XIANXING

DAISHU

线性代数

复习及试题选讲

吴振奎　编著

- 考硕士研究生必备指南
- 学习高等数学经典指导

考研

北京工业大学出版社

线性代数复习及试题选讲

吴振奎 编著

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习及试题选讲/吴振奎编著. —北京：北京工业大学出版社，2005.4
ISBN 7-5639-1499-4

Ⅰ.线... Ⅱ.吴... Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 035682 号

线性代数复习及试题选讲
吴振奎 编著
*
北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷
*
2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷
850mm×1 168mm 32 开 20 印张 707 千字
ISBN7-5639-1499-4/G·765
定价: 25.00 元

前　言

近年来,随着教育事业的发展,我国研究生的报考和招收人数逐年增多,这无论是对高校在校学生,还是对已经工作的往届大学毕业生和自学者来讲,都提供了继续深造的机会.

“高等数学”(包括线性代数和概率论与数理统计)是大学理工科及部分文科(如经济、管理等)专业的重要基础课,也是大多数专业研究生入学考试的必试科目.但其内容较为庞杂,涉及分支也多,且题目灵活性大.

1982年,余在辽宁大学供职.正课之暇,为全校部分打算报考研究生的学子,开设了“高等数学复习及试题选讲”选修课,目的是想从知识上给学生们一个小结,方法上给他们一点开拓,技巧上给他们些微启迪.

当时课讲得很辛苦,但学生们学得极认真.教者与学者不断交流、研讨、切磋,使得两遍下来,讲义便已形成,且由辽宁科学技术出版社于1984年出版,转年增订本再印.

而后,笔者调天津工作,种种原因,加之机会未逮与环境不霁,使笔者终与此项工作无缘.

一晃20余年,时过境迁,感触良多.

近年来大学扩招后,由于办学条件的限制,学生们对数学学习普遍感到困难,不少学生都希望能有一本数学复习用书,希望这本书的知识面能广些,内容丰富些,层次稍高些,它不仅对在校生复习迎考有所帮助,而且对于考研甚至参加数学竞赛的学子也能有益,因为他们都将同样面临复习、考试,尽管是不同的层次的考试.

应北京工业大学出版社之邀,笔者有幸将书稿修订再次奉献给广大读者.为此笔者对原书大动刀斧,以使之更适应新时代、新潮流、新情况.

与旧版相较，本书按学科拆分成三册：高等数学（微积分），线性代数和概率论与数理统计．本书系“线性代数”分册．此外在每章增加了以下内容：

(1)经典问题解析；

(2)1987 年以后全国硕士生招生数学统考试题选讲；

(3)国内外大学生数学竞赛题赏析．

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”．了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为数学内容就那么多，好的试题也就那么一些．正如时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）．

又云“登高望远”，对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们会有茅塞顿开之感，有时更会使我们恍然大悟，甚至大吃一惊，啊哈！原来如此．

本书编写过程参阅了大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，笔者谨向他们致以谢意．

尽管笔者十分努力，但精力与体力已使我感到力不从心．然而我仍旧会努力，且仍旧在努力．

但愿本书的出版能唤起笔者对在辽宁大学工作的那段美好时光的追忆，对昔日的挚友、同仁的怀念，借此也向他们捎去一些祝福．

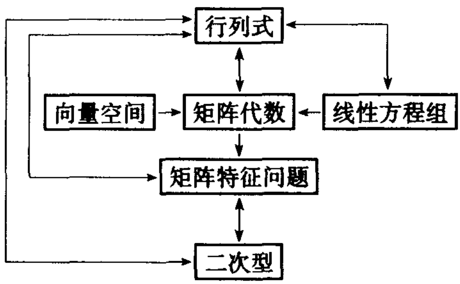
笔者也殷切期待着读者的建议、批评和指教，让我们一起将这本小书修订成功！

吴振奎

2004 年 7 月于天津

说明与凡例

一、本书各章内容间的关系图



二、本书常用记号

$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示向量

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示矩阵

$\mathbf{Z}$ 表示整数集

$\mathbf{R}$ 表示实数集

$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量集

$\mathbf{R}^{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶实矩阵集

$\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}_n)$表示($n$ 阶)单位阵

$\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示以 a_i 为元素的对角阵

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$(其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于矩阵 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}$(其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆)表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于矩阵 $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{A}^{-1}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

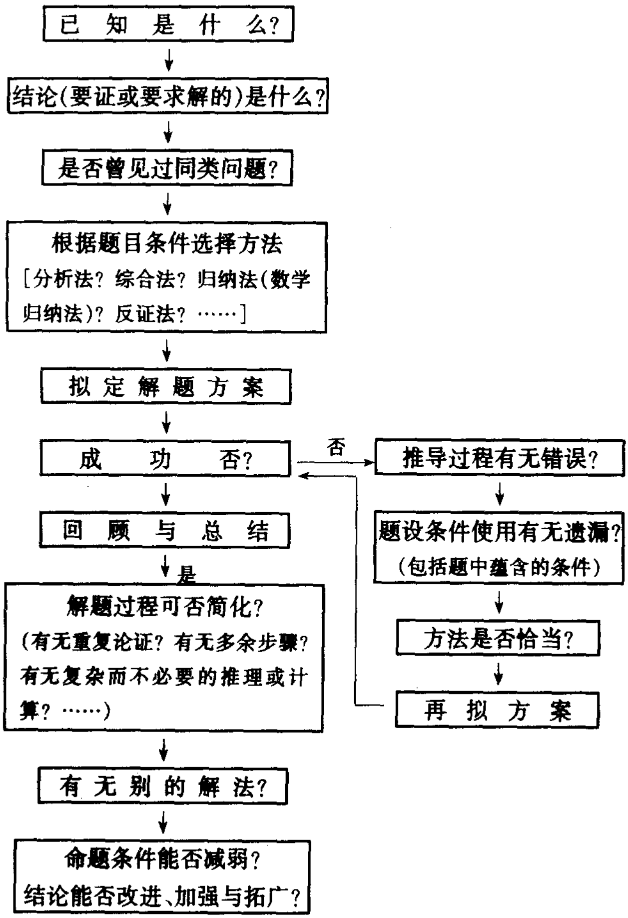
$\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$\Longleftrightarrow$表示充要条件

$\det\boldsymbol{A}$ 或$|\boldsymbol{A}|$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的迹

三、解题步骤的一个框图


已知是什么?
结论(要证或要求解的)是什么?
是否曾见过同类问题?
根据题目条件选择方法
[分析法? 综合法? 归纳法(数学归纳法)? 反证法? ……]
拟定解题方案
成功否?
否
推导过程有无错误?
题设条件使用有无遗漏?
(包括题中蕴含的条件)
方法是否恰当?
再拟方案
回顾与总结
是
解题过程可否简化?
(有无重复论证? 有无多余步骤? 有无复杂而不必要的推理或计算? ……)
有无别的解法?
命题条件能否减弱?
结论能否改进、加强与拓广?

目　　录

一、行　列　式

内　容　提　要

1. 矩阵

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的(m 行 n 列的)矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列的矩阵. 简记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}.$$

其中 a_{ij} 叫 A 的第 i 行第 j 列元素. 当 $m=n$ 时,称 A 为方阵,简称 n 阶矩阵. 且记 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 为含实元素 $m\times n$ 阵的全体(集合). 特别地 $1\times n$ 的矩阵称为向量,常记 $\mathbf{R}^n$.

2. 行列式

(1)行列式的定义

行列式的定义很多,其中较为直接的(构造性的)定义是:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

这里$(i_1 i_2\cdots i_n)$是数字 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列,$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$为排列$(i_1 i_2\cdots i_n)$的逆序数.

矩阵(方阵)A 的行列式常记为 $\det A$ 或简记成$|A|$.

注　这里想再强调一点,矩阵与行列式本质区别在于:行列式是数;矩阵只是一个数表.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，若 A_{ij} 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中划去第 i 行、第 j 列剩下的 $n-1$ 阶矩阵，则 $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，它常简记成 A_{ij}. 又 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

(2)行列式的性质

①行、列互换(行变列、列变行)，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置；

②交换列行式两行(或列)位置，行列式值变号；

③某数乘行列式一行(或列)诸元素等于该数乘行列式值；

④将某行(或列)的倍数加到另外一行(或列)，行列式值不变；

⑤若两行(或列)对应元素成比例，则行列式值为零；

⑥(拉普拉斯(Laplace)展开)行列式可按某一行(或列)展开，且

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}\,|\boldsymbol{A}|,\ \text{其中}\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$$

这里 δ_{ij} 称为 Kronecker 符号. 特别地 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n)$.

注 *拉普拉斯展开实际上是指行列式可以按照某几行(或列)展开，这儿只是该展开的特例情形.*

⑦若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

⑧ $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

⑨ $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异阵.

⑩ $|a\boldsymbol{A}|=a^n|\boldsymbol{A}|$，其中 $a\in\mathbf{R}$，且 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(3)行列式的常用计算方法

①用行列式定义(多用于低阶行列式)；

②利用行列式性质，将行列式化成特殊形状(上三角或下三角形)；

③用拉普拉斯(Laplace)展开；

④利用不同阶数行列式间的递推关系(常结合数学归纳法)；

⑤利用著名行列式(如范德蒙(Vandermonde)行列式)的展开式；

⑥利用矩阵性质(如矩阵变换分块及矩阵特征问题)等.

(4)几个特殊的行列式

①Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

它的推广情形为：

若 $f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + \cdots + a_{k,k-1}x + a_{kk}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = D \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中 D 为 $f_k(x)(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的系数组成的行列式.

②Gram 行列式

设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbf{R}^n$，又 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j$ 的内积：

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③循环行列式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{k-1} (x_0 + x_1\zeta^k + x_2\zeta^{2k} + \cdots + x_{n-1}\zeta^{(n-1)k}).$$

这里 ζ 是 1 的 n 次原根 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$（$\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$ 又可记如 $\exp\left\{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}\right\}$）.

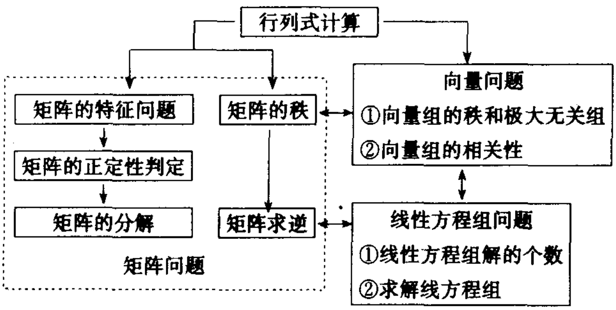
④交错矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{12} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & n \text{ 是奇数}; \\ P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots)^2, & n \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

这里 $P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式,称为 Pfaff 多项式.

经 典 问 题 解 析

计算行列式的本身,也许只是一种运算或技巧,它多依据如何巧妙运用行列式性质.然而就其作为问题本身来讲,似乎意义不大,关键还是在于它的应用.关于这一点可见下图:



行列式的应用关系图

尽管如此,我们还是介绍一些较为经典的行列式计算问题.它的常用计算方法前文已述,下面来看例.

1.行列式计算问题

先来看一个稍简单的问题.

例 1 若五阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix} = a$,计算下面行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{b}a_{12} & \frac{1}{b^2}a_{13} & \frac{1}{b^3}a_{14} & \frac{1}{b^4}a_{15} \\ ba_{21} & a_{22} & \frac{1}{b}a_{23} & \frac{1}{b^2}a_{24} & \frac{1}{b^3}a_{25} \\ b^2a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \frac{1}{b}a_{34} & \frac{1}{b^2}a_{35} \\ b^3a_{41} & b^2a_{42} & ba_{43} & a_{44} & \frac{1}{b}a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

这里 $b\neq0$.

解 将 D 的第一行提出$\frac{1}{b^4}$,第 2 行提出$\frac{1}{b^3}$,第 3 行提出$\frac{1}{b^2}$,第 4 行提出$\frac{1}{b}$得

$$D=\frac{1}{b^{10}}\begin{vmatrix} b^4a_{11} & b^3a_{12} & b^2a_{13} & ba_{14} & a_{15}\\ b^4a_{21} & b^3a_{22} & b^2a_{23} & ba_{24} & a_{25}\\ b^4a_{31} & b^3a_{32} & b^2a_{33} & ba_{34} & a_{35}\\ b^4a_{41} & b^3a_{42} & b^2a_{43} & ba_{44} & a_{45}\\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55}\end{vmatrix}.$$

从上式行列式第 1,2,3,4 列分别提出 b^4,b^3,b^2,b 有

$$D=\frac{b^{10}}{b^{10}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55}\end{vmatrix}=a.$$

下面是一个十分典型的行列式计算问题.这儿先介绍一下,至于它的解法,我们将在后文给出.

例 2 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b\\ b & a & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b & b & \cdots & a & b\\ b & b & \cdots & b & a\end{vmatrix}$.

该行列式以及与之相关的问题,可见全国研究生招生统考前、后一些院校的试题,它的变化、解法很多且很有代表性,详见后文,亦可见本书附篇中“数学解题中的转化思想”一文.

下面是它的一个变形问题.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$.

解 将 D 的第 2 到第 $n+1$ 列加到第 1 列,且提公因子有

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}\quad (\text{行间相减})$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

注 该题曾为兰州大学 1981 年研究生入学考试试题.下面的问题只是例 3 的变形或推广:

(1)计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$.

略解 将 D 的第 1 行乘 -1 加至其各行后,再按第 1 列展开

$$D=\begin{vmatrix}x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1-x & x-a_2 & 0 & \cdots & 0\\ a_1-x & 0 & x-a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1-x & 0 & 0 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}x-a_2 & & & \\ & x-a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$
+(a_1-x)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ & x-a_3 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x-a_n \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+(-1)^{n+1}(a_1-x)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ x-a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & x-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & x-a_n & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= x\prod_{k=2}^{n}(x-a_k)+\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x-x_k}{x-x_i}\right).
$$

(2)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

略解 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & x_n-a \end{vmatrix}$.

再按 $a=b$ 和 $a\neq b$ 两种情形分别计算上面右式两行列式有:

①$a\neq b$ 时,$D_n=\dfrac{1}{a-b}\left[a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right]$,

②$a=b$ 时,$D_n=x_1\prod_{i=2}^{n}(x_i-a)+a\sum_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\dfrac{x_i-a}{x_j-a}\right)$.

③计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

它显然是例的特殊情形，也可由从第 n 行起后一行减去其前一行，然后将第 $2\sim n$ 列统统加到第 1 列，再按第 1 列展开即可. 详见后文，有

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}.$$

下面的问题可视为前面例的推广或变形.

例 4 设 $a_k\neq 0(k=2,3,\cdots,n)$，计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2+a_2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a_3 & \cdots & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & (n-1)+a_{n-1} & n-1\\ n & n & n & \cdots & n & n+a_n\end{vmatrix}$$

略解 1 将行列式第一行遍乘 $-k$ 加到第 k 行 $(k=2,3,\cdots,n)$，再将第 k 行遍乘 $-\frac{1}{a_k}(k=2,3,\cdots,n)$ 加到第一行，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -2a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -3a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -(n-1)a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ -na_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\left(1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{a_k}\right)a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -2a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -3a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -(n-1)a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ -na_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left[1+\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{a_k}\right)a_1\right]a_2a_3\cdots a_n.$$

略解 2 将 D_n 先按第一列拆成两个行列式，且将其第一个行列式的首列乘