



第三版

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

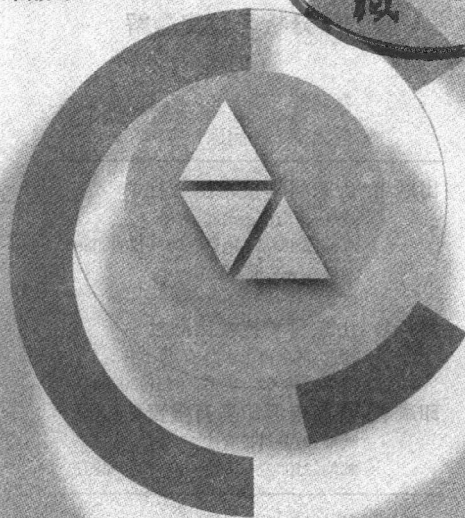
第三版

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖 周学圣
郭大钧 邵品琮

编演
主审



图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定晖 周学圣编演. —3版. —济南:山东科学技术出版社, 2005.1(2005.3重印)

ISBN 7-5331-0099-9

I. Б... II. ①费... ②周... III. 数学分析—高等学校—解题 IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43960 号

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(1)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531)2098088

网址: www.lkj.com.cn

电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531)2098071

印刷者: 济南申汇印务有限责任公司

地址: 济南市王官庄 12 号

邮编: 250022 电话: (0531)7966822

开本: 850mm×1168mm 1/32

印张: 14.125

字数: 345 千

版次: 2005 年 3 月第 3 版第 20 次印刷

印数: 277001—285000

ISBN 7-5331-0099-9

0-5

定价: 18.50 元



第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自 1979 年出版发行以来,20 余年一直畅销不衰,读者称其为学习数学分析“不可替代”之图书,我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动:

第一,修正了部分题目的解法,使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二,改正了第二版的个别印刷错误。

第三,在文字上进行了些润色,力求文字更加准确。

第四,对版面和开本进行了调整,突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持,责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动,在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅,不当之处恳请指正。

费定晖

2005.1



出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,



出版说明

CHUBANSHUOMING

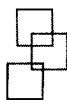
特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。



目 录

MULU

第一章 分析引论	1
§ 1. 实数	1
§ 2. 叙列的理论	24
§ 3. 函数的概念	90
§ 4. 函数的图形表示法	123
§ 5. 函数的极限	213
§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶	331
§ 7. 函数的连续性	347
§ 8. 反函数. 用参数表示的函数	393
§ 9. 函数的一致连续性	411
§ 10. 函数方程	429



第一章 分析引论

§ 1. 实数

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只须证明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真, 则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2° 分割 假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足于下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数, 这样的分类法称为分割. (i) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数. (ii) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值 假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ ** 满足不等式

$$x \geq m;$$

* 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X .

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 设 $a (a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半, 则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

$$[1] \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设对于 $n=k$ (自然数) 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有



$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是, 由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

【2】 $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【3】 $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3 = (1+2+\cdots+k)^2,$$



则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= (1+2+\cdots+k)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ &= \left\{ \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \right\}^2 = [1+2+\cdots+(k+1)]^2, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

【4】 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k = (2^k-1)+2^k = 2^{k+1}-1,$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

【5】 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$,

求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时, 由于

$$[a+b]^{[1]} = a+b$$



及
$$\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a + b,$$

所以等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(a + b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \quad (1)$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$(a + b)^{[k+1]} = (a + b)^{[k]} \cdot (a + b - kh). \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned} (a + b)^{[k+1]} &= (a + b - kh) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\ &= (a + b - kh) \{ C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \dots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \} \\ &= \{ (a - kh) + b \} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + \{ a - (k-1)h \} \\ &\quad + (b - h) \} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \dots + \{ a + (b - kh) \} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\ &= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} \\ &\quad + \dots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\ &= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} \\ &\quad + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\ &= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} \\ &\quad + \dots + C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\ &= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]}, \end{aligned}$$

故由 $(a + b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$ 可推得下式成立:

$$(a + b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.





于是,对于任何自然数 n ,有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \quad (3)$$

在式子

$$a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h]$$

中,令 $h=0$,即得

$$a^{[n]} = a^n. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式,得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

【6】 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,此式取等号.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,由于 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 大于 -1 , 所以, $1+x_i > 0$. 因而,有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \\ & \quad + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}). \end{aligned}$$

由于 $x_ix_j \geq 0$, 所以,

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_{k+1}) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n ,有



$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中, 设

$$x_i = x \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

即得证

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出, 仅当 $x=0$ 时, 上式才取等号.

【8】证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n=2$ 时, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k=1, 2, \cdots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.



于是,对于任何自然数 n , 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

【9】 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n=2$ 时, 因为 $2! \cdot 4! = 48$, 及 $[(2+1)!]^2 = 36$, 所以 $2! \cdot 4! > [(2+1)!]^2$, 故不等式成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$2! \cdot 4! \cdots (2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 2! \cdot 4! \cdots (2k+2)! &> [(k+1)!]^k (2k+2)! \\ &= [(k+1)!]^{k+1} (k+2)(k+3) \cdots (2k+2) \\ &> [(k+1)!]^{k+1} (k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立. 于是, 据归纳法原理, 本题证毕.

【10】 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式显然成立.

设 $n=k$ 时, 因为, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言, 由于

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证



$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的. 于是, 最后得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n = k+1$ 时, 不等式也成立. 由归纳法证毕.

【11】 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$. 若 $a \leq 0$, 则显然存在 $a' > a$ ($a' > 0$) 且 $a' \in A$. 故可设 $a > 0$, 于是 $a^2 \leq c$. 但不可能有 $a^2 = c$. 因若 $a^2 = c$, 设 $a = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必 $q = 1$, 从而 $c = p^2$, 此与假定矛盾, 故必 $a^2 < c$. 下面我们证明, 存在正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a + \frac{1}{n}$ 也属于 A .

上述不等式相当于:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2,$$

若 n 满足不等式





$$\frac{2a+1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此, 只要取

$$n > \frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此, 不论 a 为 A 类内怎样的数, 在 A 类内总能找到大于它的数, 故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【12】 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成: A 类包含所有的有理数 a , 而 $a^3 < 2$; B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$, 即 $a^3 < 2$. 下证必可取正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上, 上式相当于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$. 若 $a \leq 0$, 取 $n = 1$ 即可. 若 $a > 0$, 注意到 $n \geq 1$, 即知若取 n 充分大, 使 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$, 则上列各式均成立. 从而 $a + \frac{1}{n} \in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b \in B$, 则 $b^3 \geq 2$. 下证不可能有 $b^3 = 2$. 事实上, 若 $b^3 = 2$, 设 $b = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$, $p^3 = 2q^3$, 从而 p^3 为偶数, 因此 p 必为偶数: $p = 2r$, r 为正整数. 由于 p 与 q 是互质的, 故 q 必为奇数, 从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$, 故 q^3 又必是偶数, 因此矛盾. 由此可知必有 $b^3 > 2$. 仿前面的证明, 可