CENTURY 21

高等学校教材

电子信息系列

信号与系统

（第2版）

段哲民　范世贵　编著

Electronic Information

西北工業大學出版社

高等学校教材

信号与系统

（第2版）

段哲民　范世贵　编著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是根据教育部颁布的高等工业学校《信号与系统课程教学基本要求》编写的。全书内容共九章:信号与系统的基本概念;连续系统时域分析;连续信号频域分析;连续系统频域分析;连续系统复频域分析;复频域系统函数与系统模拟;离散信号与系统时域分析;离散信号与系统z域分析;状态变量法。每章后有习题。

本书可作为高等工业学校电子、通信、自动化、自控、计算机、信号检测、电力等专业本科生信号与系统课程的教材,也可供其他专业选用和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/段哲民,范世贵编著.—2版.—西安:西北工业大学出版社,2005.1
ISBN 7-5612-1845-1

Ⅰ.信… Ⅱ.①段… ②范… Ⅲ.信号系统-高等学校-教材 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第002011号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:029—88493844
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本:787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张:25.75
字　　数:624千字
版　　次:2005年1月 第2版 2005年1月第1次印刷
定　　价:30.00元

第 2 版前言

本书的第 1 版已出版、发行 8 年，本版为修订的第 2 版。这次修订的目的旨在适应现代科技和教育改革深入发展的需要以及我国国民经济和社会发展对培养高质量人才的需求。

信号与系统课程，在我国理工科大学单独设课，开始于 1979 年，到现在已有 25 年的历史。25 年的借鉴学习与实践探索，25 年的开拓创新与经验总结，使我们对这门课程在教学计划中的地位与作用、性质与任务有了日趋成熟的认识；使我们对这门课程的内容深度、新度、量度、广度的理解和把握日趋明确，在处理与工程数学、电路基础、数字信号处理、通信原理、自动控制理论等课程的分工方面更加协调与合理。随着教学改革的深入和现代科技的飞速发展，我们的教学思想、教学方法、教学理念也在发生着变化与变革。我们就是在这样的大背景下对本书的第 1 版进行修订的。

与第 1 版相比，第 2 版保持了第 1 版重视基本内容、基本概念、基本理论和基本方法，精选传统内容，适度反映新内容，理论联系实际，讲究教学方法，适于自学和教学等特色和风格。第 2 版更加重视了科技创新意识、科学研究与技术研究方法论的培养，更加重视了科学思想方法、智力发展和非智力素质的培养，同时也增加了一些反映近年来国内外教学内容和教学法研究的新成果。

第 2 版在宏观结构体系方面没有变动，在具体内容方面有所删减、补充或加强。第一章加强了信号的时域特性、时域变换与时域运算的分析，加强了线性时不变系统性质的应用。第二章删去了系统的自然频率、求系统零状态响应的杜阿密尔积分法、卷积积分的数值计算等内容，加强了系统数学模型的建立及用卷积积分法求系统零状态响应的分析，删去了用时域经典法求系统零状态响应的分析。第三章将用完备的正交函数集表示信号改为打“ * ”号的内容。第四章加强了理想低通滤波器响应特性、抽样信号与抽样定理的分析。第五章降低了对拉普拉斯正、反变换求解的要求，加强了用拉普拉斯变换法求系统响应的分析。第六章删去了系统函数的分类一节，加强了系统函数的应用、系统模拟、信号流图及系统稳定性的分析。第七章加强了离散信号时域特性、时域变换与时域运算的分析，加强了用卷积和法求离散系统零状态响应的分析。第八章降低了对 z 正、反变换求解的要求，加强了离散系统的 z 域分析及 z 域系统函数应用的分析。第九章作了适当的微调，将状态空间与状态轨迹一节改为打“ * ”号的内容，将状态方程的数值解一节删去。对各章中计算机分析与求解的内容，全部用最新程序语言进行了重新编写。第 2 版对各章的习题全部重新进行了精选，使习题的数量适中，质量提高，使基本题、中等题、提高题的比例更加体现教学的基本要求。书后给出了各章习题的答案。各章习题的全部解答可参考西北工业大学出版社出版的与本书配套的《信号与系统导教 · 导学 · 导考》一书。

书中标有“ * ”号的仍为选学内容，供学有余力或有不同专业要求的学生自学，以拓宽知

识面。

段哲民、范世贵、王淑敏参加了本版的修订，李辉参加了本版计算机辅助程序的编写。

书中不足和错误之处在所难免，敬请指正。意见寄西北工业大学电子信息工程学院。

编著者

2004年10月

目　　录

第一章　信号与系统的基本概念

1-1　信号的定义与分类

一、信号的定义

广义地说，信号就是随时间和空间变化的某种物理量或物理现象。例如在通信工程中，一般将语言、文字、图像、数据等统称为消息，在消息中包含着一定的信息。通信就是从一方向另一方传送消息，给对方以信息。但传送消息必须借助于一定形式的信号（光信号、电信号等）才能传送和进行各种处理。因而，信号是消息的载体，是消息的表现形式，是通信的客观对象，而消息则是信号的内容。

若信号表现为电压、电流、电荷、磁链，则称为电信号，它是现代科学技术中应用最广泛的信号。本书将只涉及电信号。

信号通常是时间变量 t 的函数。信号随时间变量 t 变化的函数曲线称为信号的波形。

应当注意，信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。信号一般是时间变量 t 的函数，但函数并不一定都是信号，信号是实际的物理量或物理现象，而函数则可能只是一种抽象的数学定义。

本书对信号与函数两个概念混用，不予区分。例如正弦信号也说成正弦函数，或者相反；凡提到函数，指的均是信号。

信号的特性可从两方面来描述，即时域特性与频域特性。信号的时域特性指的是信号的波形，出现时间的先后，持续时间的长短，随时间变化的快慢和大小，重复周期的大小等。信号时域特性的这些表现，反映了信号中所包含的信息内容。信号频域特性的内涵，我们将在第三章中阐述。

二、信号的分类

按不同的分类原则，信号可分为：

（1）确定信号与随机信号。按信号随时间变化的规律来分，信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时，信号有确定的数值，其所含信息量的不同是体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。电路基础课程中研究的正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定信号的例子。

随机信号不是时间 t 的确定函数，它在每一个确定时刻的分布值是不确定的，只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布（概率分布）。空中的噪音，电路元件中的热噪声电流等，都是随机信号的例子。

实际传输的信号几乎都是随机信号。因为若传输的是确定信号，则对接收者来说，就不可能由它得知任何新的信息，从而失去了传送消息的本意。但是，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性，例如在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定，即可近似地看成是确定信号。

随机信号是统计无线电理论研究的对象。本书中只研究确定信号。

(2) 连续时间信号与离散时间信号。按自变量 t 取值的连续与否来分，信号有连续时间信号与离散时间信号之分，分别简称为连续信号与离散信号。

连续信号自变量 t 的取值是连续的，电路基础课程中所引入的信号都是连续信号。离散信号自变量 t 的取值不是连续而是离散的，其定义与内涵，在本书第七、八两章中介绍。

(3) 周期信号与非周期信号。设信号 $f(t)$，$t \in \mathbf{R}$，若存在一个常数 T，使得

$$f(t-nT)=f(t) \qquad n \in \mathbf{Z} \tag{1-1}$$

则称 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号。从此定义看出，周期信号有三个特点：

1) 周期信号必须在时间上是无始无终的，即自变量时间 t 的定义域为 $t \in \mathbf{R}$。

2) 随时间变化的规律必须具有周期性，其周期为 T。

3) 在各周期内信号的波形完全一样。

不满足式(1-1)关系与上述条件的信号即为非周期信号。

(4) 正弦信号与非正弦信号。

(5) 功率信号与能量信号。

(6) 一维信号、二维信号与多维信号。电视图像是二维信号的例子。

本书主要讨论的时间信号是一维信号，用 $f(t)$ 表示。表示 $f(t)$ 的曲线，称为信号的波形。

三、有关信号的几个名词

以下用 $f(t)$ 表示信号。

1. 有时限信号与无时限信号

若在有限时间区间($t_1 < t < t_2$) 内信号 $f(t)$ 存在，而在此时间区间以外，信号 $f(t)=0$，则此信号即为有时限信号，简称时限信号，否则即为无时限信号。

2. 有始信号与有终信号

设 t_1 为实常数。若 $t<t_1$ 时 $f(t)=0$，$t>t_1$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 即为有始信号，其起始时刻为 t_1。设 t_2 为实常数。若 $t>t_2$ 时 $f(t)=0$，$t<t_2$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 即为有终信号。其终止时刻为 t_2。

3. 因果信号与反因果信号

若 $t<0$ 时 $f(t)=0$，$t>0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 为因果信号，可用 $f(t)U(t)$ 表示。其中 $U(t)$ 为单位阶跃信号。因果信号为有始信号的特例。若 $t>0$ 时 $f(t)=0$，$t<0$ 时 $f(t)\neq 0$，则 $f(t)$ 即为反因果信号，可用 $f(t)U(-t)$ 表示。反因果信号为有终信号的特例。

例 1-1 试判断下列各信号 $f(t)$ 是否为周期信号。若是，其周期 T 为多少？

(1) $f(t)=\cos(7\pi t+60°)$　　(2) $f(t)=\cos 2t+\sin 3t$

(3) $f(t)=\cos 10t+\sin 10t$　　(4) $f(t)=\sin 2t+\cos \pi t$

(5) $f(t)=t^2+1$　　(6) $f(t)=\sin 2\pi t+\cos 5\pi t$

(7) $f(t)=(\sin 2t)^2$　　(8) $f(t)=e^{-2t}\cos(2\pi t+30°)$

(9) $f(t) = 10\cos 4\pi t U(t)$

解 (1) 为周期信号,其周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7\pi} = \frac{2}{7}$ s

(2) $f(t)$ 为两个子信号 $f_1(t) = \cos 2t$ 与 $f_2(t) = \sin 3t$ 的和,即 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$,且 $f_1(t) = f_1(t - n_1 T_1)$,$f_2(t) = f_2(t - n_2 T_2)$,其中 $n_1 \in \mathbf{Z}$,$n_2 \in \mathbf{Z}$。则当$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$($n_1$ 与 n_2 必须为不可约的整数)时,$f(t)$ 即为周期信号,其周期 $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$。

今子信号 $\cos 2t$ 的周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ s,子信号 $\sin 3t$ 的周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ s。故有

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2}$$

由于$\frac{3}{2}$已为不能再约的整数比,故 $f(t)$ 为周期信号,其周期 T 为

$$T = 2T_1 = 2\pi \text{ s} \quad 或 \quad T = 3T_2 = 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi \text{ s}$$

(3) 子信号 $\cos 10t$ 的周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ s,子信号 $\sin 10t$ 的周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ s。故有

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{0.2\pi}{0.2\pi} = \frac{1}{1}$$

可见 $f(t)$ 为一周期信号,其周期 T 为

$$T = 1T_1 = 1T_2 = 0.2\pi \text{ s}$$

此题也可用下述方法判断,即

$$f(t) = \sqrt{2}\cos(10t - 45°)$$

可见 $f(t)$ 为周期信号,其周期为 $T = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ s。

(4) 子信号 $\sin 2t$ 与 $\cos \pi t$ 的周期分别为 $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ s,$T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s。故有

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$$

可见 $\frac{T_1}{T_2}$ 不是整数比,故 $f(t)$ 不是周期信号。

(5) 不是周期信号。

(6) 子信号 $\sin 2\pi t$ 与 $\cos 5\pi t$ 的周期分别为 $T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ s,$T_2 = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$ s。故有

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

可见 $f(t)$ 为周期信号,其周期为 $T = 2T_1 = 5T_2 = 2$ s。

(7) 因 $f(t) = (\sin 2t)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t$,故 $f(t)$ 为周期信号,其周期 $T = \frac{2\pi}{4} = 0.5\pi$ s。

(8) 因 $f(t)$ 的振幅是随时间按指数规律变化的,故 $f(t)$ 不是周期信号。

（9）因 $f(t)$ 不是无始无终的信号，而是有始无终的信号，故不是周期信号。

1－2　基本的连续信号及其时域特性

所谓基本信号，是指在工程实际与理论研究中经常用到的信号。这些信号的波形及其时间函数表达式都十分简洁，用这些信号还可以组成一些比较复杂波形的信号。本节中仅介绍基本的连续信号，离散信号将在第七章中介绍。

一、直流信号

直流信号的函数定义式为

$$f(t) = A \qquad t \in \mathbf{R}$$

式中，A 为实常数，其波形如图 1－1 所示。若 $A = 1$，则称之为单位直流信号。直流信号也称常量信号。

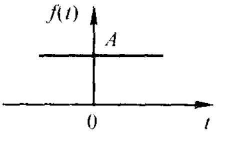

图　1－1

二、正弦信号

正弦信号的函数定义式为

$$f(t) = A\cos(\omega t + \psi) \qquad t \in \mathbf{R}$$

式中，A、ω、ψ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相角，均为实常数。

正弦信号有如下性质：

（1）是无时限信号。

（2）是周期信号，其周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$。

（3）其微分仍然是正弦信号，即

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \psi)] = \omega A\cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

可见其微分信号 $f'(t)$ 与原信号 $f(t)$ 相比仍是正弦信号，仅是振幅变为 ωA，初相角增加了 $\frac{\pi}{2}$。

（4）满足如下形式的二阶微分方程，即

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$$

此性质非常有用。

三、单位阶跃信号

单位阶跃信号一般用 $U(t)$* 表示，其函数定义式为

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

也可定义为

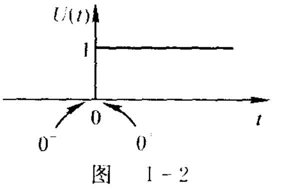

图　1－2

---

* 有的书上也用 $\varepsilon(t)$ 表示单位阶跃信号。

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2} & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

其波形如图 1-2 所示。

可见,$U(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生了阶跃,从 $U(0^-)=0$ 阶跃到 $U(0^+)=1$,阶跃的幅度为 1。

单位阶跃信号 $U(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能,即将 $f(t)$ 乘以 $U(t)$,所得 $f(t)U(t)$ 即成为因果信号,如图 1-3 所示。

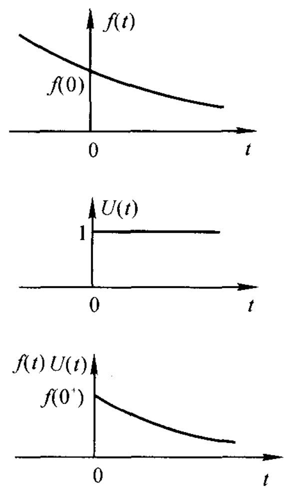

图 1-3

例 1-2 试画出下列函数的波形。

(1) $f(t)=U(t^2+3t+2)$ (2) $f(t)=U(\sin\pi t)$

解 (1) 令 $\tau=t^2+3t+2=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,$\tau$ 是 t 的一元二次函数,τ 随 t 的变化曲线如图 1-4(a) 所示。故有

$$f(t)=U(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0\\ 0 & \tau<0\end{cases}$$

故 $f(t)$ 的波形如图 1-4(b) 所示。

(2) $$f(t)=U(\sin\pi t)=\begin{cases}1 & \sin\pi t>0\\ 0 & \sin\pi t<0\end{cases}$$

故得 $f(t)=U(\sin\pi t)$ 的波形如图 1-5 所示。

可见,$f(t)$ 为一周期信号,其周期 $T=2$。

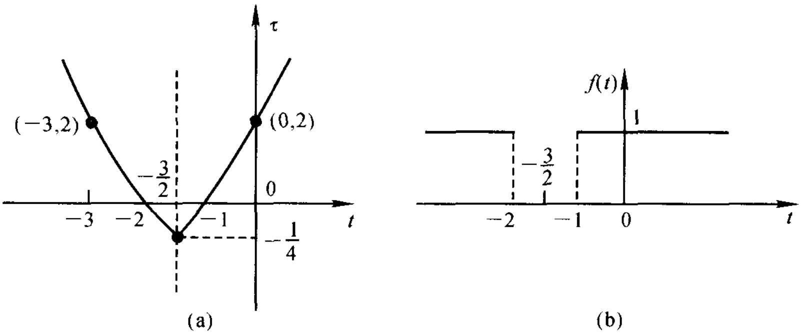

图 1-4

四、单位门信号

门宽为 τ、门高为 1 的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示,其函数定义式为

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1 & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & t>\frac{\tau}{2},\ t<-\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

其波形如图 1-6(a) 所示。

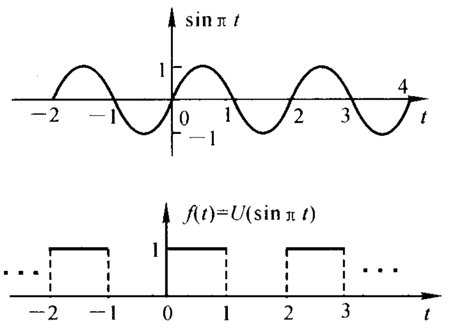

图 1-5

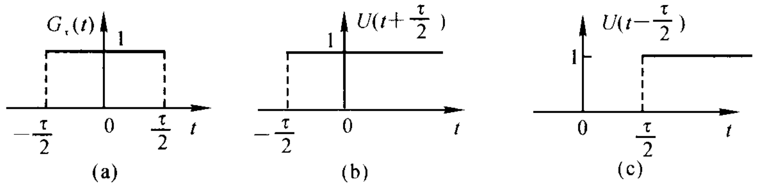

图 1-6

单位门信号可用两个分别在 $t=-\frac{\tau}{2}$ 和 $t=\frac{\tau}{2}$ 出现的单位阶跃信号之差表示，如图 1-6(b)，(c) 所示。即

$$G_\tau(t)=U\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-U\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

五、单位冲激信号

1. 定义

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示，其函数定义式为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且面积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-7(a) 所示，即用一粗箭头表示，箭头旁标以(1)，表示 $\delta(t)$ 图形下的面积为 1，称为冲激函数的强度，简称冲激强度。

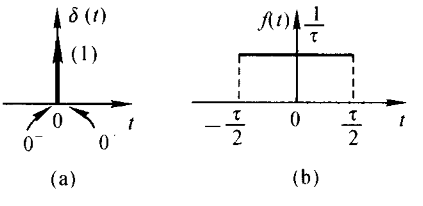

图 1-7

单位冲激信号可理解为门宽为 τ、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数 $f(t)$（见图 1-7(b)）在 $\tau\to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}f(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\tau\to 0}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$$

推广

(1) 设 t_0 为正实常数,则有

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$$

其图形如图 1-8(a) 所示,即 $\delta(t)$ 在时间上延迟了 t_0。

(2) 若冲激函数图形下的面积为 A,则可写为

$$A\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=A$$

即冲激强度为 A,其图形如图 1-8(b) 所示,箭头旁标以(A)。

(3) 若 $\delta(t)$ 在时间上超前了 t_0,则应写为 $\delta(t+t_0)$,其图形如图 1-8(c) 所示。

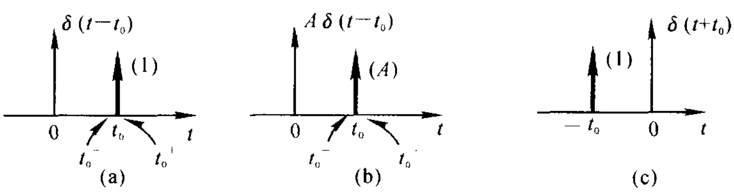

图 1-8

2. 性质

(1) 设 $f(t)$ 为任意有界函数,且在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 时刻连续,其函数值分别为 $f(0)$ 和 $f(t_0)$,则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘,就等于单位冲激函数出现时刻,$f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘,亦即使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$,如图 1-9 所示。

(2) 抽样性(筛选性)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$

即任意的有界时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘后在无穷区间($t\in\mathbf{R}$) 的积分值,等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$。此即为冲激函数的抽样性,也称筛选性,$f(0)$ 或

$f(t_0)$ 即为 $f(t)$ 在抽样时刻的抽样值，$f(t)$ 为被抽样的函数。

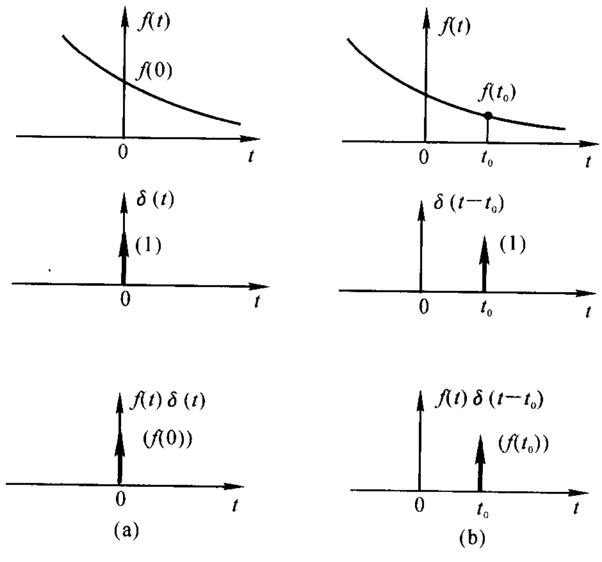

图 1-9

(3) $\delta(t)$ 为偶函数，即有

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

证明　给上式等号两端同乘以 $f(t)$ 并进行积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}(-t')=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')f(-t')\mathrm{d}t'=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')f(0)\mathrm{d}t'=f(0)$$

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

故得

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

证毕

推广

$$\delta(t-t_0)=\delta[-(t-t_0)]$$

(4)　$$\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t)\qquad (a\text{ 为大于零的实常数})$$

证明　设 $t'=at$，则 $t=\frac{1}{a}t'$，$\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}t'$；且当 $t=-\infty$ 时，$t'=-\infty$；当 $t=\infty$ 时，$t'=\infty$。故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\frac{1}{a}\mathrm{d}t'=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\mathrm{d}t'=\frac{1}{a}$$

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}$$

故得

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \qquad \text{证毕}$$

推广

① $\delta(at - t_0) = \delta\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] = \frac{1}{a}\delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$，　② $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}f(0)$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at - t_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right)$

3. $\delta(t)$ 与 $U(t)$ 的关系

$\delta(t)$ 与 $U(t)$ 互为微分与积分的关系，即

$$U(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \quad , \qquad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

现证明前一式：当 $t < 0$ 时有 $\delta(t) = 0$，故有

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} 0 \times \mathrm{d}\tau = 0$$

当 $t > 0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} 0 \times \mathrm{d}\tau + \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{0^+}^{t} 0 \times \mathrm{d}\tau = 0 + 1 + 0 = 1$$

故得

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{Bmatrix} 0 & t < 1 \\ 1 & t > 0 \end{Bmatrix} = U(t) \qquad \text{证毕}$$

式 $\delta(t) = \frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$ 的成立是不言而喻的，无需证明。

推广

$$U(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\mathrm{d}\tau$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{\mathrm{d}U(t - t_0)}{\mathrm{d}t}$$

例 1-3　试画出 $f(t) = \delta[\sin\pi t](t \geqslant 0)$ 的波形。

解　$f(t) = \delta[\sin\pi t] =$

$$\begin{cases} \infty & \sin\pi t = 0 \\ 0 & \sin\pi t \neq 0 \end{cases}$$

其波形如图 1-10 所示。

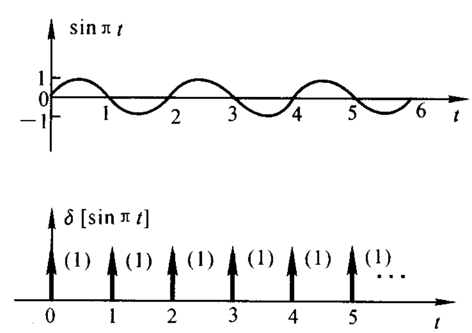

图　1-10

例 1-4　求下列积分。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta(-2t)\mathrm{d}t$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta(1 - 2t)\mathrm{d}t$

解