现代精算风险理论

〔荷〕R.卡尔斯　M.胡法兹　J.达呐　M.狄尼特 著
唐启鹤　胡太忠　成世学 译

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

现代精算风险理论

〔荷〕R.卡尔斯　M. 胡法兹　J. 达呐　M. 狄尼特 著

唐启鹤　胡太忠　成世学 译

科 学 出 版 社

北　京

图字: 01-2004-6065

内 容 简 介

本书对非寿险数学做了一个全面详尽的概述，内容包括期望效用模型、个体风险模型、聚合风险模型、破产概率、保费原理、奖惩系统、信度理论、广义线性模型、IBNR 技巧和风险排序. 为了便于教学，书中收入了丰富的例题，章末附有习题. 书中的内容和方法也适用于非寿险的研究，精算领域其它分支学科的研究，以及在精算实务中的应用研究.

本书可作为精算学、概率统计及有很强保险背景的定量金融、经济学专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供有关科研人员参考.

Translation from the English language edition
Modern Actuarial Risk Theory
by Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene and Michel Denuit

图书在版编目(CIP)数据

现代精算风险理论/(荷)卡尔斯(Kaas, R.)等著;唐启鹤等译. —北京: 科学出版社,2005
ISBN 7-03-014530-5

Ⅰ.现… Ⅱ.①卡… ②唐… Ⅲ.保险-精算学 Ⅳ.F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 121056 号

责任编辑: 毕　颖　姚莉丽 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2005 年 3 月第 一 版　开本: B5(720×1000)
2005 年 3 月第一次印刷　印张: 15 3/4
印数: 1—4 000　字数: 288 000
定价: 32.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

中 文 版 序[1]

大约 25 年前，本书第一、二作者开始在 Amsterdam 大学和 K. U. Leuven 大学讲授非寿险精算学. 那时我们找不到一本真正适用的教材，于是只好对自己的讲义一遍遍地进行修改、增补，逐渐形成了本书的荷兰文版本. 之后，我们把本书由荷兰文翻译成英文，又邀请现在的译者把它由英文翻译成中文. 我们这样做的初衷是使尽可能多的读者能够避开如我们当初撰写本书时走过的一些弯路，从而尽快进入精算风险理论领域.

在本书的形成过程中，我们认真挑选了一些与精算学的理论和实践紧密相关的内容. 除了传统的非寿险精算学内容，如 Panjer 递归公式、经典破产理论以及信度理论外，我们还收录了广义线性模型、IBNR 理论以及风险排序、同单调等.

我们有幸于 2004 年初访问了中国的一些高校，在访问期间就精算学的教学和科研等问题与中国学者们进行了有益的探讨. 在此，我们感谢严加安教授(中国科学院数学与系统科学研究院)，吴荣教授(南开大学数学系)，吴岚教授(北京大学金融数学系)，林正炎教授(浙江大学数学系)，王过京教授(苏州大学数学系)，汪荣明教授(华东师范大学统计系)，张文修教授、梅长林教授(西安交通大学理学院)，以及吴启宏教授(香港大学统计与精算系)等. 我们希望将来能够与包括上述同仁在内的中国学者们进行更广泛的交流与合作，这无疑会使得广大的精算考生从中受益.

我们还希望借此机会感谢我们的同事唐启鹤博士，这不仅因为他在整个翻译过程中付出的大量劳动，更因为他在过去两年在 Amsterdam 大学进行博士后研究期间卓有成效的科研成果和令人愉快的合作精神. 我们为本书中译本的成功问世而向胡太忠教授和成世学教授表示衷心的祝贺和感谢. 此外，Elias Shiu 教授(Iowa 大学统计与精算系)、严加安教授、杨海亮教授(香港大学统计与精算系)等为发起这一计划提供过大量的支持，我们一并致谢.

R. 卡尔斯(Amsterdam)
M.J. 胡法兹(Leuven)
J. 达呐(Leuven)
M. 狄尼特(Louvain-la-Neuve)

---

1 本书英文版的相关介绍详见 http://www1.fee.uva.nl/ke/act/people/kaas/ModernART.htm

英文版序

风险理论已经被公认为是精算学教育中一门重要的学科，这可以由精算学会列出的教学大纲以及精算咨询委员会的推荐意见中得到验证. 从而这一领域急需一本内容取材广泛的教科书.

欣闻这本关于风险理论的新书问世，我很高兴，该书在许多方面具有开创性的意义. 用溜冰或者健身术的行话来说，本教程由两部分构成，其一是必须掌握的规定部分，其二是可以自由选择的部分. 这必须掌握的第一部分包括第 1~4 章，它们与精算学会指定的官方材料相当. 这个特点也使得精算考生可以很好地使用本书去准备他们的考试. 本书的其余章节具有更自由的写作风格，例如第 10 章风险排序，正是该书作者们潜心研究的领域. 在此，我特别强调一下第 8 章，就本人所知，这部分内容应该是风险理论中第一次以书的方式介绍广义线性模型.

纵观全书，作者们为使这本著作便于为教学使用而特意做了许多努力，清晰的写作语言和内容丰富的习题便是佐证. 因此，我大力推荐这本专著作为教科书使用.

我为这一作品的问世而向作者们表示祝贺，同时也愿以广大师生的名义向他们表示感谢，衷心感谢他们为把本书翻译成英文而做的辛勤劳动. 我确信，本书作为教材一定能成功地为精算师生所广泛使用.

H. U. Gerber

2001 年 10 月 3 日于 Lausanne

前　　言

本书对非寿险数学做了一个全面而详尽的概述. 本书最初是为 Amsterdam 大学和 Leuven 大学的精算学教学而写的, 但它的荷兰文版本已被其它几所大学以及荷兰精算学会所使用. 本书为希望在精算科学领域做深入理论研究的读者提供一个衔接. 书中的内容和方法不但适用于非寿险的研究, 而且同样适用于精算科学领域中其它分支的研究, 以及在精算实务中的应用研究.

本书除了一些标准理论外, 还包括许多与精算实务息息相关的研究方法, 如汽车保险保单的评估、保费原理以及 IBNR 模型等. 同时, 广义线性模型作为重要的精算统计工具也被囊括在书中, 该模型呈现出一些普通线性模型和回归所不具备的新特征, 从而为计量经济学家喜好. 此外, 我们还对信度理论给出一个简短的导引. 书中另一个能够激起风险理论专家浓厚兴趣的专题是对风险排序的研究.

本书可以反映精算风险理论领域研究的现状. 书中收录的大量成果均为上个世纪最后 10 年在精算领域发表的最新成果.

研究的模型和范例

在人寿保险学的模型中一个基本的特征是时间要素, 一般来说, 由起初的交纳保费到后来领取相应的养老金之间的时间跨度是几十年. 在非寿险数学中这种时间特征就显得不那么突出了, 然而需要建立的统计模型一般会更复杂一些. 本书前五章的内容属于非寿险精算学的基础部分, 其余章节简明扼要地介绍一些被传统的观点认为属于非寿险精算学的其它课题.

1. 期望效用模型

保险人的存在是可以用期望效用模型进行解释的一个最好的例子. 在期望效用模型中, 被保险人是一个风险厌恶型的理性决策者, 为了争取一个安全的金融地位, 由 Jensen 不等式, 他会心甘情愿地付给保险人比自己面临的理赔额期望值多的保费. 这是一个要在不确定的情况下进行决策的体系, 在这一体系下, 被保险人做决策凭借的不是直接比较赔付额期望的大小, 而是比较与赔付额密切相关的期望效用.

2. 个体风险模型

在个体风险模型以及下面要提到的聚合风险模型中, 关于保险合同的一个风险组合的总理赔额常常被表示为一个具有一定含义的随机变量. 举例来说, 我们

需要计算事件"一定的资金足以赔付这些理赔"的概率，或者计算该风险组合的水平 95%的在险价值(VaR)，即该风险组合累计分布函数的 95%的分位点. 在个体模型中，理赔总额被建模为由各保单生成的独立理赔变量之和. 这些理赔往往不可以假设为纯离散或者纯连续的随机变量. 对此我们将提出能够涵盖上述两种情况的一个记号. 尽管个体风险模型是最现实合理的，但是由于我们可获得的是被取整后的数据，而且不总是具有密度函数，该模型有时使用起来很不方便. 为了获得这一模型下的许多结果，我们将研究不同于卷积的其它手法，如在一些特殊场合我们采用类似于矩母函数的那样变换会有益于问题的解决. 我们也给出基于分布函数适当阶矩的逼近手法. 由于中心极限定理只涉及到两个矩，对于一些右尾很重的分布函数来说，它不可能提供足够的精度. 于是我们尝试两种涉及到分布函数三个矩的更精确的方法，它们是平移伽玛近似和正态功效近似.

3. 聚合风险模型

聚合风险模型常常被用来近似个体风险模型. 在聚合风险模型中，风险组合被看作是一个随着时间变化而逐渐产生新理赔的保险风险过程. 这些理赔被假设为独立同分布的随机变量序列，并且独立于时间段内的理赔次数. 于是，总理赔额便可以表示为一个由独立同分布的理赔额变量相加构成的随机和. 通常，我们还假设理赔次数是一个具有特定均值的泊松变量. 至于单个理赔额的累积分布函数，我们用各保单理赔的累积分布函数的平均值来代替. 这些假设使得模型具有良好的性质，便于计算. 我们在书中给出了一些计算理赔总额分布函数的一些技巧，包括 Panjer 递归公式等.

4. 破产模型

在破产模型中需要研究的问题是保险人运营的稳健性. 设逐年收取的保费固定不变，保险人在时间 $t=0$ 的初始资本为 u，他的资本金会随着时间线性递增，但每当一个理赔发生时资本金过程就会有一个下跳. 如果在某个时刻该资本金过程取负值，我们便说破产事件发生了. 假设年保费和理赔过程保持不变，当研究保险人的资产与他的负债是否匹配时，破产概率是一个很好的指标. 如果其资产与负债匹配得不好，那么保险人会采取一些措施来加以调整，如增加再保份额，提高保费或者增加初始资本金.

只有当理赔额分布为指数分布的混合或线性组合时，计算破产概率的解析方法才是有效的. 当理赔额服从离散分布而且没有太多的支撑点时，可以编制一些计算程序来实现. 我们还可以给出破产概率精确的上下界估计. 在很多场合下，我们更关心的是破产概率的一个简单的指数型上界，即 Lundberg 界，而不是破产概率本身.

5. 保费原理

现在假设风险变量的累积分布函数已知, 或者至少它的一些特征如期望和方差等已知, 一个保费原理会对该风险变量赋予一个实数值, 用以表示对承担该风险一方的经济补偿. 注意我们现在仅仅研究风险的保费原理, 而不考虑保险公司运作时的一切附加费用. 由大数定律, 为了避开终极破产事件的发生, 保费总额必须至少等于理赔总额的期望值. 但在事实上, 因为保险人的风险系统很大, 在征收的保费中应该还含有一个正的负荷. 保险人通过这些正的负荷预先建造了一个资金储备, 来达到避开破产事件发生的目的. 我们将介绍一些保费原理, 以及刻画保费原理的一些最重要的性质. 保费原理的选择强烈地依赖于这些性质所起的作用, 没有一致最优的保费原理.

6. 奖惩体系

对于一些险种特别是汽车保险来说, 仅仅依据预先知道的那些因素去决定一种保费征收办法是不够的. 一些风险要素如保单持有人的种族和性别等, 虽然它们直接作为保费制定的依据是不恰当的, 但是它们的作用应该被考虑进去; 此外, 还应该考虑到有一些不可观察的风险要素的作用, 这些风险要素包括保单持有人的身体健康状况、反应能力和发生车祸的倾向性等. 为此, 一些国家运用一种经验评估体系, 在这样的体系中, 保险公司一方面凭借那些预先知道的风险要素如保险类型、汽车价格和载重量等来制定的保费, 另一方面又使用某种奖惩体系对保费进行调整, 就是说, 保单持有人能够在没有出现理赔的年份少缴保费, 而在有一次乃至多次理赔记录的年份追加更多的保费. 这种方式征收的保费很好地反映了汽车驾驶员的驾驶水平. 这种情形可以被模拟为一个 Markov 链.

7. 信度理论

同一保单下的理赔情况会由于两种不同的原因而有所差别. 第一个原因是风险变量的内在属性, 该属性通过一个风险参数表现出来. 假设在相当长的一个期限内保单被监控没有变化, 那么上述风险参数代表年理赔额的平均情况. 导致同一保单下理赔情况不同的另一个原因是保单持有人的运气成分, 这个纯随机的运气因素导致了理赔额逐年偏离上述风险参数. 信度理论认为风险变量的属性由满足一定结构的分布函数表现出来的, 并且在给定风险属性的条件下, 实际理赔情况是从与平均值分布相同的母体中抽取的一个样本. 在最小二乘意义下, 对下一年理赔情况的最佳线性预测是单一合同理赔情况与整个风险组合理赔情况的某种形式的加权平均. 这里提到的加权因子可以视为附着在单一理赔情况的一个信度因子, 并且称这样计算出来的保费为信度保费. 作为一个特例, 基于伽玛-泊松混合模型, 我们研究汽车保险的一个奖惩系统.

8. 广义线性模型

在精算统计学领域的许多问题可以归结为广义线性模型 (GLM). 除了假设误差项服从正态分布外, 我们还可以考虑具有泊松、伽玛和二项分布等形式的随机型误差. 此外, 观察变量的期望值不一定必须是回归量的线性函数, 有时它可以是一些协变量的线性变换的一个函数, 如对数函数. 在最后这种情形下, 我们可以得到适用于大多数保险场合的乘积模型.

用这种方法我们可以处理在 IBNR 型理赔下盈余的估计问题, 关于 IBNR 型理赔请见下文. 我们也可以容易地解决来自第 i 地区, 属于第 j 个级别且驾驶汽车载重量为 w 的驾驶员的保费估计问题.

在信度模型中一般有许多随机影响, 但在 GLM 模型中这些作用则是相对确定的, 尽管仍然未知. 对于 GLM 模型来说, 我们可以寻求计算软件来处理众多问题.

9. IBNR 技巧

我们简记那些导致理赔的事件已经发生但赔付行为还没有进行的潜在的理赔为 IBNR 理赔, 对从事实务的精算师来说, 一个重要的统计问题是预测这些潜在的 IBNR 理赔总额. 对这个总额进行估计所采用的大多数手法是基于所谓的流量三角形, 按照起始年和发展年对理赔总额进行分组. 在 GLM 模型这一特殊场合, 许多传统的精算处理方法常常归结为极大似然估计法.

10. 风险排序

能够在未来随机收益变量或者随机损失变量中表达出自己的风险偏好, 这应该是作为精算师这个职业的精髓所在. 因此, 随机排序就成了他接受的教育中以及他应该具备的技能中极为重要的一个部分. 有时, 我们遇见两个损失变量 X 和 Y, 其中变量 Y 在一定的意义下“大于”变量 X, 这时一个明智的决策者会偏好损失变量 X. 由所有风险厌恶型的决策者构成的一个较小群体愿意去分析应该偏好哪个风险. 在这种情形下, 风险变量 Y 可能“大于”变量 X, 或仅是 Y“更扩散”一些, 但这使得 Y 不受欢迎. 当我们把“更扩散”理解为其累积分布函数具有更厚的尾的时候, 我们便得到了一个风险排序方法, 它具有许多诱人的性质. 例如, 以这些风险变量为单一项构成复合分布函数, 在零效用保费、破产概率和停止-损失保费的意义下, 原来我们倾向的那个风险变量将使得其对应的复合分布作为风险来说仍然优于另一个. 可以证明, 第 3 章的聚合风险模型较之它要去逼近的个体风险模型更扩散一些, 从而原则上说, 在考虑要征收的保费, 应储备的资金以及 VaR 等问题时, 使用聚合模型会得到一些更保守的决策. 我们还可以证明, 如果一个停止-损失保险按照第 1 章介绍的自留额方差的意义下为最优的, 那么当其它情况不变时, 以风险厌恶型决策者的眼光来看它还是更可取的.

有时，在还没有得到完全的信息下风险的停止-损失保费就需要被确定下来. 假设风险的期望、方差和一个相关的上界均已知，我们将给出一个计算可能的最大停止-损失保费的方法.

在个体和聚合模型以及破产模型中，我们假设理赔额是相互独立的非负随机变量列. 许多时候这种假设是不现实的. 例如，一对夫妇的两个死亡风险变量之间，以及相邻房屋的地震风险变量之间均存在明显的相依关系. 又如，在人寿保险中，考虑那些产生于同一个保单的连续赔付，如果由于死亡而导致赔付停止或开始，或者有随机利率的作用，那么这些赔付变量之间也有着明显的相依关系. 我们将给出一个简短的介绍，以阐明随机排序在这一情形的应用. 设一组随机变量列，它们的联合分布未知，但每一个边缘分布已知，如果这些变量尽可能地相依，从而使得不可能出现一个被另一个规避的情况，那么这时它们的停止-损失保费应该达到最大.

教学方面

由于本书已经被 Amsterdam 大学和一些别的地方使用 10 多年了，我们有机会储备了一系列的考试试卷，从而形成现在的教材中内容丰富的习题库. 同时书中还给出许多例题，使本书成为一本名副其实的教科书. 加[♠]标记的习题有一定的难度，初学者可以跳过去.

本书所需的数学基础相当于定量经济学(计量经济学或精算学)或者数理统计学专业本科教学大纲第一阶段要求的水平，本书可以在上述学制的最后一年使用，或为精算学专业，或带有很强保险背景的定量金融经济学专业学生安排在硕士阶段使用. 为了使非精算专业学生也使用本书，我们略去了关于人寿保险数学的一些记号和专业术语. 因此，应用数学专业或者统计专业的学生，如果对保险的随机方面有兴趣的话，也可以学习本书. 我们在写作过程中一直努力地保持着本书在数学上的严谨性和在统计学上的灵活性，例如，我们按惯例使用了矩母函数这个术语，而回避了特征函数和测度论的相关术语. 回归模型的先验分布不需要掌握，但对本书的学习有帮助.

为了有助于学生的学习，我们在书末针对书中的大部分习题单独列出一节，对有的习题我们给出了最终答案以方便读者检查自己的工作，而对有的习题我们只给出一些有益的提示. 我们还列出了一个详尽的名词索引，和一些可能在考试中需要用到的图表. 我们没有列出所有相关参考文献以涵盖书中提到的每一个结果，而是局限于能对所研究的课题提供更多细节，且为进一步学习提出建议的那些有益的书和论文.

我们对计算方法投入了大量的精力，同时对一些经典的近似方法如中心极限定理(CLT)也给予了重视. 这些计算方法不仅快速，而且常常表明是惊人地精确，

它们还对参数特性提供了一些解答，使得当数据有细微变化时人们不必再重复一切计算. 我们希望在此强调一下，“精确”的方法只有在输入的数据准确的条件下才有意义. 不准确的输入数据导致的误差量级常常会远大于由近似方法导致的误差.

本书所使用的记号与数理统计和非寿险数学一致. 请参阅 Bower et al. (1986)，该书的非寿险部分使用的记号类似于本书第一部分.

关于本次翻译

本书是荷兰文版本的译本，原荷兰文版本已经在荷兰和比利时的一些大学使用了 10 多年. 这次的译本对原荷兰文版本做了一些修改和增补. 由于仅仅是从本书荷兰文的第二版出版至今的短短几年时间内关于凸序和同单调的研究才变得活跃起来，我们在本次英文本中特意增加了一节来介绍这一研究领域的成果. 此外，在第6章，原来的荷兰-比利时奖惩系统被改为现在一般的奖惩系统. 除此之外，本书大部分内容与原荷兰文版本内容一致.

致谢

首先，我们特别要感谢 David Vyncke，他不仅很好地将本书翻译成英文，而且出色地完成了 TEX 转化，他还帮助绘制了图表.

我们得到了许多人的帮助，我们以前的学生(但现在是我们的同事)Angela van Heervaarden 和 Dennis Dannenburg 对本书早期的以及现在的版本都做过仔细的校对. Richard Verrall 和 Klaus Schmidt 对本书提出了一些建议，我们一并致谢. 最后我们还要感谢使用本书的读者、学生、教师和相关人员，多谢他们的许多宝贵建议.

作 者

2001 年 10 月 3 日

目　录

第 1 章　效用理论与保险

§ 1.1　引　言

保险业之所以存在是因为人们愿意以高于他们期望索赔额的价格获得保险保障. 因此，保险公司收取高于期望理赔额的保费. 在本章，我们概述一个经济学理论，并用之来解释为什么被保险人乐意支付高于 *纯保费*(承保损失的数学期望)的保费. 解释这个现象的理论假设决策者使用函数值 $u(w)$ (被称为 *效用函数*) 去衡量其财富，而不是用财富 w 本身去衡量，尽管通常他们自己都没有意识到这一点. 如果决策者必须在随机损失 X 和 Y 之间做出选择，那他会比较 $E[u(w-X)]$ 和 $E[u(w-Y)]$, 并选择期望效用较大的那个损失. 利用这个模型，对于随机损失 X, 拥有财富 w 的被保险人就可以决定为此支付的最大保费 P^+. 这可由均衡方程 $E[u(w-X)]=u(w-P)$ 求出. 对于由均衡方程决定的保费 P^+, 被保险人认为投保与否的效用没有差别. 这个模型也可用于保险合同的另一方. 保险人使用自己的效用函数和可能的附加费用，决定一个最小保费 P^-. 如果被保险人的最大保费 P^+ 超过保险公司的最小保费 P^-, 那么当保费界于 P^- 与 P^+ 之间时，保险公司与被保险人的双方效用都增加了.

尽管不能精确地决定一个人的效用函数，但我们可以给出它的一些合理的性质. 例如，更多的财富通常都意味着更高的效用水平，因此 $u(w)$ 应是一个非减函数. 同时，理性的决策者都是 *风险厌恶型* 的假设也是合乎逻辑的，这就意味着，他们在确定损失与具有同样期望值的随机损失之间，他们偏好确定的损失. 我们将给出一些具有这些性质的效用函数族，并研究其优缺点.

假设被保险人可以在一份具有固定免赔额的保单和一份具有相同期望理赔额，并且保费相同的保单之间做出选择，可以证明，对于被保险人来说，前者是更好的选择. 如果再保险公司承保了保险人所有的风险组合，那么具有固定的最大自留风险的再保险称之为 *停止损失再保险*. 根据风险排序理论，我们可以看到这种再保险类型对于风险厌恶型的决策者来说是最优的选择. 在本章，我们将证明停止损失再保险可以使自留风险的方差达到最小. 我们还将讨论在哪种情形下，保险人偏好 *比例再保险*, 即再保险赔付额与理赔额成比例的再保险类型.

§ 1.2　期望效用模型

假设一个个体面临损失额为 B, 发生概率 0.01 的风险，他可以将损失进行投

保，并愿意为这份保单支付保费 P. B 和 P 之间有何种关系？如果 B 非常小，那么 P 几乎不会大于 $0.01B$；然而，如果 B 略微大一点，如 500, 那么 P 就可能比 5 稍大一些；如果 B 非常大，那么 P 就会比 $0.01B$ 大很多，因为这么大的损失一但发生可以导致破产. 因此很明显，一个风险的保费不是*齐次的*, 即保费不与风险成比例.

例 1.2.1(圣彼得堡悖论)　以价格 P 元参与如下的游戏. 抛掷一枚均匀的硬币，直到出现正面为止. 如果投掷 n 次才首次出现正面，则游戏的参与者就可以获得 2^n 元. 因此，从该游戏中获得的期望收益是 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$. 然而，除非 P 很小，否则很少有人会参加这样的游戏，这就意味着人们并不仅仅看到期望收益. ∇

在经济学中，由冯 · 诺伊曼 (von Neumann) 和摩根斯特恩 (Morgenstern) 于 1947 年引入的模型描述了决策者怎样在不确定的结果中做出选择. 如果决策者能够在潜在的随机损失 X 中进行一致的选择，那么就存在一个评估财富 w 的效用函数 $u(\cdot)$, 使得由此所做出的决策与基于期望 $E[u(w-X)]$ 而比较损失 X 所做出的决策正好相同. 按这种方式，复杂的决策就简化为简单的数值比较问题.

为比较 X 和 Y, 效用函数 $u(x)$ 与其线性变换 $a\,u(x)+b$ $(a>0)$ 是等价的，因为二者导致相同的决策：

$$\begin{aligned} &E[u(w-X)] \leqslant E[u(w-Y)] \quad \text{当且仅当} \\ &E[a\,u(w-X)+b] \leqslant E[a\,u(w-Y)+b]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

因此，从等价的效用函数族中，我们可以选取其中的一个，例如要求 $u(0)=0$ 和 $u(1)=1$. 假设 $u'(0)>0$, 我们也可以使用效用函数 $v(\cdot)$ 使得 $v(0)=0$ 和 $v'(0)=1$:

$$v(x) = \frac{u(x)-u(0)}{u'(0)}. \tag{1.2}$$

在实际中，我们几乎不可能确定使用什么样的效用函数. 效用理论仅仅说明了效用函数的存在性. 我们可以向决策者提出大量的问题，通过他对这些问题的回答来重建该决策者的效用函数. 这些问题类似于："为避免以概率 q 发生损失 1, 你愿意支付多大保费 P?" 于是，由 $u(0)=0$, $u(-1)=-1$ 和初始财富 0, 对于任意一个 P 值，我们有

$$u(-P) = (1-q)u(0) + q\,u(-1) = -q. \tag{1.3}$$

但这种确定效用函数的做法又有其局限性：随着询问的持续进行，决策者会很快变得急躁起来，他的决策也显得越来越不协调一致. 比如，决策者回答，愿意为相对较小的风险支付较大的保费，或者是为几乎同样的风险支付完全不同的保费. 这类错误总是不可避免的，除非决策者明确地使用了一个效用函数.

例 1.2.2(偏好风险与厌恶风险) 假设一个拥有资本 w 的个体使用效用函数 $u(\cdot)$ 衡量其财富的价值. 他面临两种选择：以概率 1/2 损失 b 元，或仅支付固定的 $b/2$ 元. 当 $b=1$ 时，他选择前者；当 $b=4$ 时，他选择后者；当 $b=2$ 时，两种选择等价. 很明显，这个人喜欢一定程度的冒险，但他又害怕大的损失，就像拥有火灾保单的个人同时愿意参与抽奖的活动. 对于这样的决策，效用函数 $u(\cdot)$ 应该具有怎样的形式？

在这种情况下，w 的数值是无关紧要的：通过把效用函数平移 w, 我们可以选择 $w=0$. 进一步，我们假设 $u(0)=0$ 和 $u(-1)=-1$. 因为决策者认为以概率 1/2 发生损失 2, 与发生确定的损失 1 ($b=2$) 等价. 这蕴涵了

$$u(-1)=\frac{1}{2}(u(0)+u(-2)). \tag{1.4}$$

当 $b=1$ 和 $b=4$ 时，我们显然有

$$u\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}(u(0)+u(-1)) \quad \text{和} \quad u(-2)>\frac{1}{2}(u(0)+u(-4)). \tag{1.5}$$

由这些不等式可知，函数 $u(\cdot)$ 既不是凸的，也不是凹的. 注意，我们使用的术语“凸函数”表示“向上凹的函数”, 而“凹函数”表示“向下凹”.

因为 $u(0)=0$ 和 $u(-1)=-1$, 所以由 (1.4) 和 (1.5) 得

$$u(-2)=-2, \quad u\left(-\frac{1}{2}\right)<-\frac{1}{2} \quad \text{和} \quad u(-4)<-4. \tag{1.6}$$

经过这 5 个点的光滑曲线，当 $-1<x<0$ 和 $x<-2$ 时区域位于对角线之下，当 $x\in(-2,-1)$ 时区域位于对角线之上. ∇

我们假设效用函数非减，尽管相反的情况也是可以想象的，如资本征税. 因此，*边际效用* 是非负的：$u'(x)\geqslant 0$. 一类重要的决策者是 *厌恶风险型* 的，他们的 *边际效用* 是递减的，因此 $u''(x)\leqslant 0$. 注意我们并不严格区分“递增”和“非减”, 如果需要的话，我们会用“严格递增”. 为了解释为什么这种类型的决策者称之为风险厌恶型，我们使用如下的基本定理 (证明见习题 §1.2 第 1 题，第 2 题).

定理 1.2.3(Jensen 不等式) 如果 $v(x)$ 是一个凸函数，Y 是一个随机变量，则

$$E[v(Y)]\geqslant v(E[Y]), \tag{1.7}$$

其中等号成立当且仅当 $v(\cdot)$ 在 Y 的支撑集上是线性的或 $\mathrm{Var}(Y)=0$. ∇

由此不等式可以得到，对于一个凹的效用函数 $u(\cdot)$, 有

$$E[u(w-X)]\leqslant u(E[w-X])=u(w-E[X]). \tag{1.8}$$