

冷建华 等编著

离散时间信号处理

LISAN SHIJIAN XINHAO CHULI

011.7
8

国防科技大学出版社

离散时间信号处理

冷建华 王琰峰 陈淑云 编著

国防科技大学出版社

·长沙·

内 容 简 介

本书论述离散时间信号和离散时间系统,重点讨论离散随机信号的理论及其处理。全书内容分三部分,共八章:前二章为第一部分,用于简要地复习在“信号与系统”和“数字信号处理”中介绍过的连续时间信号和离散时间信号的基本概念和基本运算;第三、第四章为第二部分,讨论希尔伯特变换和同态信号处理;最后四章是第三部分,讨论离散随机信号的理论及其处理。

本书是针对硕士研究生以及相应水平的人员撰写的,书中数学分析较多,要求读者具有较高的理论基础和专业能力。本书对从事数字信号处理工作的学者、研究人员和研究生将是一本好的参考书、有益的工具书和进一步提高离散时间信号处理能力与水平的教材。

图书在版编目(CIP)数据

离散时间信号处理/冷建华,王琰峰,陈淑云编著.—长沙:国防科技大学出版社,2004.5
ISBN 7-81099-075-6

I. 离… II. ①冷… ②王… ③陈… III. 离散信号:时间信号—信号处理
IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 036921 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail: gndubs@public.cs.hn.cn
责任编辑:徐 飞 责任校对:唐卫葳
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:12.75 字数:295千
2004年5月第1版第1次印刷 印数:1-3000册

*

ISBN 7-81099-075-6/TN·11

定价:19.00元

前 言

本书是《数字信号处理》的续篇,《数字信号处理》是大学有关专业本科学生的教材,而本书则作为相关专业研究生的教材。《数字信号处理》一书讨论的内容,主要是离散时间信号的傅氏变换和数字滤波器,本书在该书内容的基础上,介绍了不再属于傅里叶变换家族的另一种重要的变换——希尔伯特变换。《数字信号处理》一书讨论的系统,全都是线性系统,本书在线性系统的基础上,介绍了最终仍可由线性系统作处理的一种非线性系统——同态信号处理系统。

本书的重点是离散随机信号的理论及其处理。在浩瀚的信息科学的大海,随机信号是兴风作浪的精灵,是呼风唤雨的魔妖。遗憾的是,囿于篇幅,也由于在理论上更为复杂的缘故,《数字信号处理》一书仅讨论了确定信号的处理,对随机信号未作任何涉及。本书用了四章的篇幅讨论离散随机信号。在介绍了离散随机信号的基本理论以后,本书应用离散随机信号理论,深入地分析了数字处理过程中的精确度和误差。对实际应用中十分重要的随机信号的功率谱密度,本书在最后二章详细地讨论了功率谱密度的经典谱估计方法和近代谱估计方法。

在所组织的内容中,适当地溶入了多年来从事数字信号处理科研和教学的体会和研究成果。对希尔伯特变换,本书给出了零极点对数字系统频率响应的影响。对同态信号处理,本书阐述了按步实现卷积同态特征系统时, Z 变换和 Z 反变换的DFT计算过程。对数字处理的误差分析,本书介绍了多端输入输出系统的概念。对经典谱估计和近代谱估计,本书给出了较为详细的分析推导。这些内容,对深入掌握离散时间信号处理的理论和应用,是有益的。

《离散时间信号处理》是针对硕士研究生以及相应水平的人员撰写的,书中数学分析较多,理论阐述较深,要求读者具有较高的理论基础和专业能力。本书对从事数字信号处理工作的学者、研究人员和研究生将是一本好的参考书、有益的工具书和进一步深入和提高离散时间信号处理能力与水平的教材。

鉴于作者水平有限,错误之处,敬请读者指正。

编 著 者

2003年11月20日

目 录

绪 论	(1)
第一章 连续时间信号和系统	(3)
§ 1.1 连续时间的基本信号	(3)
§ 1.2 连续时间信号的卷积和相关	(4)
§ 1.3 连续时间信号的傅氏变换	(6)
§ 1.4 连续时间系统	(7)
习 题	(8)
第二章 离散时间信号和系统	(11)
§ 2.1 离散时间的基本信号	(11)
§ 2.2 离散时间信号的卷积和相关	(14)
§ 2.3 离散时间信号的傅氏变换	(16)
§ 2.4 离散时间系统	(19)
习 题	(21)
第三章 希尔伯特变换	(24)
§ 3.1 连续希氏变换	(24)
§ 3.2 连续周期希氏变换	(29)
§ 3.3 零极点对数字系统频率响应的影响	(32)
§ 3.4 特殊的离散时间系统	(37)
§ 3.5 序列傅氏变换的希氏变换关系	(40)
§ 3.6 序列希氏变换	(43)
习 题	(50)
第四章 同态信号处理	(53)
§ 4.1 广义叠加原理	(53)
§ 4.2 相乘同态处理系统	(56)
§ 4.3 卷积同态处理系统	(60)
§ 4.4 复倒谱	(64)

§ 4.5 复倒谱计算	(67)
习 题	(72)
第五章 离散随机信号	(74)
§ 5.1 随机变量	(74)
§ 5.2 平稳随机序列	(77)
§ 5.3 功率谱密度	(81)
5.3.1 相关序列	(81)
5.3.2 协方差序列	(82)
§ 5.4 复功率谱密度	(84)
§ 5.5 线性非时变系统对随机序列的响应	(87)
5.5.1 平稳随机序列输入线性非时变系统	(88)
5.5.2 白噪声序列输入线性非时变系统	(92)
习 题	(93)
第六章 数字处理的误差分析	(97)
§ 6.1 二进数的定点和浮点表示	(97)
§ 6.2 二进数的舍入和截尾	(100)
§ 6.3 运算量化和极限循环	(103)
§ 6.4 量化误差的统计分析	(107)
§ 6.5 多端系统和输入量化	(110)
§ 6.6 IIR 滤波器的运算量化噪声	(112)
§ 6.7 FIR 滤波器的运算量化噪声	(117)
§ 6.8 定点时 DFT 的运算量化噪声	(122)
6.8.1 DFT 直接计算的运算量化噪声	(122)
6.8.2 FFT 计算的运算量化噪声	(124)
6.8.3 逐级除 2FFT 计算的运算量化噪声	(127)
§ 6.9 浮点 FFT 的运算量化噪声	(130)
习 题	(134)
第七章 经典谱估计	(137)
§ 7.1 数字特征估计的一般方法	(137)
§ 7.2 均值和方差的估计	(139)
§ 7.3 自相关序列的估计	(143)
§ 7.4 功率谱密度的估计	(149)
§ 7.5 二次窗化估计	(154)
§ 7.6 巴特利特估计	(159)
习 题	(161)

第八章 近代谱估计	(163)
§ 8.1 自回归估计	(163)
§ 8.2 自回归模型参数的递推算法	(168)
8.2.1 σ_p^2 和 $\alpha_{p,p}$ 的递推计算	(168)
8.2.2 $\alpha_{p,i} (i = 1, 2, \dots, p - 1)$ 的递推计算	(172)
8.2.3 一般的递推计算过程	(175)
§ 8.3 反射系数的递推算法	(177)
§ 8.4 随机复指数序列的自相关矩阵	(181)
§ 8.5 数字角频率的计算	(184)
§ 8.6 白噪声条件下的计算	(187)
§ 8.7 信号的谱分析方法	(190)
习 题	(192)
参考文献	(194)

绪 论

离散时间信号处理是 20 世纪 60 年代发展起来、70 年代趋于成熟、至今仍在发展的一门学科,它研究的课题是如何应用计算机和各种数字硬件处理各种各样的信号。

信号的各种处理,如滤波、谱分析、变换、编码、重建和估计等,是通信、雷达、声纳、导航、遥测、遥感、遥控等领域中非常重要的问题,更是语音处理、图像处理、信号分析中的基本内容。信号处理的理论和方法是非常丰富的,大体上可分为连续时间信号处理和离散时间信号处理两大类。

连续时间信号处理的理论和方法是较早研究的一类信号处理的理论和方法,它起自 19 世纪末而完备于 20 世纪 50 年代。这种处理方法是以前各种分立元件,如电阻、电容、电感为基础的,简单的阻容滤波器和电抗型滤波器如图 0.1 所示。

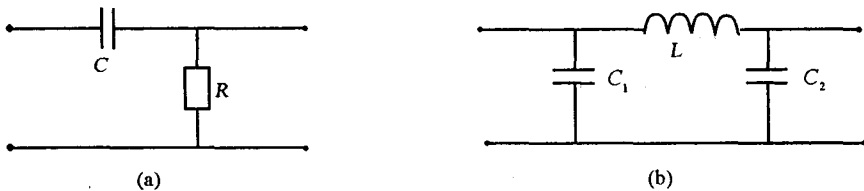


图 0.1 模拟滤波器

随着大规模集成电路和超大规模集成电路的发展以及计算机技术的进步,从 20 世纪 60 年代发展起来了离散时间信号处理技术。离散时间信号处理技术用计算机和各种数字硬件替代各种模拟的电容电感网络,对实际的各种信号进行处理。因此,离散时间信号处理可以看做网络理论和计算机技术相结合的一门学科。

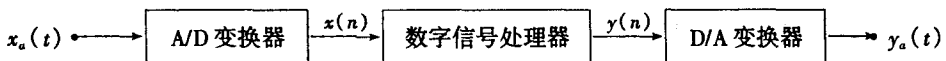


图 0.2 数字处理系统

图 0.2 给出了应用离散时间信号处理方法处理模拟信号的方框图。为了用数字的方法处理模拟信号,模拟信号 $x_a(t)$ 首先必须数字化,这在图 0.2 中是由 A/D 变换器完成的。A/D 变换器的作用是将模拟信号 $x_a(t)$ 抽样、量化和编码,即将连续时间信号变成一个个适合于数字处理的码组。而经过数字处理的码组由 D/A 变换器转换成模拟信号 $y_a(t)$ 输出。

图 0.2 中的数字信号处理器承担离散时间信号的各种处理工作。这种数字信号处理器可以是一台通用计算机,也可以是一个由各种数字硬件构成的专用处理装置;可以是某种硬件系统,也可以是某个处理软件或软件包。输入数字信号处理器的是一串或一长串数,这一串数就是数字信号,在数学上通常用序列表示,如图 0.2 中的 $x(n)$ 。输出数字信号处理器的是序列 $y(n)$,自然也是一串或一长串数。

和模拟信号处理相比,离散时间信号处理具有如下突出的优点。

1. 精度高

在模拟系统中,处理元件(如电阻、电容等)其数值的精度达到 10^{-3} 是十分困难的;而在数字系统中可以容易地达到 10^{-5} 以上的精度。因此,在高精度的系统和测量设备中,离散时间处理是非常有效的。

2. 稳定性好

模拟系统中的一些参数,如电阻器的电阻值和电容器的电容值等,一般随着温度等环境因素的变化而变化,从而系统的性能也随之变化;而数字系统中的参数不受任何环境因素的影响。

3. 性能灵活可变

模拟系统一旦构成,想改变系统的性能是非常困难的;而数字系统可以通过改变存储器中的参数,灵活地改变系统的性能,从而适应不同的实际要求。

4. 功能多样

模拟系统的性能受元器件的限制,有着很大的局限性;而数字系统的性能则要广泛得多,它不仅能实现模拟系统的各种功能,而且能实现模拟系统不能完成的许多功能,如同态滤波、多维处理等等。

和模拟系统相比,数字系统的主要缺点是处理速度慢。模拟系统对信号的处理是以近于光速的速度进行的,而数字系统作信号处理的基础是数值运算,处理速度依赖于计算机的运算速度。因此,数字系统目前还不能处理频率很高的信号。另外,数字系统的结构复杂、价格较贵,对一般要求不高的系统,还不便使用。

本书的重点是离散随机信号的理论及其处理,用了四章的篇幅讨论离散随机信号。“数字信号处理”仅讨论了确定信号的处理,对随机信号未作任何涉及。本书内容分三个部分,总共八章。前 2 章为第一部分,用于简要地复习在“信号与系统”和“数字信号处理”中介绍过的连续时间信号和离散时间信号的基本概念和基本运算。第三、四章为第二部分,讨论希尔伯特变换和同态信号处理。最后 4 章是第三部分,讨论离散随机信号的理论及其处理,第五章系统介绍了离散随机信号的基本理论,第六章应用离散随机信号理论,深入地分析了数字处理过程中的精确度和误差;对实际应用中十分重要的随机信号的功率谱密度,本书在最后 2 章详细地讨论了功率谱密度的经典谱估计方法和近代谱估计方法。

第一章 连续时间信号和系统

本书讨论离散时间信号处理,离散时间信号是我们主要感兴趣的信号。可是,离散时间信号处理是从模拟信号处理发展来的,离散时间信号和连续时间信号有着密切的关系。为了给后续讨论打下一定的基础,本章对连续时间信号和系统作一简要的介绍。

§ 1.1 连续时间的基本信号

连续时间信号在数学上可以用函数 $x_a(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) 表示。例如对单位冲激信号,它的表示式如下:

$$x_a(t) = \delta_a(t) = \begin{cases} +\infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (1.1)$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) dt = 1 \quad (1.2)$$

这种信号如图 1.1(a) 所示。

另一种基本的连续时间信号是单位阶跃信号,它的表示式如下:

$$x_a(t) = u_a(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.3)$$

其图形如图 1.1(b) 所示。

在连续时间信号的分析过程中,单位复指数信号起着重要的作用,它的表示式为

$$\tilde{x}_a(t) = e^{j\Omega t} \quad (1.4)$$

式中, Ω 为单位复指数信号的模拟角频率(analog angular frequency),并且

$$\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T} \quad (1.5)$$

其中, F 和 T 分别为模拟频率(analog frequency)和周期。

与单位复指数信号有着密切关系的是正弦信号(或余弦信号),它的表示式是

$$\tilde{x}_a(t) = A \sin(\Omega t + \phi) \quad (1.6)$$

式中 A 和 ϕ 分别为正弦信号的幅度和初相位。 Ω 为正弦信号的模拟角频率,其情形与单位复指数信号时相同。容易看出,无论是正弦信号还是单位复指数信号都是周期信号,我们用顶端的波纹号“~”来表示这种周期性。 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时正弦信号的曲线如图 1.1(c) 所示。

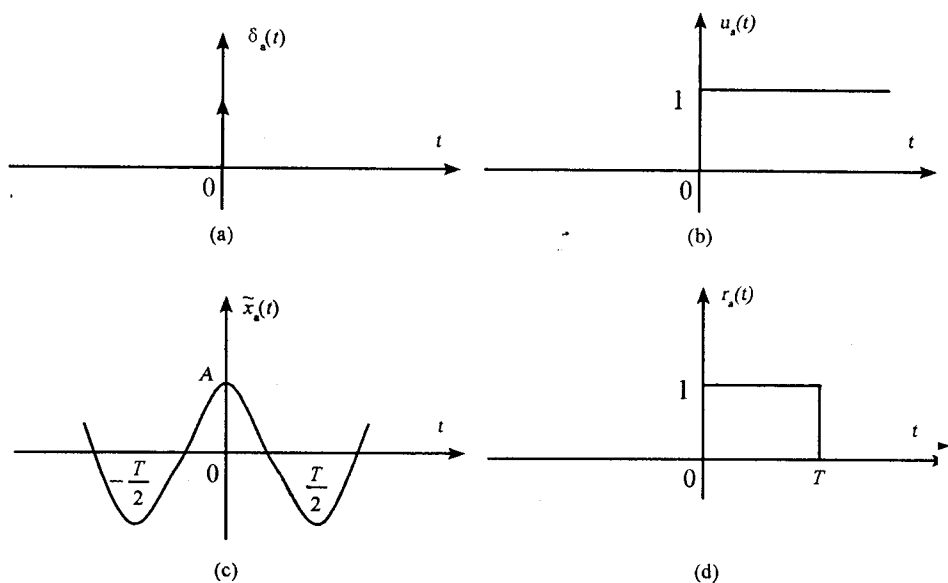


图 1.1 基本连续时间信号

单位矩形信号也是一种基本的连续时间信号,它的表示式如下

$$x_a(t) = r_a(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (1.7)$$

这种信号如图 1.1(d)所示。显然,它的曲线是矩形形状的,这是把它称作矩形信号的缘由。

§ 1.2 连续时间信号的卷积和相关

1. 卷 积

连续时间信号的卷积(convolution)运算有线性卷积、周期卷积和循环卷积三种。设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为一般的连续时间信号,则由 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的线性卷积(linear convolution)可得到另一连续时间信号 $g_a(t)$:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= x_a(t) * y_a(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) y_a(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.8)$$

设 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 是周期均为 T 的连续时间周期信号,则由 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 的周期卷积(periodic convolution)可得到另一周期也为 T 的连续时间周期信号 $\tilde{g}_a(t)$:

$$\tilde{g}_a(t) = \tilde{x}_a(t) \tilde{*} \tilde{y}_a(t)$$

$$= \int_0^T \tilde{x}_a(\tau) \tilde{y}_a(t - \tau) d\tau \quad (1.9)$$

设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为连续时间的有限信号, 并且

$$x_a(t) = y_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geq T) \quad (1.10)$$

则由 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的循环卷积(cyclic convolution)可得到另一连续时间的有限信号 $g_a(t)$:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= x_a(t) \otimes y_a(t) \\ &= \int_0^T x_a(\tau) y_a(\langle t - \tau \rangle_T) d\tau \cdot r_a(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中, $\langle t - \tau \rangle_T$ 表示对 $t - \tau$ 作模 T 运算, 并且

$$g_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geq T) \quad (1.12)$$

若仅考虑 $0 \leq t < T$, 则

$$\begin{aligned} g_a(t) &= x_a(t) \otimes y_a(t) \\ &= \int_0^T x_a(\tau) y_a(\langle t - \tau \rangle_T) d\tau \quad (0 \leq t < T) \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. 相 关

连续时间信号的相关(correlation)运算也有线性相关、周期相关和循环相关三种。设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为一般的连续时间信号, 则由 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的线性相关(linear correlation)可得到另一连续时间信号 $g_{xy}(t)$:

$$\begin{aligned} g_{xy}(t) &= x_a(t) \square y_a(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) y_a^*(\tau - t) d\tau \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau + t) y_a^*(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

设 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 是周期均为 T 的连续时间周期信号, 则由 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 的周期相关(periodic correlation)可得到另一周期也为 T 的连续时间周期信号 $\tilde{g}_{xy}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{xy}(t) &= \tilde{x}_a(t) \bar{\square} \tilde{y}_a(t) \\ &= \int_0^T \tilde{x}_a(\tau) \tilde{y}_a^*(\tau - t) d\tau \end{aligned} \quad (1.16)$$

设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为连续时间的有限信号, 并且

$$x_a(t) = y_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geq T) \quad (1.17)$$

则由 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的循环相关(cyclic correlation)可得到另一连续时间的有限信号 $g_{xy}(t)$:

$$\begin{aligned} g_{xy}(t) &= x_a(t) \ominus y_a(t) \\ &= \int_0^T x_a(\tau) y_a^*(\langle \tau - t \rangle_T) d\tau \cdot r_a(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

并且

$$g_{xy}(t) = 0 \quad (t < 0, t \geq T) \quad (1.19)$$

若仅考虑 $0 \leq t < T$, 则

$$\begin{aligned}
 g_{xy}(t) &= x_a(t) \odot y_a(t) \\
 &= \int_0^T x_a(\tau) y_a^*(\langle \tau - t \rangle_T) d\tau \quad (0 \leq t < T) \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

§ 1.3 连续时间信号的傅氏变换

连续时间信号的傅氏变换有连续傅氏级数变换、连续傅氏变换和拉氏变换三种。设 $\tilde{x}_a(t)$ 是周期为 T 的连续时间周期信号, 即

$$\tilde{x}_a(t+T) = \tilde{x}_a(t) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1.21)$$

若在区间 $[0, T]$ 上, $\tilde{x}_a(t)$ 平方可积, 则其连续傅氏级数变换 CFST (continuous Fourier series transform) 为:

$$X_a(k) = \int_0^T \tilde{x}_a(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad (k \text{ 为整数}) \quad (1.22)$$

相应的傅氏级数系数为:

$$C_a(k) = \frac{1}{T} X_a(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}_a(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad (k \text{ 为整数}) \quad (1.23)$$

$X_a(k)$ 的连续傅氏级数反变换 ICFST (inverse continuous Fourier series transform) 为:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_a(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_a(k) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

上式通常又称为 $\tilde{x}_a(t)$ 的连续傅氏级数 CFS (continuous Fourier series)。连续傅氏级数系数 $C_a(k)$ 就是周期信号 $\tilde{x}_a(t)$ 的频谱 (spectrum), 它是离散谱, 通常是复数。它的模数 $|C_a(k)|$ 和幅角 $\text{Arg}[C_a(k)]$, 分别为 $\tilde{x}_a(t)$ 的幅度谱 (amplitude spectrum) 和相位谱 (phase spectrum)。

对一般的连续时间信号 $x_a(t)$, 若 $x_a(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 则 $x_a(t)$ 的连续傅氏变换 CFT (continuous Fourier transform)

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (-\infty < \Omega < +\infty) \quad (1.25)$$

相应 $X_a(j\Omega)$ 的连续傅氏反变换 ICFT (inverse continuous Fourier transform)

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1.26)$$

$X_a(j\Omega)$ 就是信号 $x_a(t)$ 的频谱密度 (spectrum density)。通常它是复数, 它的模数 $|X_a(j\Omega)|$ 和幅角 $\text{Arg}[X_a(j\Omega)]$ 分别为 $x_a(t)$ 的幅度谱密度 (amplitude spectrum density) 和相位谱密度 (phase spectrum density)。

对连续时间的非周期信号 $x_a(t)$, 其拉氏变换 LT (Laplace transform) 定义为:

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-st} dt \quad (s \text{ 为任意复数}) \quad (1.27)$$

相应的拉氏反变换 ILT(inverse Laplace transform)为:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_a(s) e^{st} ds \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1.28)$$

一般说来,对任意给定的复数 s , (1.27)式右侧的无穷积分不一定收敛。使该积分绝对收敛的复数 s 的集合称为 $x_a(t)$ 拉氏变换的绝对收敛域。

复数 s 称为 $x_a(t)$ 的模拟复频率(analog complex frequency), $X_a(s)$ 称为 $x_a(t)$ 的复频谱密度(complex spectrum density)。拉氏变换也是一种傅氏变换,若 $X_a(s)$ 的收敛域包含着平面上的虚轴,则 $x_a(t)$ 的连续傅氏变换 $X_a(j\Omega)$ 和拉氏变换 $X_a(s)$ 有如下关系:

$$X_a(j\Omega) = X_a(s) \Big|_{s=j\Omega} \quad (-\infty < \Omega < +\infty) \quad (1.29)$$

上述连续时间非周期信号 $x_a(t)$ 的拉氏变换有时称为双边拉氏变换。对 $x_a(t)$, 若仅关心 $t \geq 0$ 的情形,可应用单边拉氏变换,其定义如下:

$$X_1(s) = \int_0^{+\infty} x_a(t) e^{-st} dt \quad (s \text{ 为任意复数}) \quad (1.30)$$

相应的单边拉氏反变换

$$x_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_1(s) e^{-st} ds & (t \geq 0) \\ \text{未知值} & (t < 0) \end{cases} \quad (1.31)$$

由(1.30)式可以看出, $x_a(t)$ 的单边拉氏变换 $X_1(s)$ 就是 $x_a(t) \cdot u_a(t)$ 的双边拉氏变换 $X_a(s)$, 即

$$X_1(s) = \text{LT}[x_a(t) \cdot u_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) \cdot u_a(t) e^{-st} dt \quad (1.32)$$

对单边拉氏变换 $X_1(s)$ 来说,其收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ 。其中, σ_0 为一给定的实数。

§ 1.4 连续时间系统

在对连续时间信号的运算和变换作了以上简单介绍后,我们在这里简要地说明一下连续时间系统。人们称输入和输出均为连续时间信号的系统为连续时间系统,或模拟系统,或模拟网络等等。

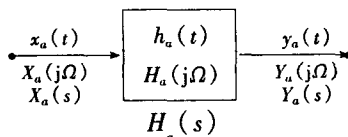


图 1.2 连续时间线性非时变系统

对线性非时变的连续时间系统,可以用图 1.2 的方框图来表示它。在图中, $x_a(t)$ 、 $y_a(t)$ 和 $h_a(t)$ 分别代表系统的输入信号、输出信号和冲激响应(impulse response), 它们之

间的关系可以用如下的线性卷积描述为:

$$y_a(t) = x_a(t) * h_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau \quad (1.33)$$

另外, $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 间的关系也可以用如下的线性常系数微分方程来表述

$$\sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i y_a(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M a_i \frac{d^i x_a(t)}{dt^i} \quad (1.34)$$

线性非时变系统冲激响应函数 $h_a(t)$ 的连续傅氏变换 $H_a(j\Omega)$ 就是该系统的频率响应 (frequency response), 它和系统的输入频谱密度 $X_a(j\Omega)$, 输出频谱密度 $Y_a(j\Omega)$ 有着如下的关系

$$Y_a(j\Omega) = H_a(j\Omega) \cdot X_a(j\Omega) \quad (1.35)$$

$H_a(j\Omega)$ 的模数 $|H_a(j\Omega)|$ 和幅角 $\text{Arg}[H_a(j\Omega)]$ 分别是系统的幅度响应 (amplitude response) 和相位响应 (phase response)。

冲激响应 $h_a(t)$ 的拉氏变换 $H_a(s)$ 是系统的拉氏传递函数 (laplace transfer function), 它和输入信号 $x_a(t)$ 、输出信号 $y_a(t)$ 的拉氏变换 $X_a(s)$ 、 $Y_a(s)$ 有着与 (1.35) 式相似的关系

$$Y_a(s) = H_a(s) \cdot X_a(s) \quad (1.36)$$

若系统是因果稳定的, 则拉氏传递函数 $H_a(s)$ 的极点完全位于左半 s 平面上。

模拟滤波器是一种重要的连续时间系统。它是因果稳定的线性非时变系统, 它具有选择不同频率信号的能力。模拟滤波器的冲激响应、频率响应和拉氏传递函数的概念与上述概念是完全一样的。模拟滤波器按通带一般可分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器, 它们可由归一化模拟低通滤波器设计。

归一化模拟低通滤波器是一种理论上的滤波器, 它是一般模拟滤波器分析和设计的基础。归一化模拟低通滤波器有巴特沃思滤波器、切比雪夫滤波器和椭圆滤波器等, 由频率变换可将一般模拟滤波器的设计指标变成归一化模拟低通滤波器的设计指标。在用查表法得到归一化滤波器的拉氏传递函数 $\hat{G}_a(s)$ 后, 由复频率 s 和 s 之间的关系, 可由 $\hat{G}_a(s)$ 得到实际模拟滤波器的拉氏传递函数 $G_a(s)$, 从而完成模拟滤波器的设计。

模拟滤波器的实现过程是由实际电路设计实现得到的拉氏传递函数 $G_a(s)$ 的过程, 这个过程包括了实现拉氏传递函数的电路设计和具体的电路制作。电路设计和具体的电路制作已是电路基础课程的内容, 这里不再赘述。

习 题

1.1 计算下述连续时间信号的线性卷积:

(1) $x_a(t) = \delta_a(t)$ $\tilde{y}_a(t) = 15.8\sin(20\pi t + 0.35\pi)$

(2) $x_a(t) = r_a(t)$ $y_a(t) = r_a(t)$

(3) $x_a(t) = e^{-\alpha t} \cdot u_a(t)$ $y_a(t) = e^{-\beta t} \cdot u_a(t)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)

1.2 计算下述连续时间周期信号的周期卷积:

(1) $\tilde{x}_a(t) = \tilde{\delta}_a(t)$ ($\tilde{\delta}_a(t)$ 的周期为 5ms)

$$\tilde{y}_a(t) = 12\cos(400\pi t + 0.65\pi)$$

(2) $\tilde{x}_a(t) = 8\sin(40\pi t + 0.4\pi)$

$$\tilde{y}_a(t) = 2\sin(80\pi t + 0.15\pi) \quad (\text{周期为 } 50\text{ms})$$

1.3 计算下述连续时间信号的线性相关:

(1) $x_a(t) = r_a(t)$ $y_a(t) = r_a(t)$

(2) $x_a(t) = e^{-\alpha t} r_a(t)$ $y_a(t) = e^{-\beta t} r_a(t)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)

(3) $x_a(t) = e^{-jT^2}$ $y_a(t) = e^{-jT^2}$ ($T > 0$)

1.4 计算下述连续时间信号的连续傅氏变换(CFT) $X_a(j\Omega)$:

(1) $x_a(t) = A \cdot \delta_a(t)$ ($A > 0$)

(2) $x_a(t) = A \cdot r_a(t)$ ($A > 0$)

(3) $\tilde{x}_a(t) = A \cdot \cos\Omega_0 t$ ($A > 0, \Omega_0 > 0$)

(4) $\tilde{x}_a(t) = A \cdot \sin\Omega_0 t$ ($A > 0, \Omega_0 > 0$)

(5) $x_a(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\Omega_0 t \cdot u_a(t)$ ($A > 0, \Omega_0 > 0, \alpha > 0$)

(6) $x_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & (|t| \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$

1.5 计算下述频谱函数的连续傅氏反变换(ICFT) $x_a(t)$:

(1) $X_a(j\Omega) = \frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$ ($\alpha > 0$)

(2) $X_a(j\Omega) = -\frac{2}{\Omega^2}$

(3) $X_a(j\Omega) = \tau \cdot \text{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2})$ ($\tau > 0$)

1.6 计算下列连续时间信号的拉氏变换(LT):

(1) $x_a(t) = u_a(t)$

(2) $x_a(t) = e^{\alpha t} u_a(t)$ ($\alpha > 0$)

(3) $x_a(t) = A \cdot \sin\Omega_0 t \cdot u_a(t)$ ($A > 0, \Omega_0 > 0$)

(4) $x_a(t) = A \cdot \cos\Omega_0 t \cdot u_a(t)$ ($A > 0, \Omega_0 > 0$)

1.7 计算下列函数的拉氏反变换(ILT):

(1) $X_a(s) = \frac{A}{s - \alpha}$ ($\text{Re}[s] < \alpha$) ($A > 0, \alpha > 0$)

(2) $X_a(s) = \frac{A}{(s - \alpha)^2}$ ($\text{Re}[s] < \alpha$) ($A > 0, \alpha > 0$)

(3) $X_a(s) = \frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$ ($-\beta < \text{Re}[s] < \beta, \beta > 0$)

$$(4) X_a(s) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2} \quad (\text{Re}[s] < 0)$$

1.8 对图 1.3 所示的 RC 滤波器, 试求出它的频率响应 $G_a(j\Omega)$ 。若通带截止角频率 $\Omega_c = \frac{1}{RC}$, 试写出以 Ω_c 为基准的归一化频率响应 $\hat{G}_a(j\hat{\Omega})$, 并判断这种 RC 滤波器是巴特沃思滤波器, 还是切比雪夫滤波器。

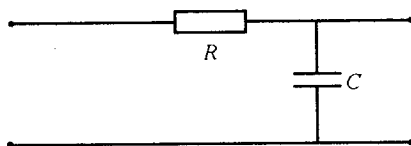


图 1.3 阻容滤波器