阶小量。此初始条件下的微分方程(1.1.1)的解为

$$y = y(t) \quad (1.1.5)$$

定义 1.1.1 如果对于任意小的正数 ϵ , 总存在正数 $\eta(\epsilon)$, 使得对于所有受干扰的运动 $y_i = y_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$, 当其在初始时刻 $t = t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0) - \tilde{y}_i(t_0)| \leq \eta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad (1.1.6)$$

而在所有 $t \geq t_0$ 时, 满足不等式

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad (1.1.7)$$

则未受干扰的运动就称为对变量是稳定的。

未受干扰的运动如果不是稳定的, 则称为不稳定的。即对任意正数, 至少有一种受干扰的运动, 它满足不等式(1.1.6), 但如果在某一时刻不满足不等式(1.1.7), 那么未被扰动的运动就是不稳定的。

若未被扰动的运动不但是稳定的, 而且当初始振动足够小时, 随着时间的增加, 所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动, 在这种情况下, 未被扰动运动是渐近稳定的。

对于方程(1.1.1), 研究新解 $y_i = \tilde{y}_i(t)$ 相对变量 $y_i(t)$ 的稳定性还很复杂。为此对方程(1.1.1)进行坐标变换

$$x_i = y_i(t) - \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{dy_i(t)}{dt} - \frac{d\tilde{y}_i(t)}{dt} \\ &= f_i[x_1 + \tilde{y}_1(t), \dots, x_n + \tilde{y}_n(t), t] - f_i[\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t), t] \\ &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

即

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (1.1.8)$$

由于 $f_i = 0$ 时, $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$, 所以方程(1.1.1)的未扰运动稳定性问题转化为方程(1.1.8)的零解稳定性问题。

定义 1.1.2 对于任意正数, 存在 $\eta(\epsilon)$, 使得对于受到干扰的运动, 在初始时刻 t_0 时满足 $|x_i(t_0)| \leq \eta (i=1, 2, \dots, n)$, 当 $t > t_0$ 时, 满足 $|x_i(t)| < \epsilon$, 则系统(1.1.8)在平衡位置 $(x_i = 0, i=1, 2, \dots, n)$ 是稳定的。反之则称未扰运动 $(x_i = 0, (i=1, 2, \dots, n))$ 是不稳定的。

如果未扰运动 $(x_i = 0 (i=1, 2, \dots, n))$ 是稳定的, 且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t)$ 成立, 则称为是渐近稳定的。

设非自治系统的扰动微分方程为

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1.9)$$

在平衡位置 $x=0$ 的邻域 $\Omega: \|x\| < H$ 内, 解存在且唯一, 其中 $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ 为欧氏范数; $\|x\|$ 表示在以原点为球心、 H 为半径的球内。

定义 1.1.3 对任意 $\epsilon > 0 (\epsilon \subset H)$, 可以找到 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当初始扰动 $\|x_0\| < \delta$ 时对一切 $t > t_0$ 有

$$\|x\| < \epsilon \quad (1.1.10)$$

则称系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 为稳定。

定义 1.1.4 如果系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 稳定, 且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| = 0$$

则称平衡位置为渐近稳定。

定义 1.1.5 如果系统(1.1.8)平衡位置 $x=0$ 为渐近稳定, 而 x_0 可以取任何值, 则称平衡位置为全局渐近稳定。

定义 1.1.6 对任意给定的 $\epsilon > 0 (\epsilon \subset H)$, 无论 x_0 如何选择, 总能找到一个时刻 $\tau > t_0$, 使得在此时刻之后的任意时刻 $t > \tau$, 找不到一个 $\delta > 0$, 满足式(1.1.10), 则称系统(1.1.8)平衡位置为不稳定。

1.2 相平面上的奇点及其稳定性

定义 1.2.1 设系统的奇点(平衡点、临界点)为 u_* , 若对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$,

使得当 $\|u(0) - u_*\| < \delta(\epsilon)$ 时, 有 $\|u(t) - u_*\| < \epsilon$ 对任意 $t \geq 0$ 成立, 则称系统的奇点 u_* 是稳定的, 否则称为不稳定的。若奇点 u_* 是稳定的, 且满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_*$, 则称奇点 u_* 是渐近稳定的。

下面研究相平面上奇点的性质。考虑系统

$$\dot{u} = f(u) \quad (1.2.1)$$

其中

$$u = [x \quad y]^T \in \mathbb{R}^2$$

如果系统的平衡点 $u = u_*$ 不是原点 $(0,0)$, 则可作线性变换: $v = u - u_*$, 故式(1.2.1)变为 $\dot{v} = f(v)$, 此时系统的奇点已变为原点 $(0,0)$ 。因此, 本节着重讨论奇点为原点的振动系统。设系统

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

的平衡点为 $u = u_* = 0$ 。显然, 前面研究的系统(1.2.1)只是系统(1.2.2)的一个特例。

将系统(1.2.2)在 $u = u_* = 0$ 处作泰勒展开, 并忽略高次项, 得

$$\dot{u} = Df(0)u \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)称为式(1.2.1)的线性化系统, 写成向量形式即为

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

可以证明, 当矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部时, 系统(1.2.2)与其线性化系统(1.2.3)在奇点附近具有相同的性态。故着重讨论线性系统(1.2.4), 并假设此时矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部。显然, 此时 $\det A \neq 0$, 即 A 是非奇异的。由线性代数的知识可知, 此时 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量或广义特征向量(当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时) ξ_1 和 ξ_2 可以组成一个可逆(非奇异)实矩阵 $T = [\xi_1 \quad \xi_2]$ 。利用该矩阵, 通过线性变换

$$u = Tv \quad (1.2.6)$$

其中

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

可把线性方程组(1.2.4)化成标准形式, 其系统矩阵为下列四种形式之一:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta$ 为实数。

这些标准形式是根据方程组(1.2.4)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (1.2.7)$$

的根(称为特征根)的性质来确定的。

由于线性变换(1.2.6)不改变奇点的位置,也不会引起相平面上轨线性态的改变,从而奇点的类型也保持不变。因此,为了简单起见,下面仅就标准形式的线性方程组介绍奇点的类型,至于一般方程组(1.2.4)在奇点邻域内轨线分布的面貌也同时附于相应的图中,以供比较。现按特征方程具有相异实根、重根或共轭复根,分5种情形进行讨论。

情形一 同号相异实根

这时方程的标准形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

其解为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A e^{\lambda_1 t} \\ \eta &= B e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

其中 λ_1, λ_2 为实特征根,而 A, B 为任意实常数。

首先假定 λ_1, λ_2 同为负实数,此时易见,零解是渐近稳定的。当 $B = 0$ 时, ξ 的左半轴及右半轴本身为轨线;而当 $A = 0$ 时, η 轴的上半轴及下半轴为轨线。若 $A \cdot B \neq 0$,则可分 $\lambda_1 > \lambda_2$ 和 $\lambda_1 < \lambda_2$ 两种情况讨论。

如果 $\lambda_1 > \lambda_2$,由解(1.2.9)有

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{B}{A} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

故轨线切 ξ 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 1-1(a)所示。

如果 $\lambda_1 < \lambda_2$,则有

$$\frac{\xi(t)}{\eta(t)} = \frac{A}{B} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

这表明轨线切 η 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 1-1(b)所示。

从图 1-1 中可以看到,除个别轨线外,所有轨线均沿同一个方向趋向原点,其邻域内轨线具有这样性态的奇点称为结点。如上所述, λ_1, λ_2 同为负实数时,方程的零解是渐近稳定的,称对应的奇点为稳定结点。

当 λ_1, λ_2 同为正实数时,上述讨论仍然有效,只需将 $t \rightarrow +\infty$ 改为 $t \rightarrow -\infty$,即图 1-1 中

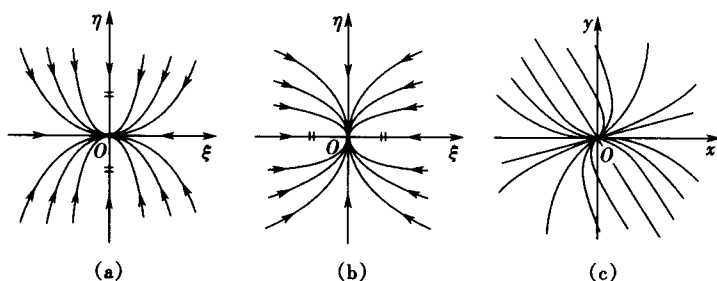


图 1-1 结点

(a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; (b) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; (c) 一般情况

轨线的走向均须改为相反的方向,这时方程的零解为不稳定,而对应的奇点称为不稳定结点。

情形二 异号实根

这时方程的标准形式及其解的表达式仍为式(1.2.8)和式(1.2.9),不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相异。

式(1.2.9)中当 $B=0$ 或 $A=0$ 时,其轨线分别为 ξ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴,且其中一轴趋于原点,另一轴远离原点。

当 $A \cdot B \neq 0$ 时,如 $\lambda_1 < \lambda_2$,则由式(1.2.9)可知,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\xi(t) \rightarrow +0$, $\eta(t) \rightarrow +\infty$, 轨线图貌如图 1-2(a)所示。如 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$,当 $t \rightarrow +\infty$ 则有 $\xi(t) \rightarrow +\infty$, $\eta(t) \rightarrow 0$, 轨线形状如图 1-2(b)所示。

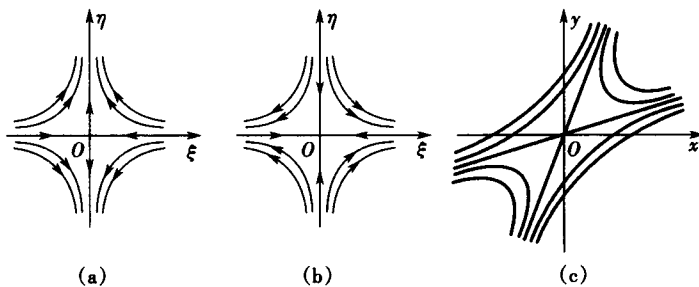


图 1-2 鞍点

(a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; (b) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$; (c) 一般情况

由图 1-2 可见,在奇点邻域内,方程的轨线图貌如鞍形,这样的奇点称为鞍点。显然,鞍点只能是不稳定的。

情形三 重根

这时可分两种情况讨论。

①当 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时,如前面所指出的,这时方程可化为如下标准形式:

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi + \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda\eta \quad (1.2.10)$$

其解为

$$\xi = (At + B)e^{\lambda t}, \quad \eta = Ae^{\lambda t} \quad (1.2.11)$$

当 $\lambda < 0$ 时,显然有 $\xi(t) \rightarrow 0, \eta(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$,因而方程的零解是渐近稳定的。又由式(1.2.11)知,当 $A = 0$ 时, ξ 轴左、右半轴本身也是轨线;而当 $A \neq 0$ 时,由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{A}{At + B} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

且当 $t = -\frac{B}{A}$ 时, $\xi(t) = 0$,可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点,如图 1-3(a)所示。所有轨线毫无例外地沿同一个方向(ξ 轴)趋于奇点,其附近轨线具有这种性态的奇点称为退化结点。在此情形下,奇点是稳定的,因此便称为稳定退化结点。

假若 $\lambda > 0$,这时只要将 $t \rightarrow +\infty$ 改为 $t \rightarrow -\infty$,则前面讨论仍然有效。轨线性态如图 1-3(b)所示,奇点是不稳定退化结点。

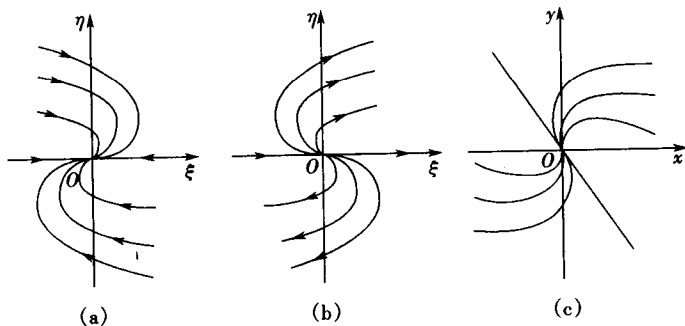


图 1-3 退化结点

(a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$; (c) 一般情况

②当 $b = c = 0$ 时,这时方程组(1.2.4)取形式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad \lambda = a = d$$

其解为

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, \quad y(t) = Be^{\lambda t}$$

于是

$$y = \frac{B}{A}x$$

此时,轨线是趋向(或远离)奇点的半射线,如图 1-4 所示。轨线均沿确定的方向趋于(或远离)奇点,且不同轨线其切向也相异,这样的奇点称为奇结点,且 $\lambda < 0$ 时为稳定的,而 $\lambda > 0$

时为不稳定的。

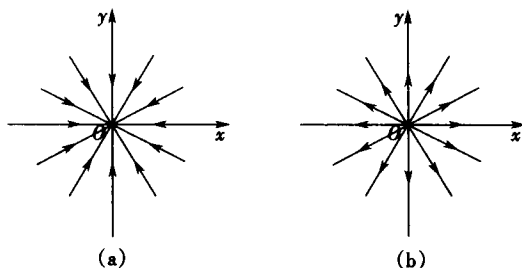


图 1-4 奇结点

(a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$

情形四 非零实部复根

这时方程的标准形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \alpha\xi + \beta\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\beta\xi + \alpha\eta \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

这里 α, β 分别为特征根的实部和虚部。引入极坐标, 即令 $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$, 再注意到

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 + \eta^2, \quad \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\eta}{r} \\ \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} &= r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{\xi}{\eta} \frac{d\xi}{dt} - \frac{d\eta}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

将由式(1.2.12)代入上式, 经整理可以得到

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\beta$$

由此得到方程(1.2.12)的解的极坐标形式

$$r = Ae^{\alpha t}, \quad \theta = \beta t + B \quad (1.2.13)$$

其中 $A > 0, B$ 为任意常数。

从式(1.2.13)可直接看出, 轨线为一族对数螺旋线, 依顺(逆)时针方向盘旋地趋近或远离原点, 如图 1-5 所示。此时, 奇点称为焦点, 且 $\alpha < 0$ 时为稳定的, 而 $\alpha = 0$ 时为不稳定的。

情形五 纯虚根

这相当于情形四中 $\alpha = 0$ 的情形。易见这时轨线为以原点为中心的一族圆, 如图 1-6 所示。此时, 奇点称为中心, 显然, 在这种情形下零解为稳定但非渐近稳定的。

综上所述, 可得下面定理。

定理 1.2.1 如果二阶线性驻定方程组(1.2.4)的系数满足条件式(1.2.5), 则方程的零解(奇点)将依特征方程(1.2.7)的根的性质而分别具有如下的不同特性。

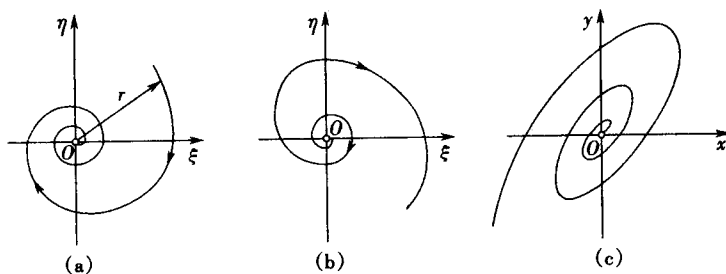


图 1-5 焦点

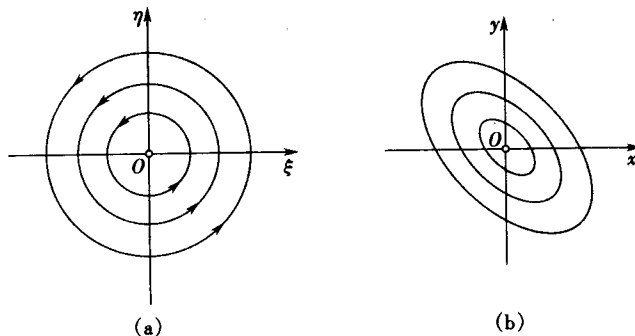
(a) $\alpha < 0, \beta > 0$; (b) $\alpha > 0, \beta > 0$; (c) 一般情况

图 1-6 中心

(a) $\alpha = 0, \beta < 0$; (b) 一般情况

①如果特征方程的根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实根, 则 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 时奇点为结点, 且当 $\lambda_1 < 0$ 时结点是稳定的, 而对应的零解为渐近稳定的, 但当 $\lambda_1 > 0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的; 当 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ 时奇点为鞍点, 零解为不稳定的。

②如果特征方程具有重根 λ , 则奇点通常为退化结点, 但在 $b = c = 0$ 的情形奇点为奇结点。又当 $\lambda < 0$ 时, 这两类结点均为稳定的, 而零解为渐近稳定的; 但当 $\lambda > 0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的。

③如果特征方程的根为共轭复根, 即 $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, 则当 $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$ 时奇点为焦点, 且当 $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ 时焦点是稳定的, 对应的零解为渐近稳定的; 而当 $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的。当 $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ 时奇点为中心, 零解为稳定但非渐近稳定的。

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图 1-7 来明了地表示。例如, 引入符号

$$p = -(a + d), q = ad - bc$$

而特征方程(1.2.7)写成

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

则可以利用方程的根 λ_1, λ_2 与系数 p, q 之间的关系, 通过 λ_1, λ_2 为媒介, 在以 p, q 为直角坐标的平面 (p, q) 上明了地划分出各类型奇点的分布区域, 如图 1-7 所示 (图中抛物线的方程为 $p^2 - 4q = 0$)。

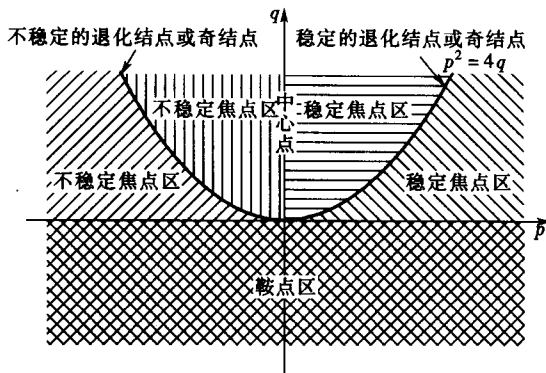


图 1-7 各类型奇点的分布区域

例 1.2.1 求二阶线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

奇点的特性。

解: 通过变换 $\frac{dx}{dt} = y$, 可将方程化为下列一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$

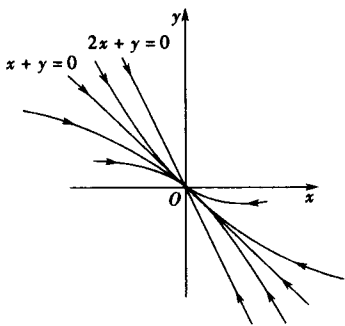


图 1-8 相平面上的轨线图貌

由直接计算可得其特征方程的根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, 是一对相异负实根, 根据定理 1.2.1 可知奇点是一个稳定结点。又 $\lambda_1 > \lambda_2$, 根据前面的讨论知道, 在 $\xi\eta$ 平面上于奇点附近轨线分布如图 1-1(a) 所示。为画出轨线在 xOy 相平面上的图貌, 必须根据线性变换式 (1.2.6) 具体求出 ξ 轴和 η 轴在 xOy 相平面上所对应的直线方程。

由前面的讨论, 容易将它们写出如下:

$$x + y = 0 \quad \text{和} \quad 2x + y = 0$$

由此, 不难画出轨线的图貌如图 1-8 所示。