国家工科数学课程教学基地建设系列教材

高等数学立体化系列教材

高等数学

上册

华南理工大学数学科学学院

陈凤平　傅一平　杨立洪　主编

洪潮兴　主审

3

华南理工大学出版社

国家工科数学课程教学基地建设系列教材
高等数学立体化系列教材

高 等 数 学

上册

华南理工大学数学科学学院
陈凤平 傅一平 杨立洪 主编
洪潮兴 主审

华南理工大学出版社
·广州·

内容简介

本书是华南理工大学“国家工科数学课程教学基地”建设的改革教材之一，也是广东省优秀课程“高等数学”系列教材之一．本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，本着深化课程体系与教学内容改革的精神编写．在编写时，注重课程体系结构的优化；对重要数学概念的阐述，突出数学思想与方法；加强对数学应用意识和能力的培养；注重教学的适用性．

本书共分两册．上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学、一元函数积分学与微分方程；下册包括向量代数、空间解析几何，多元函数微分学、多元函数积分学与无穷级数．每节配有习题，每章配有复习题，书末附习题答案．

本书结构严谨，论证清晰，叙述详尽，便于在教学改革中使用；例题典型，富有启发性，可读性强，便于自学．本书可作为高等理工科院校本科教材，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/陈凤平，傅一平，杨立洪主编．—广州：华南理工大学出版社，2004.9
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材　高等数学立体化系列教材)
ISBN 7-5623-2126-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②傅…③杨…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 085386 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com
责任编辑：詹志青　张　颖
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787×960　1/16　印张：25　字数：560 千
版　　次：2004 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定　　价：32.80 元

总　序

自1995年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”的出版，就是这些成果的重要部分。

21世纪是全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务。

大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然，这三种能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学领导与华南理大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

前　言

华南理工大学自1999年通过教育部本科教学工作优秀评价以来，在较高的起点上进一步推进本科教学改革和建设，正逐步建立和完善研究型本科教学体系.

高等数学课程是我校理科(非数学类)、工科乃至文科以及经济管理类各专业的一门主要基础理论课程，对培养学生的研究型思维、创新能力，提高学生综合素质具有重要的奠基作用.

本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，本着教育创新、深化改革的精神，在我校“国家工科数学课程教学基地”建设的教改实践中编写出来，具有以下突出特点：

一、注重基本概念阐述，突出数学建模思想与方法，着力于探究式学习能力的培养

为适应我国高等教育大众化的趋势，确实保证教学质量；同时，也为实施研究型教学，给学生提供探究学习的基本素材，本书注重对数学概念的详尽阐述.数学概念的引进，尽量从实际问题入手，尽量借助几何图形的直观性，力争使抽象的数学概念形象化；尽量按辩证唯物论的认识论来引进数学概念，做到由特殊到一般，再由一般回到特殊，力争使抽象的数学概念具体化.数学概念的引进，强调从实际问题的分析中提出数学问题，然后选择恰当的数学方法加以解决，突出数学建模的思维程序.只有使学生深刻、透彻地理解数学的基本概念，方谈得上数学素质的培养、教学的创新，才能确保教学质量这条生命线.

二、突出数学思想方法，启迪创新思维，着力于数学素质与能力的培养

本书在对数学概念详尽阐述的基础上，注重揭示重要数学概念的本质，着重讲解在解决实际问题时有重要应用价值的数学思想和方法.在极限概念中渗透逼近思想，在微分概念中渗透线性化思想，在极值问题中渗透最优化思想，在微积分与微分方程应用中突出微元分析法等.为适应我校培养、造就大批拔尖创新人才的需求，本书由浅入深，形成渐进“台阶”，逐步提高教学基本要求.据此，本书适当选择部分要求略高的教学内容和例题，着重思维方法的训练，使学生在抽象思维、逻辑思维和严谨性方面受到必要的熏陶，这是创新人才所必需的.

在使用本书时，各专业应根据教学要求在内容上作适当的取舍(特别是加上星号(*)的章节)．本书力求做到低起点，然后由浅入深，循序渐进，让读者有较大的发挥空间，最后升华到一定的高度．

三、注重课程体系结构与教学内容的整体优化

我们抓住均匀变化与非均匀变化这对矛盾的转化，并把它作为主线来编写教材．力求突出微分与积分这对高等数学的重点，把定积分与不定积分合为一章，将它们的计算方法结合在一起讨论，这样使知识结构更具条理性、系统性，理论阐述更为深刻、完整．重视相关内容的内在联系与合理融合，将重积分、第一类曲线积分与第一类曲面积分统一成多元数量值函数积分，并讨论它们的共同性质、统一的物理应用公式；将第二类曲线积分与第二类曲面积分统一成多元向量值函数积分，并把它们和向量场的研究密切结合，同时也与物理学的实际应用形式相一致．教学内容和体系的这种整合优化，符合现代数学的发展趋势．

为突出数学思想与方法，对运算技巧作适当淡化，使内容更贴近教学实际．

本书分上、下两册．上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学、一元函数积分学与微分方程．上册由陈凤平、傅一平、杨立洪主编，参加编写的有陈凤平、傅一平、杨立洪、蔡健．我们特别感谢主审人洪潮兴教授，他花费了大量的时间和精力，对书稿进行非常认真细致的审查，提出了许多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量起了十分重要的作用．

我们在多年的教学和研究中，采用和参考多种国内外的高等数学教材及其他参考书，受益匪浅，在编写本书时也无不受这些优秀教材的启发和指引，在此对这些优秀教材的作者表示感谢．

本书是我校“国家工科数学课程教学基地”建设的改革教材之一，得到华南理工大学教务处、数学科学学院等多方面的关怀和支持，在此向有关方面表示感谢．

本书也是广东省优秀课程“高等数学”立体化系列教材之一，它凝集了常年在华南理工大学高等数学教学第一线老师们的教学经验，是高等数学教研室老师们集体智慧的结晶．

由于我们水平所限，书中疏漏之处在所难免，敬请同行专家及读者批评指正．

编　者

2004 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学的主要内容是微积分．作为变数数学的微积分，它研究的基本对象是函数．

变量和函数是客观世界的运动和变化在数量关系上的反映．因此，高等数学的基本思想方法应该是运动的、变化的、辩证的分析方法，用变化的观点分析问题、解决问题．

在运动的变化过程中，考察变量的变化趋势．也就是说，把所考察的量看作是某个变量无限变化的结果，即看作是某个变量的极限．这种数学方法就是极限方法，它揭示了变量与常量、有限与无限之间的辩证关系．微积分中很多重要概念和方法都以极限理论为基础．因此，作为高等数学的开篇，本章首先介绍函数与极限，以及由此引出的函数的连续性．

第一节　函　　数

函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，它是高等数学最重要的基本概念之一．本节将在中学课本所述及的函数知识的基础上，对它作进一步的概括，并作适当的补充与提高．

一、常量与变量

在研究实际问题的过程中，会涉及各种各样的量，有些量在所研究的过程中只取一个定值，称之为**常量**；而有些量在所研究的过程中可以取不同的值，称之为**变量**．高等数学主要研究的是变量．应该指出，一个量到底是常量还是变量，必须将它置于变化的过程中考察，而不是孤立地、静止地考察该量．有些量在某一过程中表现为常量，而在另一过程中却表现为变量．

例 1　(1)设有一等腰梯形，下底边长为 a，高为 H，下底边外角为 45°，如图 1－1a 所示．求它的面积．

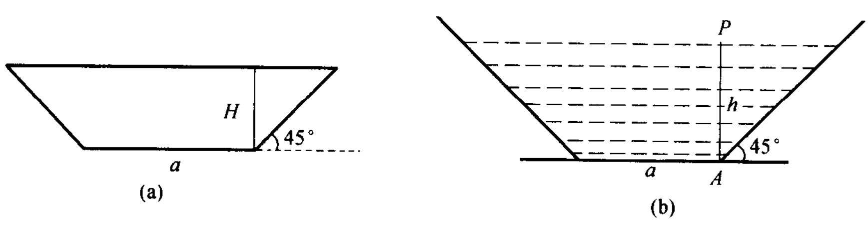

图 1－1

(2)设有一截面为等腰梯形的水渠,下底边长为 a,下底边外角为 $45°$,若流速为常量 v_0,如图 1-1b 所示.求水深为 h 时的流量.

解 (1) $A_1=\frac{1}{2}(a+a+2H)\cdot H=H(a+H)$.

(2) $Q=v_0\cdot A_2=v_0\cdot\frac{1}{2}(a+a+2h)h=h(a+h)v_0$.

在这两个问题中,单纯从计算方法上看,是非常相似的,但从实际问题的意义上分析,问题(1)中的 H 为常量;而问题(2)中的 h 则起着变量的作用.

有时,结合实际问题的具体情况,在特定的变化过程中,某一变量的取值变化不大,也就被近似地看成常量;而在另一变化过程中,则不能这样简化.例如,观察自由落体运动时,落体所受的力(地球对物体的引力)本来是变量——随着物体与地心间的距离的变化而变化.但当落体的初始高度不很大时,常将引力近似地看成常量.但是在发射卫星(甚至宇宙飞船)时,引力将不允许作常量处理.总之,**变是绝对的,不变是相对的**.

二、实数集与实数的绝对值

变量在变化过程中可以取不同的值.本书中变量所取的值,如无特别声明,都指实数.变量在其变化过程中所可能取的一切值,构成了实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集 D,并简称为数集.

实数与数轴上的点存在一一对应关系,我们将实数 a 与它在数轴上的对应点 A 统称为"点 a",不再加以区别.数集 D 在数轴上对应一个点集,而最简单的点集是**区间**.规定如下:

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做**闭区间**,记为 $[a,b]$;

数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 叫做**开区间**,记为 (a,b);

数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 及 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 叫做半开闭区间,分别记为 $[a,b)$ 及 $(a,b]$.

以上四种区间合称为有限区间,在无须甄别区间是否包含端点时,统一记为区间 $I_{(a,b)}$.

数集 $\{x\mid x>a\}$,$\{x\mid x\geqslant a\}$,$\{x\mid x<b\}$ 及 $\{x\mid x\leqslant b\}$ 则统称为无穷区间,分别记为 $(a,+\infty)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ 及 $(-\infty,b]$,其中记号"∞"读成无穷大.

实数集 $\mathbf{R}$ 本身(或相应的整条数轴)也被看作一个区间,记为 $(-\infty,+\infty)$.

下面介绍邻域概念.

对于点 a 及正数 δ,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,a 叫做**邻域**的中心,δ 叫做邻域的半径.在不需要强调邻域的半径大小时,就简称为点 a 的某邻域.

从邻域 $U(a,\delta)$ 中除去点 a 得

$$U(a,\delta)\setminus\{a\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

叫做点 a 的**去心邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid -\delta<x-a<\delta,x\neq a\}.$$

相应地,有时将 $(a-\delta,a)$ 与 $(a,a+\delta)$ 分别叫做点 a 的左半邻域与右半邻域.

每一个实数 a 都有一个与之意义相反的对应数 $-a$.在实际问题中,有时并不需要考虑其正、反意义,而只关心其数值大小,这就是实数的绝对值.

定义 1　任意实数 x 的绝对值规定如下：正数的绝对值等于它本身；负数的绝对值等于它的相反数；0 的绝对值还是 0.

实数 x 的绝对值记为 $|x|$，它可表示为

$$|x| = \begin{cases} x & 当 x > 0 \\ 0 & 当 x = 0. \\ -x & 当 x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

注意：$|x| = \sqrt{x^2}$，并且对于任意 $x \in \mathbf{R}$，有 $|x| \geqslant 0$，$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

在几何上，$|x|$ 表示数轴上点 x 到原点的距离，而数轴上点 A（对应数 a）与点 B（对应数 b）的距离为 $|AB| = |b - a|$.

有了绝对值的概念，邻域可用绝对值记号表示为

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\},$$

即表示一切与点 a 的距离小于 δ 的点的集合. 而

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

绝对值有如下一些性质：

$$|ab| = |a| \cdot |b|;\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\quad (b \neq 0);$$

不等式 $|x| \leqslant k\ (k > 0)$ 等价于 $-k \leqslant x \leqslant k$；

不等式 $|x| \geqslant k\ (k > 0)$ 等价于 $x \geqslant k$ 或 $x \leqslant -k$.

对于任意实数 a 及 b 都有

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

由绝对值的性质，容易得出下列结果：

(1) $x = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$ 表示 x 是 a、b 两数中较大的一个，记为

$$x = \max\{a, b\};$$

(2) $y = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ 表示 y 是 a、b 两数中较小的一个，记为

$$y = \min\{a, b\}.$$

三、函数的概念

定义 2　设有数集 D 及 E，如果有对应法则 f，使对于 D 内的每一数 x，都有惟一确定的数 $y \in E$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作

$$f: D \to E,\ x \mapsto y = f(x), \tag{2}$$

并称数集 D 为函数 f 的**定义域**. x 所对应的数 y 称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记 $y = f(x)$. 我们常常不强调 E，而直接取 $E = \mathbf{R}$，此时常用记号

$$y = f(x),\quad x \in D$$

表示函数 f，并称 x 为函数 $f(x)$ 的**自变量**，y 为**因变量**.

将全体函数值的集合记为

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

叫做函数的值域.显然,$f(D)\subseteq E$.

关于函数定义,应强调指出以下几点.

1. 关于函数的定义域及对应法则

函数的定义域 D 及对应法则 f 是函数概念的两个要素.所谓两个函数相等,是指它们具有相同的定义域 D 及对应法则 f.

例 2 下列函数中哪两个是表示同一函数的?

(1)$f_1(x)=\log_a a^x \quad (a>0,a\neq1)$;

(2)$f_2(x)=a^{\log_a x} \quad (a>0,a\neq1)$;

(3)$f_3(x)=\sin(\arcsin x)$;

(4)$f_4(x)=\arcsin(\sin x)$;

(5)$f_5(x)=|x|$;

(6)$f_6(x)=\sqrt{x^2}$;

(7)$f_7(x)=(\sqrt{x})^2$.

解 先看定义域:$f_2(x)$的定义域 $D_2=(0,+\infty)$;$f_3(x)$的定义域 $D_3=[-1,1]$;$f_7(x)$的定义域 $D_7=[0,+\infty)$,而其余函数 $f_1(x)$,$f_4(x)$,$f_5(x)$,$f_6(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,故 $f_2(x)$,$f_3(x)$,$f_7(x)$与其余 4 个函数肯定不是同一函数.

至于 $f_1(x)$,$f_4(x)$,$f_5(x)$,$f_6(x)$,虽然定义域相同,但尚需进一步考察对应法则.

$f_5(x)=f_6(x)=|x|$,这两个函数相同;

$f_1(x)=x$,当 $x<0$ 时,$f_1(x)\neq f_5(x)$;

仅当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f_4(x)=x$;而当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$时,$f_4(x)=\pi-x\neq x$.

因此,本例的 7 个函数中仅 $f_5(x)$,$f_6(x)$表示同一函数.如果只在 $x\in(0,1]$中考察这 7 个函数,则在该局部范围内,它们相应的部分是相同的.

2. 关于函数的定义域及其确定方法

自变量的取值范围是函数概念的要素之一,对给出的函数,首先必须确定它的定义域.

如果函数的自变量是有实际意义的物理量,则应按照该物理量的实际要求来确定其定义域.这样确定的定义域常称之为实际定义域.

例 3 下列 3 个函数的类型相同,但实际定义域各不相同.

(1)设 x 表示圆的半径,$A(x)$表示圆心角为 α 的扇形的面积,则 $A(x)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot x^2$.依实际意义,$A(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

(2)物体从离地面高 H 处自由下落,用 x 表示所经历的时间,用 $s(x)$表示下落的路程,则 $s(x)=\frac{1}{2}gx^2$.依实际意义,$s(x)$的定义域为$[0,T_0]$.其中,$T_0=\sqrt{\frac{2H}{g}}$,是物体到达地面所需的时间.

(3)平面直角坐标系中曲线上的动点(x,y)的纵坐标 y 与横坐标 x 的关系为 $y=y(x)=ax^2$(抛物线).依本问题的实际意义,$y(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

如果函数关系 $y=f(x)$，因变量 y 是由一个含 x 的运算公式给出的，而且未指明 x 的实际意义，则 $f(x)$ 的定义域是指：**能使该算式有意义的一切 x 值的集合**，并称之为理论定义域，简称定义域，有时也叫存在域.

确定这类函数的定义域应从下列几方面考虑：

(ⅰ)分式的分母(除式的除数)不为 0；

(ⅱ)负数不能开偶次方；

(ⅲ)零和负数不能取对数；

(ⅳ)正弦、余弦值的绝对值不超过 1；

(ⅴ)0^0 没有意义.

确定函数定义域的方法是：

首先，按这些规定列出不等式(或不等式组)，然后解这些不等式(组)，所求得的解集即为函数的定义域.

例 4　设

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}+\frac{1}{\lg(2x+3)}-\arcsin\frac{x-1}{3},$$

求 $f(x)$ 的定义域.

解　由 $\sqrt{5^2-x^2}$，按规定，要求 $5^2-x^2\geqslant0$，解之得

$$x\in D_1=[-5,5];$$

由 $\lg(2x+3)$，按规定，要求 $2x+3>0$，解得

$$x\in D_2=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right);$$

$\lg(2x+3)$ 作为分母，按规定，要求 $2x+3\neq1$，即

$$D_3=\{x\mid x\neq-1\};$$

由 $\arcsin\frac{x-1}{3}$，按规定，要求 $\left|\frac{x-1}{3}\right|\leqslant1$，解得

$$x\in D_4=[-2,4].$$

上述公共解 $D=D_1\cap D_2\cap D_3\cap D_4=\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,4]$ 即为所求函数 $f(x)$ 的定义域.

在求函数定义域时，要特别留意对应法则，例如，函数 $y=\sqrt{x^2(x-1)(4-x)}$ 的定义域为 $[1,4]\cup\{0\}$. 而 $y=|x|\cdot\sqrt{(x-1)(4-x)}$ 的定义域为 $[1,4]$. 两者不同，这是值得注意的.

3. 关于对应法则 f

对应法则 f 是函数概念的核心，表示对应法则 f 的方法有 3 种.

(1)列表法

将 x 与 $f(x)$ 的对应值列成对应表. 中学使用的 4 位数学用表、生产与生活中的各种对应表格都属此类. 其优点是简单、明了，使用方便；缺点是不全面，存在局限性，有些对应值表中查不到. 现实意义是，对应表中的对应值可以在实际过程中实测求得，不必从理论上进行

推演及计算,即使需要经过理论推导,由计算来制表,也只需制表者一人有专业技能,而对应用者而言则无此要求.

(2)图象法

在平面直角坐标系中,将函数 $y=f(x)$ 的每一组对应值 (x,y) 作为平面上一个点的坐标,称全体这种点的集合

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图象.一般情形下,函数 $y=f(x)$ 的图象是一条曲线.反之,若已知一曲线,也可以将它作为某函数的图象.这种方法的优点是形象、直观,能看出函数的变化情况;缺点是从图象不易得到较准确的函数值.现实意义是,函数的图象容易由各种自动记录仪或计算机直接得到.

(3)公式法

用含自变量 x 的数学运算式表示函数关系.这种方法的优点是科学、全面,便于准确计算;缺点是获取这种表示式的难度较大,不易为非专业人士所掌握.它的现实意义是,可以全面地掌握函数,便于理论研究,甚至可以把握变化趋势,预测未来.

本书着重研究由公式法表示的函数.一般地说,一个具体函数应由一个具体公式表示.但有时为了对函数进行一般性研究,以便推导出带有普遍性的规律,需要进行抽象思维,把直观的感性认识上升到理性认知,此时,往往使用抽象的函数记号:$y=f(x),x\in D$.

例 5 设已知 f 分别满足下述条件:

(1)$f(x+1)=x^2-2x+3$; (2)$f(\tan x)=\cos 2x$.

试分别求出 $f(x)$.

解 (1)**方法 1**

$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x^2+2x+1)-4(x+1)+6\\&=(x+1)^2-4(x+1)+6,\end{aligned}$$

故得

$$f(x)=x^2-4x+6.$$

方法 2 作变量代换,令 $x+1=t$,即 $x=t-1$,有

$$f(x+1)=f(t)=(t-1)^2-2(t-1)+3=t^2-4t+6,$$

故得

$$f(x)=x^2-4x+6.$$

(2)令 $\tan x=t$,则 $1+t^2=\sec^2 x$,$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$,于是

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

故

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

四、函数的简单性态

有的函数具有某些特殊的性态,了解、把握这些特性,方便人们对函数进行研究.下面首先介绍有关增量的概念.

设 u 是一个变量，当 u 从初值 u_0 变为终值 u_1 时，称差 u_1-u_0 为变量 u 的**增量**，并记为 Δu，即

$$\Delta u = u_1 - u_0, \quad 或 \quad u_1 = u_0 + \Delta u.$$

这里，增量可正可负，当 $\Delta u>0$ 时，表示 u 增大；当 $\Delta u<0$ 时，表示 u 减小.增量有时也叫改变量.注意增量 Δu 是一个完整的记号.

在函数 $y=f(x)(x\in D)$中，若自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx，并设 $x_0+\Delta x\in D$，则函数值相应地从 $y_0=f(x_0)$变为 $y_1=f(x_0+\Delta x)$，则称差

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

为函数 $f(x)$在 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的增量（简称函数的增量），记为 Δy，即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

注意：Δy 不仅与 Δx 有关，它还与 x_0 有关.

函数增量反映出函数值随自变量的变化而变化的重要特性，常用它来描述函数的一些性态.下面介绍 5 种函数简单的性态.

1. 函数的均匀性

设函数 $y=f(x)$，当 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应函数的增量为 Δy.如果

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=K, \quad 或 \quad \Delta y = K\Delta x,$$

式中，K 是与 x_0 及 Δx 都无关的常数，则称函数 $y=f(x)$随 x 变化的变化是**均匀的**，简称函数 $f(x)$是均匀变化的.

在中学的数学和物理学中，均匀变化的问题占据重要地位.例如，等速直线运动，路程随时间的变化是均匀的；匀加速直线运动，速度随时间的变化是均匀的；稳恒电流（直流电）通过导体截面的电量是随通电时间而均匀变化的；质量一定的物体温升所需的热量是随温度而均匀变化的.又如：在几何上，高度一定的矩形面积是随底边长而均匀变化的；截面积一定的直柱体的体积是随柱体的高度而均匀变化的；等等.尽管均匀变化问题的实际原型多种多样，但从数学的观点来看，一切均匀变化都可以用线性函数来表达.

定理 1　函数 $y=f(x)$是均匀变化的充分必要条件是：$f(x)$是线性函数

$$y=f(x)=Kx+b.$$

证　【充分性】　设 $y=Kx+b(K,b$ 为常数)，则

$$\Delta y = K(x+\Delta x)+b-(Kx+b)=K\cdot\Delta x,$$

即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=K \quad (K 为常数),$$

故 $y=Kx+b$ 是均匀的.

【必要性】　设 $y=f(x)$是均匀变化的，任取一组固定的对应值 $y_0=f(x_0)$，则对任意的 x，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-y_0}{x-x_0}=K \quad (K 为常数),$$