[illegible]中伟 编著

数学物理偏微分方程

Shuxue Wuli Pianweifen Fangcheng

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

数学物理偏微分方程

查中伟　　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

数学物理偏微分方程 / 查中伟编著. —成都：西南交通大学出版社，2005.2
ISBN 7-81057-924-X

Ⅰ. 数 … Ⅱ. 查… Ⅲ. 偏微分方程 – 高等学校 – 教材 Ⅳ. 0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 132382 号

数学物理偏微分方程

查中伟 编著

*

责任编辑 张宝华
封面设计 何东琳设计工作室
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：850 mm × 1168 mm 1/32 印张：7
字数：182 千字
2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-924-X / O · 086
定价：17.80 元

内 容 简 介

本书主要围绕数学物理中偏微分方程的各种典型定解问题及其相关解法进行讨论。在介绍基本概念、基本原理的同时，着重阐述求解偏微分方程定解问题的重要方法和技巧。全书共九章，分别介绍了行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法以及近似解法，最后简述了定解问题的适定性。全书典型例题较多，各章附有适量的习题，书末附有习题参考答案。

本书选材适当，应用性突出。可作为应用数学、信息与计算科学专业本科生和工科研究生的数学物理方程课程教学用书，也可作为从事该门课程教学的教师和工程技术人员的参考书。

前　言

随着科学技术的迅速发展，使得以物理学、力学、化学、生物学等自然科学和工程技术中出现的偏微分方程在其理论和应用两方面的研究越来越活跃，这样就不断加强了数学同其它学科的联系和相互渗透，同时促进了偏微分方程理论研究和实际应用的进一步发展。

数学物理方程是数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生的一门重要专业基础课，也是工程硕士研究生必不可少的基础理论课。为适应新世纪大众化高等教育改革与发展的要求，作者在多年为工科硕士研究生讲授数学物理方程课程教学实践的基础上，参阅了国内外相关教材和文献，编著了这本突出应用性的教学参考书。它可作为工科研究生、数学与应用数学和信息与计算科学专业本科生数学物理方程课程的教材，对应用数学工作者和工程技术人员也是一本合适的参考书。

由于数学物理偏微分方程直接联系着许多自然现象和工程技术，其范围广泛，内容丰富，并不断出现需要解决的新问题和提出解决问题的新方法。因此，本书旨在给读者提供数学模型的建立乃至问题求解的数学理论、方法和技巧。在阐述一般理论的同时，重点根据各类典型定解问题及其有关解法进行讨论。作者注意到数学理论、求解方法、物理背景三者的有机结合，使本书具有区别于其它相关书籍的鲜明特点。

全书共九章：第一章绪论，介绍偏微分方程的概念；第二章描述一些物理现象的典型数学模型的建立及基本定解问题；第三章

叙述了二阶线性偏微分方程的分类、化简及求部分简单方程通解的特征线法；第四章介绍了用于求解波动方程初值问题的行波法、球平均法和降维法；第五章详细介绍了应用十分广泛的含边界条件的分离变量法及其理论基础斯图姆—刘维尔理论；第六章介绍了富里埃变换和拉普拉斯变换的概念、性质，讨论了它们在求解偏微分方程无界区域定解问题中的应用；第七章介绍格林函数法，重点讲述了基本解和用格林函数法解边值问题；第八章重点介绍了工程技术中常用的三种近似方法，即差分法、变分法和有限元法；第九章针对典型方程的各种定解问题论证了它们提法的适定性。

本书的正式出版，得到了重庆三峡学院学科建设办公室的大力支持，借此深致谢忱！

由于作者学识有限，错误和不足之处在所难免，殷切地希望读者批评指正。

作者

2004年10月

目　录

第1章　绪　　论

本章主要介绍偏微分方程的一些基本概念和线性算子的运算性质，这是后续内容所必备的.

1.1　偏微分方程的基本概念

许多复杂的自然现象，其运动规律、过程和状态都是通过微分方程这种数学形式来描述的．当我们研究只有一个自变量的运动过程时出现的微分方程称为**常微分方程**．当一个微分方程除了含有几个自变量和未知数外，还含有未知数的偏导数时，称为**偏微分方程**．在偏微分方程中，偏导数自然是不可缺少的．例如：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \tag{1.1.1}$$

拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.1.2}$$

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t,u) \tag{1.1.3}$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_2 u+f(t,x,y) \tag{1.1.4}$$

Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \qquad (1.1.5)$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \qquad (1.1.6)$$

等都是偏微分方程. 其中，u 为未知函数，a 为常数，$a(x,y)$、f 为已知函数.

偏微分方程的一般形式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n},\cdots)=0 \qquad (1.1.7)$$

其中：F 为已知函数；$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量；u 是关于这些自变量的未知函数. 应注意 F 中必须含有未知函数 u 的偏导数.

偏微分方程(1.1.7) 中所含偏导数的最高阶数称为**该偏微分方程的阶**. 如方程(1.1.1) 是一阶偏微分方程，方程(1.1.2) ～(1.1.5) 是二阶偏微分方程，方程(1.1.6) 是四阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程对于未知函数及其所有偏导数都是线性的，则称之为**线性偏微分方程**，否则称为**非线性方程**. 如方程(1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.4)、(1.1.6) 都是线性方程；方程(1.1.3)、(1.1.5) 是二阶非线性方程.

对于一个非线性方程，如果未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的，则称之为**拟线性偏微分方程**. 如方程(1.1.3)、(1.1.5) 是拟线性偏微分方程.

我们将主要研究二阶线性偏微分方程，因为它们在物理、力学和其它自然科学以及工程技术中经常出现，常称为**数学物理方程**. n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu=f \qquad (1.1.8)$$

不失一般性，可以假设 $a_{ij}=a_{ji}$，且 a_{ij}、b_i、c 及 f 是空间 R^n 中某区

域 Ω 内的函数,如果方程(1.1.8)中的自由项 $f\equiv 0$,则称方程为**齐次方程**,否则称为**非齐次方程**.

设方程(1.1.7)的阶数为 m,函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域 $\Omega\subset R^n$ 中具有 m 阶连续偏导数,且代入方程(1.1.7)后成为恒等式,则称 u 为区域 Ω 内方程(1.1.7)的一个解. 容易验证函数 $u=(x+y)^2, v=\sin(x-y)$ 都是方程

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.9}$$

的一个解. 称方程(1.1.9)为**二维拉普拉斯**(Laplace)**方程或二维调和方程**. 由复变函数理论知,任何一个解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是方程(1.1.9)的解.

1.2 线性算子

本节简单介绍在偏微分方程理论中经常遇到的线性算子. 算子是一种数学法则,把它作用在一个函数上时,便产生另外一个函数. 例如,在下面的表达式

$$L[u]=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

$$M[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

中,$L=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3}{\partial y^3}$ 及 $M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 都是偏微分算子,当然也有其它类型的算子,如

$$P[u]=\int_a^b u(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau \quad (a、b\text{ 为常数})$$

$$Q[u]=u(x,c)+u_x(x,c) \quad (c\text{ 为常数})$$

其中:P 是一个积分算子;Q 是一个把两个自变量 x、y 的函数 u 变

成一个自变量 x 的函数 $Q[u]$ 的算子.

设 A、B 是两 个偏微分算子,如果把它们作用在函数 u 上时产生同样的结果,则称偏微分算子 A、B 是等价的,记为 $A=B$. 对充分可微的函数 u,此时显然有

$$A[u]=B[u] \tag{1.2.1}$$

两个偏微分算子的和与积分别定义为

$$(A+B)[u]=A[u]+B[u] \tag{1.2.2}$$

$$AB[u]=A(B[u]) \tag{1.2.3}$$

偏微分算子满足下列运算规律:

(1) 加法交换律

$$A+B=B+A \tag{1.2.4}$$

(2) 加法结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{1.2.5}$$

(3) 乘法结合律

$$(AB)C=A(BC) \tag{1.2.6}$$

(4) 乘法对加法的分配律

$$A(B+C)=AB+AC \tag{1.2.7}$$

(5) 乘法交换律

$$AB=BA \tag{1.2.8}$$

值得注意的是乘法交换律仅对常系数偏微分算子成立.

例 1.1 设 $A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $B=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial}{\partial y}$,于是

$$A[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y},\quad B[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$AB[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - y \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$BA[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + x \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - y \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

当 $x \neq 0$ 时，$AB[u] \neq BA[u]$.

设 L 是一个算子，如果满足

$$L[au + bv] = aL[u] + bL[v] \tag{1.2.9}$$

其中：a、b 为常数；u、v 为函数，则称 L 是**线性算子**.

两个自变量函数的二阶线性偏微分方程，其形式总可以写成

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}u_{yy} + \\ b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1.2.10}$$

若记

$$L = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c$$

为线性偏微分算子，则方程(1.2.10)可表示为简捷形式

$$L[u] = f \tag{1.2.11}$$

有时略去括号，直接写成 $Lu = f$.

习　题　一

1. 对下列偏微分方程，指出它的阶，并指出它是线性的、拟线性的或是非线性的. 若是线性的，再指出它是齐次的还是非齐次的.

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} = y$;　(2) $u \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(3) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial y} = 1$;　(4) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$;

(5) $u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$;

(6) $\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+u^3=g(x,y)$.

2. 设 $F(\xi)$、$G(\xi)$ 是任意二次可微函数，λ_1、λ_2 为常数，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，验证 $u=F(x+\lambda_1 y)+G(x+\lambda_2 y)$ 满足方程

$$u_{yy}-(\lambda_1+\lambda_2)u_{xy}+\lambda_1\lambda_2 u_{xx}=0.$$

3. 证明：$u=f(xy)$ 满足方程 $xu_x-yu_y=0$.

第 2 章　数学物理中的偏微分方程模型

本章通过几个不同的物理问题来推导出三类典型的偏微分方程，并介绍它们各种定解问题的提法和适定性问题．因为偏微分方程大多是物理现象、自然规律的数学描述，所以常可以从具体的物理现象中得到方程解法的启示．最后介绍叠加原理，这是以后各种解法的基础．

2.1　数学物理偏微分方程的推导

2.1.1　三类典型方程

在物理、力学、工程技术等问题运动状态的数学描述中，常出现下面三种类型的二阶常系数线性偏微分方程：

(1) 波动方程

$$a^2 u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$$

(2) 热传导方程

$$u_t = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$$

(3) 泊松方程

$$\Delta_3 u = f(x,y,z)$$

其中：$\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维 Laplace 算子；a 为常数；

$f(t,x,y,z)$ 及 $f(x,y,z)$ 都是已知函数．方程(3) 中，未知数 $u = u(x,y,z)$ 只是空间变量 x、y、z 的函数，而与时间 t 无关；方程(1)、(2) 的未知数 u 还依赖时间变量 t，即 $u = u(t,x,y,z)$.

许多运动过程所描述的物理现象尽管各不相同，但从数量关系上均可以用上述三个方程之一来描述．例如，声波的传播、弹性体的振动等振动过程所导出的就是**波动方程**．物体内的热传导、液体中溶质的扩散运动过程等都可以归结为**热传导方程**(又称为**扩散方程**)．因为上述两种物理过程都是随时间发展的过程，所以有时称方程(1)、(2) 为**发展方程**．如果运动过程进入稳定状态，即表征运动过程的量 u 不再随时间改变，那么就有 $u_t = 0, u_{tt} = 0$，于是得到方程(3)，我们称它为**泊松(Poisson) 方程**．所以泊松方程是描述稳状物理现象的，如静电场、定常流场、稳定温度场的分布等.

另一方面，实际中的许多偏微分方程，可以通过简单的变换化成上述三类方程之一，或者虽然不能直接化成这些形状，但也可以效仿三者之一的有关问题来处理．因此这三类方程是讨论的重点．

2.1.2 弦的横向微振动问题

考察一长为 l 的两端固定的拉紧的弦．我们的任务是要确定弦横向微振动的运动方程，用它来描述在给定一个初始扰动后任一时刻 t 的弦的位移 $u(x,t)$. 弦振动是一个力学系统，所以它的运动应符合牛顿运动定律，故可以对它作如下假设：

(1) 设弦未受扰动时的平衡位置在 x 轴上，弦上各点的位移发生在 (x,u) 平面内且垂直于 x 轴，以 $u(x,t)$ 表示弦上点 x 处在时刻 t 的位置，如图 2.1 所示．

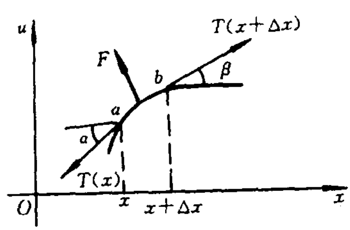

图 2.1