高中数学

# 题源

TIYUAN

与各种版本的高中课程教材配套使用

# 不等式

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强

本册主编：杨启发

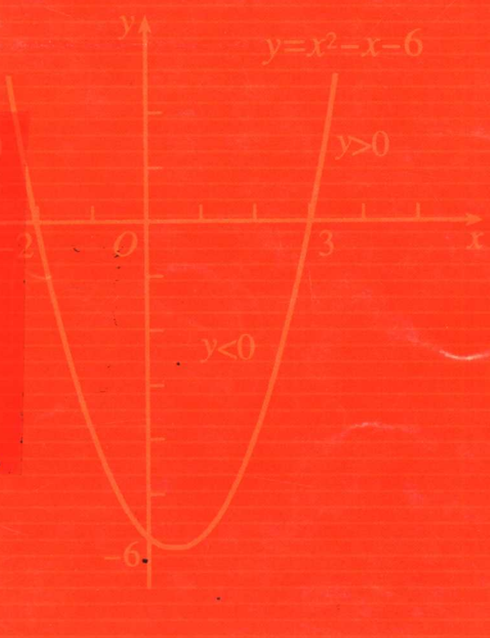
按专题分册

按知识划块

按题型归类

按方法总结

按梯度训练




河北教育出版社

# 不等式题源

## 高中数学

丛书主编：傅荣强　本册主编：杨启发



河北教育出版社

## 丛书编写委员会

**主编**：傅荣强

**编委**：王鸿雁　王家志　于长军　傅荣福　朱　岩
常　青　金　秋　付明忠　苏金生　牛鑫哲
宋冰倩　韩丽云　马金凤

## 本书作者

**主编**：杨启发

**编者**：常　青　韩丽云

**责任编辑**：赵毅蔚

**装帧设计**：比目鱼工作室

# 题源 高中数学 不等式


| | |
|---|---|
| 出版发行 | 河北教育出版社<br>（石家庄市友谊北大街330号 http://www.hbep.com） |
| 印　刷 | 保定市印刷厂 |
| 开　本 | 880 × 1230　1/32 |
| 印　张 | 7.25 |
| 字　数 | 208千字 |
| 版　次 | 2003年12月第1版 |
| 印　次 | 2003年12月第1次印刷 |
| 书　号 | ISBN 7－5434－3481－4/G・2631 |
| 定　价 | 8.50元 |





**联系电话**：（0311）7755722　8641271　8641274

# 前　言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源”是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书224页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

**1. 按专题分册**　本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计52册，包含初、高中的数学、物理、化学三个学科的40个专题，计40册；另有按册编写的初、高中语文各6册。

**2. 按知识划块**　每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

**3. 按题型归类**　每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

**4. 按方法总结**　每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

**5. 按梯度训练**　每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主，由易到难，循序渐进。

全书栏目设计简单、清晰，具体包括：

1. **题型归纳** 每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型；

2. **方法概述** 每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法；

3. **例题设计** 每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题；

4. **解法点评** 每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评；

5. **要点提示** 解题过程中间或有插入提示指点迷津；

6. **习题配备** 每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题，后附答案与提示。

书由“越学越厚”到“越学越薄”，表明接受知识由难到易的进程，本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”，宗在哪儿？本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路，体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题，向综合性、多元化、实用性方向发展，如何把握命题方向，从最简单的角度切入复杂问题当中，从而把复杂问题分解、简化，逐一解决，这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式，能使你不再不知道学得是否到位，不再对新题型懵懵懂懂，不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力，终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计，到例题、习题选取、讲解梯度，都达到了我们设想的最佳水准。当然，因为种种原因，书中还有一些不尽如人意之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

2004 年元月

# 目录

第一讲 不等式的性质 ……………………(1)
习题一 答案与提示 ……………………(19)

第二讲 算术平均数与几何平均数 ……………………(24)
习题二 答案与提示 ……………………(59)

第三讲 不等式的证明 ……………………(64)
习题三 答案与提示 ……………………(105)

第四讲 不等式的解法举例 ……………………(110)
习题四 答案与提示 ……………………(160)

第五讲 含有绝对值的不等式 ……………………(164)
习题五 答案与提示 ……………………(188)

回顾 不等式的性质 算术平均数与几何平均数 不等式的证明 不等式的解法举例 含有绝对值的不等式 ……(194)
练 习 答案与提示 ……………………(208)

总复习参考题 ……………………(214)
答案与提示 ……………………(217)

# 第一讲　不等式的性质

## 本讲题型

| 序　号 | 题　　型 |
|---|---|
| 1 | 实数的顺序性 |
| 2 | 不等式的性质的运用 |
| 3 | 运用分类讨论思想比较 $f(a)$与 $g(a)$的大小 |

## 题型 1　实数的顺序性

**(1)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 $a$ 与 $b$ 的大小**

**方法**　作差 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

**【例 1】**　比较$\left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$与 $128-\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$的大小.

**解**　$\because\ \left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[128-\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]$

$=\left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-128$

$=\left[\left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(4+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(4-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-128$

$=8\left(32+\frac{4}{a^2}-16+\frac{2}{a^2}\right)-128$

$=\frac{48}{a^2}$,

又 $a\neq 0$,

$\therefore \qquad a^2>0,$

$\therefore \qquad \dfrac{48}{a^2}>0,$ ←判号是关键一步,要说清

$\therefore \qquad \left(4+\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>128-\left(4-\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)^3.$

**点评**

解答本题的依据:$a-b>0\Leftrightarrow a>b$.解题步骤:作差,变形,判号,定论.解题的目标:差的结果出现 $a^2$、$|a|$、$\sqrt{a}$、常数,便于判定符号.

**【例 2】** 设 $x\in\mathbf{R}$,比较 $x^2+\dfrac{10}{3}$与$\dfrac{10}{3}x$ 的大小.

**解** $\because x\in\mathbf{R}$,

$$\therefore \left(x^2+\frac{10}{3}\right)-\frac{10}{3}x$$

$$=\left[x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]-\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$$

$$=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{9}.$$

又 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2\geqslant 0$,

$\therefore \qquad \left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}\geqslant\dfrac{5}{9}>0,$

$\therefore \qquad x^2+\dfrac{10}{3}>\dfrac{10}{3}x.$

**点评**

判号前常用配方法将其化为 $a^2+b(b>0)$的形式,以便使用 $a^2\geqslant 0$ 推出 $a^2+b>0$,从而达到目的.

**【例 3】** 若 $a,b\in\mathbf{R}^+=\{$正实数$\}$,比较$\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小.

**解** $\because \left[\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}.$$

当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 时，有 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,\sqrt{ab}>0$，

$$\therefore\qquad \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0,$$

$$\therefore\qquad \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

**【例 4】** 比较 sin4 与 cos4 的大小.

**解**　$\because\ \sin 4-\cos 4=\sqrt{2}\sin\left(4-\frac{\pi}{4}\right)$，且

$$4-\frac{\pi}{4}-\pi=\frac{16-5\pi}{4}>0,\ 4-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{16-7\pi}{4}<0,$$

$$\therefore\qquad \pi<4-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2},$$

$$\therefore\qquad \sin\left(4-\frac{\pi}{4}\right)<0,$$

$$\therefore\qquad \sin 4<\cos 4.$$

**点评**

此题也可以直接用 1 弧度 $=57.3°$ 计算、判断符号、比较大小，$\pi$ 可以用 3.14 计算近似值.

**【例 5】** 当 $0<x<1,a>0$，且 $a\neq 1$ 时，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

**解**　$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=\frac{1}{|\lg a|}[\,|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|\,]$$

换底是对数运算的常用思路

$$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$$

$$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x^2)].$$

$\because\ 0<x<1$，

$\therefore \qquad 0<1-x^2<1,$

$\therefore \qquad \lg(1-x^2)<0,$

$\therefore \qquad \dfrac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x^2)]>0,$

$\therefore \qquad |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$

**【例 6】** 已知 $x\in\mathbf{R}$,比较 $x^6+2005$ 与 $x^4+x^2+2004$ 的大小.

**解** $(x^6+2005)-(x^4+x^2+2004)$

$=x^6-x^4-x^2+1$

$=x^4(x^2-1)-(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^4-1)$

$=(x^2-1)^2(x^2+1).$

当 $x=\pm1$ 时,$x^6+2005=x^4+x^2+2004$;

当 $x\neq\pm1$ 时,$x^6+2005>x^4+x^2+2004$.



**【例 7】** 已知 $P=1+2x^4$,$Q=2x^3+x^2$,$x\in\mathbf{R}$,比较 $P$ 与 $Q$ 的大小.

**解** $P-Q=(1+2x^4)-(2x^3+x^2)$

$=1-x^2+2x^3(x-1)$

$=(x-1)(x^3-x+x^3-1)$

$=(x-1)^2(2x^2+2x+1)$

$=(x-1)^2[(x+1)^2+x^2].$

对于 $x\in\mathbf{R}$,有

$(x-1)^2\geqslant0,(x+1)^2+x^2>0,$

$\therefore \qquad P\geqslant Q.$

**点评**

本题通过因式分解之后,进一步把二次三项式 $2x^2+2x+1$ 写成 $(x+1)^2+x^2$,这是两个完全平方和的形式,能判断其符号,其本质是判别式小于零,这种方法是比较常用的.

通过以上各例,我们应该有这样的体会:"作差法"的理论依据是实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系:"$a\gtreqqless b\Leftrightarrow(a-b)\gtreqqless0$",其一般步骤为"作差→变形→判号→定论".其中变形是作差法的关键,配方和因式分解是常用的变形手段,为了便于判断"差式"的符号,常将"差式"变形为一个常数,或一个常数与几个平方和的形式,或几个因式的积,等等.当

所得的“差式”是某个字母的二次三项式时，则常用判别式法判断符号.

**(2)已知 $a>0,b>0$，比较 $a$ 与 $b$ 大小**

**方法**　作商 $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

**【例 8】**　比较 $16^{18}$ 与 $18^{16}$ 的大小.

**解**　$\because \frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8=\left(\frac{128}{81}\right)^8$，

又 $\frac{128}{81}>1$，

$$\therefore \quad \left(\frac{128}{81}\right)^8>1,$$

$$\therefore \quad 16^{18}>18^{16}.$$



**点评**

(1)作商比较法的一般步骤可简记为

作商→变形→与 1 比较大小→定论；

(2)若 $a>0,b>0,\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$. 当 $a<0,b<0$ 时，比较 $a$ 与 $b$ 的大小，可先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小，然后再确定 $a$ 与 $b$ 的大小.

**【例 9】**　当 $a>b>0$ 时，比较 $a^ab^b$ 与 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ 的大小.

**解**　$\because a^ab^b>0,(ab)^{\frac{a+b}{2}}>0$，

$$\therefore \quad \frac{a^ab^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}\cdot b^{\frac{b-a}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}.$$

又 $a>b>0$，

$$\therefore \quad \frac{a}{b}>1 \quad \frac{a-b}{2}>0,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1,$$

$$\therefore \quad a^ab^b>(ab)^{\frac{a-b}{2}}.$$

**【例 10】**　比较 $\log_{\frac{1}{3}}5$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}5$ 的大小.

**解**　$\because \log_{\frac{1}{3}}5<0,\log_{\frac{1}{2}}5<0$，

$$\therefore \quad -\log_{\frac{1}{3}}5>0,\ -\log_{\frac{1}{2}}5>0.$$

又 $$\frac{-\log_{\frac{1}{3}}5}{-\log_{\frac{1}{2}}5}=\frac{\frac{\lg 5}{\lg\frac{1}{3}}}{\frac{\lg 5}{\lg\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{\lg 5}{-\lg 3}}{\frac{\lg 5}{-\lg 2}}=\frac{\lg 2}{\lg 3}=\log_3 2<1,$$

$$\therefore \quad -\log_{\frac{1}{3}}5<-\log_{\frac{1}{2}}5,$$

$$\therefore \quad \log_{\frac{1}{3}}5>\log_{\frac{1}{2}}5.$$

**点评**

此题同学们能够熟悉当 $a<0$，且 $b<0$ 时，如何比较 $a$ 与 $b$ 的大小.

**【例 11】** 用作商法比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小. 其中，$a>0$，且 $a\neq 1$，$0<x<1$.

**解** $\because 0<x<1$，

$$\therefore \quad 1+x>1,\ 1-x^2<1,\ \log_{1+x}(1-x^2)<0.$$

又 $$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)$$

$$=-\log_{1+x}\frac{1-x^2}{1+x}=1-\log_{1+x}(1-x^2)>1.$$

$$\therefore \quad |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

**点评**

(1)"作商法"的理论依据：

"若 $a,b\in\mathbf{R}^+=\{$正实数$\}$，则 $a\gtreqless b\Leftrightarrow\frac{a}{b}\gtreqless 1$"，

其一般步骤为

"作商→变形→与 1 比较大小→定论"；

(2)一般地，比较"幂、指数、对数、含有绝对值"的两个数的大小时，常用作商法；

(3)当 $a<0$，且 $b<0$ 时，比较 $a$ 与 $b$ 的大小，可通过比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小去完成.

## 题型 2　不等式的性质的运用

**方法**

(1)理论论据①$a>b \Leftrightarrow b<a$;

(2)$a>b$,且 $b>c \Rightarrow a>c$;

(3)$a>b \Rightarrow a+c>b+c$;

(4)$a>b$,且 $c>d \Rightarrow a+c>b+d$;

(5)$a>b$,且 $c>0 \Rightarrow ac>bc$,$a>b$,且 $c<0 \Rightarrow ac<bc$;

(6)$a>b>0$,且 $c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;

(7)$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N},n>1)$;

(8)$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in \mathbf{N},n>1)$.



**【例 12】** 给出下列命题:①若 $a>b$,则 $a\sin^2\alpha>b\sin^2\alpha$;②若 $a>b$,$ab\neq0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;③若 $a>b$,则 $a^2>b^2$;④若 $a>b$,则 $a\sqrt{1-b}>b\sqrt{1-a}$.其中正确命题的序号是.

**解**　①当 $\sin\alpha=0$ 时,$a\sin^2\alpha>b\sin^2\alpha$ 不成立;

②当 $a>0,b<0$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 恒不成立;

③当 $b<a<0$ 时,$a^2>b^2$ 显然有不成立;

④正确.可用排除法得,也可以分情况考察,可见④总成立.

**【例 13】** 已知 $x<y<0$,设 $A=|x|$,$B=|y|$,$C=\frac{1}{2}|x+y|$,$D=\sqrt{xy}$,则它们的大小关系是

A.$B<D<C<A$　　B.$A<D<C<B$

C.$A<C<D<B$　　D.$D<B<C<A$

**解**　显然 $A$ 最大,排除 B、C.

又 $C>B$,且 $C>D$ 也容易发现,再取特值可知 $D>B$.

选 A.

**【例 14】** 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(x)$,且 $f(x)$在$[-3,-2]$上是减函数,又 $\alpha$、$\beta$ 是锐角三角形的两个内角,则

A.$f(\sin\alpha)>f(\cos\beta)$　　B.$f(\sin\alpha)<f(\cos\beta)$

C. $f(\sin\alpha)>f(\sin\beta)$　　　　D. $f(\cos\alpha)>f(\cos\beta)$

**解**　$\because f(x+2)=f(x)$,

$\therefore f(x)$的周期为 2.

又 $f(x)$在$[-3,-2]$上是减函数,

$\therefore f(x)$在$[-1,0]$上是减函数.

又 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$\therefore f(x)$在$[0,1]$上是增函数.

又 $\alpha$、$\beta$ 是锐角三角形的两个内角,

$\therefore \alpha+\beta>\frac{\pi}{2},\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta.$

$$\therefore \quad \sin\alpha>\cos\beta.$$

即
$$f(\sin\alpha)>f(\cos\beta).$$

选 A.



**【例 15】**　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+=\{正实数\}$,且 $b<c$,比较 $ab$ 与 $ac+bc$ 的大小.

**解**　$ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc.$

$\because b<c$,

$$\therefore \quad b-c<0,$$

又 $a>0$,

$$\therefore \quad a(b-c)<0.$$

$\because b>0,c>0$,

$$\therefore \quad bc>0,-bc<0.$$

$$\therefore \quad a(b-c)-bc<0,$$

$$\therefore \quad ab<ac+bc.$$

**【例 16】**　已知,$a,b\in\mathbf{R}^+=\{正实数\}$,且 $a\neq b$,比较 $a^5+b^5$ 与 $a^3b^2+a^2b^3$的大小.

**解**　
$$\begin{aligned}(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)&=(a^5-a^3b^2)-(a^2b^3-b^5)\\&=a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)\\&=(a^2-b^2)(a^3-b^3)\\&=(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

由　$a,b\in\mathbf{R}^+$知,$a+b>0,a^2+ab+b^2>0.$

又 $a\neq b$,

$\therefore \qquad (a-b)^2>0.$

$\therefore \qquad (a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0.$

即　$(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)>0,$

$\therefore \qquad a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$

**【例 17】** 已知正数 $a,b,c$ 成等比数例，比较 $a^2-b^2+c^2$ 与 $(a-b+c)^2$ 的大小.

**解**　由题设可知，$a>0,b>0,c>0$，且 $b^2=ac$，

$\therefore (a^2-b^2+c^2)-(a-b+c)^2$

$=a^2-b^2+c^2-a^2-b^2-c^2+2ab-2ac+2bc$

$=2ab-4b^2+2bc$

$=2b(a-2b+c)$　　$b=\sqrt{ac}$

$=2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant 0.$

$\therefore \qquad a^2-b^2+c^2\geqslant(a-b+c)^2.$

~~**【例 18】**~~ (2001 年全国高考试题)若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则　　(　　)

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<1$　　D. $ab>2$

**解**　$a-b=(\sin\alpha-\sin\beta)+(\cos\alpha-\cos\beta)$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$\because 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \qquad -\frac{\pi}{8}<\frac{\alpha-\beta}{2}<0,$

$\therefore \qquad \sin\frac{\alpha-\beta}{2}<0.$

同理　$0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \qquad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}>\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$　　注意角的范围

$\therefore \qquad a-b<0$，即 $a<b$.

选 A.

点评

本题考查:作差比较法;不等式的性质;三角函数的和差化积.

【例 19】 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+=\{正实数\}$,比较$\frac{a+b}{2}$与$(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$的大小.

解 $\because \frac{\sqrt{ab}}{(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{b}{a+b}}b^{\frac{1}{2}-\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}$,$a,b\in\mathbf{R}^+$,

$\therefore$ 若 $a\geqslant b$,则$\frac{a}{b}\geqslant 1$,$a-b\geqslant 0$,根据指数函数性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}\geqslant 1$;

若 $a<b$,则$0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,根据指数函数性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}>1$.

又$\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

$$\therefore \qquad \frac{a+b}{2}\geqslant(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}.$$

【例 20】 已知 $a>b>c>0$,比较 $a^a b^b c^c$ 与$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$的大小.

解 $\because \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}}\cdot b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}}\cdot c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}},$$

又 $a>b>c>0$,

$$\therefore \qquad \frac{a}{b}>1,\frac{a-b}{3}>0,$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}>1.$$

同理 $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}>1,\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}>1.$

$$\therefore \qquad \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}>1,$$

$$\therefore \qquad a^a b^b c^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

【例 21】 设 $a>1$,$m=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$,$n=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$,比较 $m$ 与 $n$ 的大小.

解 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}$

$$=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}-(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})$$
$$=\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}.$$

$\because\ a>1$,

$\therefore$ $$\sqrt{a+1}>0,\sqrt{a-1}>0,$$

$\therefore$ $$\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}>0,$$

即 $$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}>0,$$

$\therefore$ $$\frac{1}{m}>\frac{1}{n}.$$

又 $m>0,n>0$,

$\therefore$ $$n>m.$$



**【例 22】** 已知 $a>b>0$,比较$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$与$\sqrt[3]{a-b}$的大小.

**解** $\because\ a>b>0$,

$\therefore\ \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}>0,\sqrt[3]{a-b}>0$,

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3-(\sqrt[3]{a-b})^3$$
$$=(a-3\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}-b)-(a-b)$$
$$=3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}).$$

又 $a>b>0$,

$\therefore$ $$\sqrt[3]{ab}>0,\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a},$$

$\therefore$ $$3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})<0,$$

$\therefore$ $$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3<(\sqrt[3]{a-b})^3,$$

$\therefore$ $$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}.$$

**点评**

本例说明用作差法比较 $a$ 与 $b$ 大小,不只是作差 $a-b$,也可作差 $a^2-b^2$、$a^3-b^3$ 及$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.特别要注意$\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a}$,两式互为倒数,其特点是被开方数相差 1.

**【例 23】** 已知 $-1<a<1$,比较 $1-\sqrt{1-a}$与$\sqrt{1+a}-1$ 的大小.

**解** $(1-\sqrt{1-a})-(\sqrt{1+a}-1)=2-(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a})$