历届
国内数学
奥林匹克竞赛
试题分析(高中)

OLYMPIC

杨乃清　阎建平　编著

学　苑　出　版　社

历届国内数学
奥林匹克竞赛试题分析（高中）

杨乃清　阎建平　编

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届国内数学奥林匹克竞赛试题分析:高中/杨乃清,阎建平编。—北京:学苑出版社,1998.7 重印
ISBN 7-5077-0613-3

Ⅰ.历… Ⅱ.①杨…②阎… Ⅲ.数学课-试题-分析-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.606

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 10682 号

学苑出版社出版　发行
社址:北京万寿路西街 11 号　邮政编码:100036
水利电力出版社印刷厂印刷　新华书店经销
787×1092　1/32　13.75 印张 300 千字
1997 年 7 月北京第 2 版 1998 年 7 月北京第 3 次印刷
印数:15001-20000 册
定价:16.50 元

前　　言

本社1991年出版的《历届国际数学奥林匹克竞赛试题分析》一书深受广大中学生朋友的欢迎，至今已重印三次。这一方面反映了广大中学生朋友参与数学竞赛的热情；另一方面也反映了“最全”、“最新”、“最精”的有重大影响的学习资料的出版必然会受到广大中学生朋友的喜爱。

本书——《历届国内数学奥林匹克竞赛试题分析》——继承了《历届国际数学奥林匹克竞赛试题分析》一书的编写传统，以最短的篇幅将历届（1956—1993）国内数学竞赛试题题解精炼地呈现给读者(追求高的容量/价格比)。由于更大范围的中学生朋友更关注和参与国内数学竞赛，相信本书的出版会受到更广泛的欢迎。

国内数学竞赛（这里仅指高中文化程度的竞赛）虽早在1956年即已开展，但直到1978年以后才形成全国范围内的高中数学联赛，而在此之前的竞赛只限于各省市独立举行，且由于种种原因，只断断续续地举行了几届。作为国内数学竞赛资料，全国高中数学联赛自然是主要选入的对象，但为了资料的完整性，本书也选入了具有重大影响的1978年以前的北京市和上海市的数学竞赛试题（主要以北京市为主，仅在北京市没有举行竞赛的年份才选入当年上海市的竞赛试题）。由于华罗庚等老一辈数学家参与了当年北京市数学竞赛的命题工作，竞赛题目的趣味性，权威性，也是本书选编这部分竞赛试题的重要原因。

中国数学冬令营（后改称中国数学奥林匹克）和中国数学奥林匹克国家集训队选拔赛虽然参赛的学生范围很窄，但一如“中国数学奥林匹克”这一名字一样响亮，这些竞赛是我国中学生最高水平的竞赛。竞赛命题在各国数学奥林匹克竞赛中也是有其权威地位的。本书也选入这一部分竞赛试题，试图全面介绍国家级的竞赛试题。

本书在以后的再版中也试图收入当年的竞赛试题，以保持“最全”、“最新”。

本试题题解参考了众多资料、文献，恕不一一列出，在此特向资料、文献的作者表示深深的谢意。

在此，也以《历届国际数学奥林匹克竞赛试题分析》一书“前言”的最后一句话作为结束语：

本书能对广大中学生朋友的数学学习有所裨益，编者也就感到快慰了。

编者

1993年10月22日

目　　录

国内数学奥林匹克竞赛简介

国内中学生数学竞赛（仅指高中文化程度的竞赛），最早始于 1956 年。在华罗庚等老一辈数学家的倡导下，北京，上海，天津，武汉等省市该年各自独立地举行了地区性竞赛。1957 年以后，其它一些城市也加入了竞赛行列。但直到 1965 年停赛以前，没有形成全国性的统一竞赛，且由于种种原因，只断断续续地举行了几届。

直到 1978 年，北京，上海，天津，辽宁，安徽，陕西，四川，广东等八省市联合举行了数学联合竞赛，并从 1979 年起，发展成全国（除台湾外）联赛。

1980 年，中国数学会成立了普及工作委员会，其工作之一即负责国内数学竞赛和国际数学奥林匹克竞赛中国代表队的选拔，参赛等活动。同时，该年的高中数学联合竞赛停赛一年，而从 1981 年起，该联赛每年一届地举行了下来。

每年全国约有六万名中学生于十月中旬的一个星期日参加全国高中数学联赛，其中的 70～80 名优秀者由各省市推荐参加数学冬令营（从 1991 年起改称为中国数学奥林匹克，时间为下一年——与高中数学联赛相联系——的 1 月份），冬令营的主要活动之一即进行一次模拟国际数学奥林匹克竞赛（时间安排，试题形式，难度均相同或相似）的考试，从中选拔出 20 名左右优胜者组成国家集训队。

国家集训队于 4 月底，5 月初再举行选拔赛，最后选出由 6 人组成的中国代表队，参加于每年 7 月份举行的国际数学

奥林匹克竞赛。

高中数学联赛分第一试和第二试，第一试试题趋于大众化和普及型命题，而第二试试题及中国数学奥林匹克试题，国家集训队选拔赛试题等都与国际数学奥林匹克竞赛试题的范围，难度等相似或较容易一些。这些试题构思独特，灵活深邃，中学数学的基础知识虽已足够用来解答试题，但需要发挥对数学本质的洞察力，创造力和数学机智，技巧。通过解答试题，可以培养起学生严密的数学思维逻辑和灵活的分析问题和解决问题的方法。

一九五六年（北京）

第一试

1. 证明：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 对任何正整数 n 都是整数，并且用 3 除时余 2。

［证明］

$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1$$

$$=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1。$$

对任何正整数 n，因 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为整数，故原式为整数。

又三个相邻整数 $2n$、$2n+1$、$2n+2$ 中至少有一个为 3 的倍数，而 3 与 8 互质，故

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$$

为 3 的倍数。故原式用 3 除时余 2。

2. 设方程 $x^2-px+q=0$ 的两根为 r 和 s，且 r、s 均不等于 0。求以 $r^2+\frac{1}{s^2}$ 和 $s^2+\frac{1}{r^2}$ 为根的方程。

［解］　所求方程应为

$$\left[x-\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\right]\left[x-\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]=0,$$

即

$$x^2-\left(r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}\right)x+\left(r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}\right)=0。$$

由 r 和 s 为方程 $x^2-px+q=0$ 的根可知，$r+s=p$，$rs=q$。故

$$r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{(r^2s^2+1)(r^2+s^2)}{r^2s^2}$$

$$=\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2},$$

$$r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}=q^2+2+\frac{1}{q^2}$$

$$=(q+\frac{1}{q})^2。$$

故所求方程为

$$x^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}x+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=0。$$

3. 试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}。$$

[**证明**] $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos nx$,

$\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos(n-1)x$,

……

$\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos x$,

$\sin\frac{x}{2}=\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}$。

将上述所有等式的两边分别相加，得

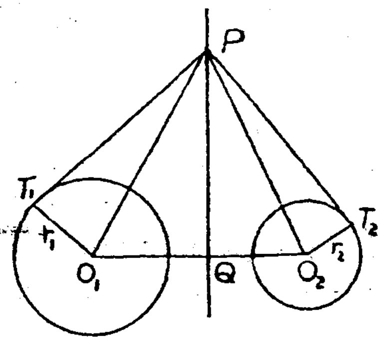
$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right),$$

故

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}。$$

4. 设 C_1、C_2 是两个给定的圆，二者不相交，且每一个都在另一个的外部。由一点 P 作 C_1、C_2 的切线 PT_1、PT_2。设 $PT_1=PT_2$，求 P 点的轨迹。



[**解**]　如图所示，设 $r_1\geqslant r_2$，$PT_1=PT_2$。则

$$(PO_1)^2-(PO_2)^2=[(PT_1)^2+r_1^2]-[(PT_2)^2+r_2^2]$$
$$=r_1^2-r_2^2。$$

过 P 点引垂线 $PQ\perp O_1O_2$。则

$$(O_1Q)^2-(O_2Q)^2=[(PO_1)^2-(PQ)^2]-[(PO_2)^2-(PQ)^2]$$
$$=(PO_1)^2-(PO_2)^2=r_1^2-r_2^2。$$

则

$$O_1Q-O_2Q=\frac{(O_1Q)^2-(O_2Q)^2}{O_1Q+O_2Q}=\frac{r_1^2-r_2^2}{O_1O_2}。$$

O_1O_2、r_1、r_2 均为定长，且 $O_1Q=O_1O_2-O_2Q$，由此容易求得

$$O_1Q = \frac{1}{2}\left[O_1O_2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{O_1O_2}\right]。$$

故 Q 点的位置唯一决定，而 P 点在过点 Q 的 O_1O_2 的垂线上。

反之，若 P 点在上述过 Q 点的 O_1O_2 的垂线上，由上述相反的推导可得 $PT_1=PT_2$。

故所求轨迹为两圆连心线的一垂线，垂足 Q 以 $(r_1^2-r_2^2):O_1O_2$ 之比内分线段 O_1O_2。

第二试

1. 有一群儿童，他们的年龄之和是 50 岁，且其中之一儿童为 10 岁，最大年龄者为 13 岁。若除去年龄为 10 岁的儿童，则其余儿童的年龄恰好组成一个等差级数。问有几个儿童，每个儿童几岁？

[**解**]　设除去 10 岁儿童外有 n 个儿童，年龄最小者为 a 岁。由题设有

$$\frac{a+13}{2}n = 40,$$

即 $n(13+a)=80$。故 $13+a$ 整除 80。

又 a 为介于 0 与 13 之间的整数，故

$$13 \leqslant 13+a \leqslant 26。$$

又 80 在 13 与 26 之间的因数只有 16 和 20，故 a 只可能为 3 或 7。

若 $a=3$，则 $n=5$，n 个儿童年龄所成之等差级数的公差 $d=\frac{13-a}{n-1}=\frac{5}{2}$ 不为整数，故 $a=3$ 时问题无解。

若 $a=7$，则 $n=4$，所述公差 $d=2$，问题有解。

故问题有唯一解，即总共有五个儿童，年龄分别为 7、9、10、11、13 岁。

2. 证明

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1,$$

这里的三次根均取实值。

［证明］ 设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则

$$x^3=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}\cdot$$
$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)$$
$$=2+3x\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}$$
$$=2+3x\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}=2-x,$$

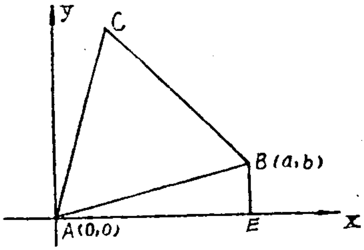
故 $x^3+x-2=0$。

该方程的唯一实根为 $x=1$，命题得证。

3. 在平面上任取三点，其坐标均为整数，证明此三点不能组成正三角形。

［证明］ 经过平移，可取其中一顶点 A 为原点 $(0,0)$，

而其余两点的坐标仍为整数。设第二顶点 B 为 (a, b)，且第三顶点 C 在 AB 的上方（如图）。若$\triangle ABC$ 为正三角形，则



$$AC = AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

且 C 的位置由 B（即 a, b）完全确定。

易得

$$\cos\angle EAC = \cos(\angle EAB + 60^\circ) = \frac{a - \sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin\angle EAC = \frac{\sqrt{3}a + b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}。$$

点 C 的坐标应为 $(AC \cdot \cos\angle EAC, AC \cdot \sin\angle EAC)$，即 $\left(\frac{a-\sqrt{3}b}{2}, \frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$。欲使其为整数，只有 $a=b=0$。

故坐标为整数的三点形不为正三角形。

4. 证明：在空间中不可能有这样的多面体存在，它有奇数个面，且每个面都有奇数条边。

［**证明**］　设有一多面体，具有 n 个面，各个面的边数分别为 S_1, S_2, …, S_n。这里 n 及 S_i 均为奇数。

易得，该多面体的总棱数

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)。$$

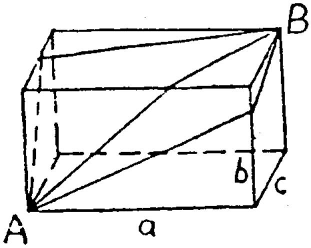
然上式右端括号中为奇数个奇数之和，故不能为 2 的倍数，总

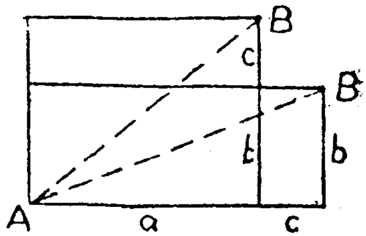
棱数 S 不能为整数。此为不可能，故所述多面体不存在。

5. 已给一长方体，三棱不等，现在要由一顶点出发沿表面到达对角顶点，求最短路线。

[**解**]　设三棱之长为 $a>b>c$，且为由顶点 A 到达对角顶点 B（如图），将长方体的相邻表面摊平，两点之间以直线为最短，故有三条“直线”走法（在摊平的“平面”上，如图），它们的长度分别为

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2},\ \sqrt{b^2+(a+c)^2},\ \sqrt{c^2+(a+b)^2}。$$





因 $bc<ac<ab$，故

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}<\sqrt{b^2+(a+c)^2}<\sqrt{c^2+(a+b)^2}。$$

即最短路线为穿过边 a、b 所在面与边 a、c 所在面的公共棱的“直线”。

6. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2=6+(y-z)^2 \\ y^2=2+(z-x)^2 \\ z^2=3+(x-y)^2。\end{cases}$$

[**解**]　原方程组改写为：

$$6=x^2-(y-z)^2=(x-y+z)(x+y-z),\quad(1)$$
$$2=y^2-(z-x)^2=(y-z+x)(y+z-x),\quad(2)$$
$$3=z^2-(x-y)^2=(z-x+y)(z+x-y)。\quad(3)$$

(1) × (2) × (3) 得