数理化一题多解丛书

高中数学一题多解

琚兴广　编

湖北教育出版社

说　　明

学好中学数理化基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，养成探索、思维的习惯，培养富有科学创造性的人才，是中学教学的一项重要任务，而提高数理化解题能力则是实现上述任务的一种必不可少的手段。我们在这种思想的指导下，根据现行中学教学大纲和教材的要求，编写了这套《数理化一题多解丛书》。

本册《高中数学一题多解》为这套丛书之一种，本册内容包括 100 余道题，分 10 个专题列出。作者尽力涉猎高中全部知识要点，使题目和解法都附有代表性。不少解法新颖巧妙，富于启发性。这无疑有助于发展学生的思维能力。

编　　者

1994. 8.

目　　录

一 函 数

1.1 求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域.

思路1 令 $\sqrt{1-2x}=t$,则 y 可以表示为 t 的二次函数,根据 $t\geqslant 0$ 的条件即可求得 y 的取值范围.

解法1 令 $\sqrt{1-2x}=t$,则 $x=\dfrac{1-t^2}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}y&=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}\\&=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1\quad(t\geqslant 0)\end{aligned}$$

因为关于 t 的二次函数图象为开口向下的抛物线,其顶点坐标为(1,1),且顶点横坐标 $1\in[0,+\infty)$,所以当 $t=1$,即 $x=0$ 时,$y_{\max}=1$,显然函数 y 无最小值.

故所求函数的值域是 $(-\infty,1]$.

思路2 原式移项平方可得关于 x 的二次方程,故可用 Δ 法求 y 的范围.

解法2 易知函数的定义域为 $(-\infty,1/2]$,将原表达式移项平方整理得

$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0$$

因为 x 是实数,所以

$$\Delta=4(y-1)^2-4(y^2-1)=-8y+8\geqslant 0$$

解得 $y\leqslant 1$. 当 $y=1$ 时,$x=0\in(-\infty,1/2]$,所以当 $x=0$ 时,$y_{\max}=1$.

故所求函数的值域是 $(-\infty,1]$.

说明　应用 Δ 法求形如 $y=ax+b+k\sqrt{cx+d}$ $(ack\neq 0)$ 函数的最值，求得 y 的最值 y_0 后，必须求出相应的 x 值 x_0，若 x_0 存在且满足 $cx_0+d\geqslant 0$，则函数 y 可取最值 y_0，否则 Δ 法失效.

思路 3　原式移项平方后可化为关于 x 的二次方程，y 可以看成参数. 故可根据 x 的存在范围应用实根分布法求 y 的取值范围.

解法 3　原式移项平方整理化得

$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0\quad(x\leqslant y)$$

令 $f(x)=x^2-2(y-1)x+y^2-1$，则因为方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,y]$ 上有解，所以

$$f(y)<0\quad ①\qquad 或\qquad \begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ \Delta\geqslant 0\\ \dfrac{2(y-1)}{2}\leqslant y\end{cases}\quad ②$$

由 ① 得 $y^2-2(y-1)y+y^2-1<0$，解得 $y<1/2$.

由 ② 得 $\begin{cases}y\geqslant 1/2\\ y\leqslant 1\\ -1\leqslant 0\end{cases}$　解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

综上得 $y\in(-\infty,\dfrac{1}{2})\cup[\dfrac{1}{2},1]$，即 $y\in(-\infty,1]$.

解法 4　$\because y-x=\sqrt{1-2x}\geqslant 0$，　$\therefore x\leqslant y$ 且 $x\leqslant 1/2$.

原式移项平方整理得

$$x^2-2(y-1)x+y^2-1=0\quad(x\leqslant y 且 x\leqslant 1/2)$$

令 $f(x)=x^2-2(y-1)x+y^2-1$.

因为方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,1/2]$ 上有解，所以

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad ① \quad \text{或} \quad \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0 \\ \Delta \geqslant 0 \\ y - 1 \leqslant 1/2 \end{cases} \quad ②$$

由 ① 得 $y^2 - y + 1/4 < 0$，即 $(y - 1/2)^2 < 0$，无解.

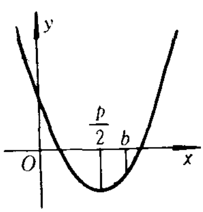
由 ② 得 $\begin{cases} \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \\ y \leqslant 1 \\ y \leqslant 3/2 \end{cases}$，解得 $y \leqslant 1$.

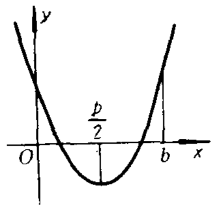
因为 $x \leqslant 1/2$，当 $y \leqslant 1$，时都有 $x \leqslant y$，故所求的函数值域为 $(-\infty, 1]$.

说明 (1) 解法 4 的最后一步："因为 $x \leqslant 1/2$，$y \leqslant 1$ 满足 $x \leqslant y$"是必要的，否则将会造成错误. 例如：求函数 $y = x - \sqrt{1-2x}$ 的值域，按解法 4，由 ① 和 ② 仍可求得 $y \leqslant 1$，若认为此函数的值域为 $(-\infty, 1]$ 便错了. 因为由原式可知 $y - x = -\sqrt{1-2x} \leqslant 0$，$y \leqslant x$. 而 $x \leqslant 1/2$，故只能取 $y \leqslant 1/2$. 因而，函数 $y = x - \sqrt{1-2x}$ 的值域应为 $(-\infty, 1/2]$.

(2) 方程 $f(x) = x^2 + px + q = 0$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上有解的充要条件是

$$f(b) < 0 \quad ① \quad \text{或} \begin{cases} f(b) \geqslant 0 \\ \Delta \geqslant 0 \\ -\frac{p}{2} \leqslant b \end{cases} \quad ②$$





思路 5　先确定函数的单调区间，再求值域.

解法 5　易知函数的定义域为$(-\infty,1/2]$.

设$x_1<x_2\leqslant 1/2$,则

$$y_1-y_2=(x_1+\sqrt{1-2x_1})-(x_2+\sqrt{1-2x_2})$$

$$=(x_1-x_2)+(\sqrt{1-2x_1}-\sqrt{1-2x_2})$$

$$=(x_1-x_2)+\frac{2(x_2-x_1)}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}$$

$$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}\right)$$

当$x_1<x_2\leqslant 0$时,

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-2x_1}>1\\ \sqrt{1-2x_2}\geqslant 1\end{array}\right\}\Longrightarrow\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}>2$$

$$\Longrightarrow 0<\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}<1$$

$$\Longrightarrow 0<1-\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}<1$$

又$x_1-x_2<0$,所以

$$(x_1-x_2)\left(1-\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}\right)<0$$

$$\Longrightarrow y_1<y_2$$

所以函数$y=x+\sqrt{1-2x}$在$(-\infty,0]$上是增函数.

当$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1/2$时,

$$\left.\begin{array}{l}0<\sqrt{1-2x_1}\leqslant 1\\ 0\leqslant\sqrt{1-2x_2}<1\end{array}\right\}\Longrightarrow 0<\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}<2$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}} > 1$$

$$\Longrightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}} < 0$$

又 $x_1 - x_2 < 0$,所以

$$(x_1 - x_2)\left(1-\frac{2}{\sqrt{1-2x_1}+\sqrt{1-2x_2}}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow y_1 > y_2$$

所以函数 $y = x + \sqrt{1-2x}$ 在[0,1/2]上是减函数.

因为当 $x = 0$ 时,$y = 1$. 所以函数有最大值 $y = 1$,而无最小值,故所求函数的值域是 $(-\infty, 1]$.

说明 若函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b),且在 $(a,x_0]$ 上是增函数(减函数),在 $[x_0,b)$ 上是减函数(增函数),则 $f(x)|_{\max} = f(x_0)$ $(f(x)|_{\min} = f(x_0))$.

解法 6 由原式可得

$$(y-x)^2 + 2x = 1 \quad (x \leqslant 1/2 \text{ 且 } x \leqslant y) \quad (*)$$

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ 时,(*)式可写为

$$(y-x)^2 + (\sqrt{2x})^2 = 1$$

设 $y - x = \cos\theta, \sqrt{2x} = \sin\theta, \theta \in [0, \pi/2]$,则

$$x = \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$y = x + \cos\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\cos\theta - 1)^2 + 1$$

因为 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$,所以 $0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$. 所以

当 $\cos\theta = 1$,即 $x = 0$ 时,$y_{\max} = 1$;

当 $\cos\theta = 0$,即 $x = 1/2$ 时,$y_{\min} = 1/2$.

所以 $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ 时，$1/2 \leqslant y \leqslant 1$.

(2) 当 $x < 0$ 时，(*) 式可写为

$$(y-x)^2-(\sqrt{-2x})^2=1$$

设 $y-x=\sec\theta$，$\sqrt{-2x}=\mathrm{tg}\theta$，$\theta \in (0,\pi/2)$，则

$$x=-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta$$

$$y=x+\sec\theta=-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta+\sec\theta$$

$$=-\frac{1}{2}(\sec\theta^2-1)+\sec\theta=-\frac{1}{2}(\sec\theta-1)^2+1$$

当 $\sec\theta \longrightarrow 1$ 即 $x \longrightarrow 0$ 时，$y \longrightarrow 1$.

$\because \sec\theta > 1$，$\therefore y < 1$.

综上，知所求函数的值域为 $(-\infty,1]$.

说明　一般地，函数 $y=ax+b+k\sqrt{cx+d}\,(ack \neq 0)$ 的值域如下：

令 $y_1=\dfrac{1}{c}(bc-ad)$，$y_2=\dfrac{1}{4ac}(4abc-4a^2d-c^2k^2)$

(1) 若 $k>0$，$ac>0$，则，$y \in [y_1,+\infty)$；

(2) 若 $k>0$，$ac<0$，则，$y \in (-\infty,y_2]$；

(3) 若 $k<0$，$ac>0$，则，$y \in [y_2,+\infty)$；

(4) 若 $k<0$，$ac<0$，则，$y \in (-\infty,y_1]$.

1.2　在已知直线 $l: y=x+2$ 上求一点 M，使它到两定点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$ 距离之和 S 最小，并求出这个最小值.

思路 1　设点 M 的坐标为 $(x,x+2)$，可用 x 的关系式表示 S. 两次平方后可消去根号，化为关于 x 的二次方程. 用 Δ 法即可求得 S 的最小值.

解法 1　设点 M 的坐标为 $(x;x+2)$，则

$$S=|MA|+|MB|$$

$$=\sqrt{(x+1)^2+(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x+2)^2}$$

$$=\sqrt{2x^2+6x+5}+\sqrt{2x^2+2x+5}$$

$$\Longrightarrow (S-\sqrt{2x^2+2x+5})^2=2x^2+6x+5$$

$$\Longrightarrow S^2-2S\sqrt{2x^2+2x+5}=4x$$

$$\Longrightarrow (S^2-4x)^2=4S^2(2x^2+2x+5)$$

$$\Longrightarrow 8(S^2-2)x^2+16S^2x+S^2(20-S^2)=0$$

作为 x 的一元二次方程,其判别式

$$\Delta=32S^2[8S^2+(S^2-2)(S^2-20)]$$

$$=32S^2(S^4-14S^2+40)$$

$$=32S^2(S^2-4)(S^2-10)\geqslant 0$$

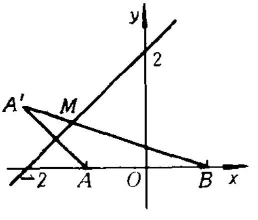
因为 $$S=\sqrt{2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}}+\sqrt{2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{2}}$$

$$>\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}>2$$

所以 $S^2-4>0$,所以 $S^2\geqslant 10$,即 $S\geqslant\sqrt{10}$,所以 S 的最小值为 $\sqrt{10}$. 这时 $x=\frac{S^2}{2-S^2}=\frac{10}{2-10}=-\frac{5}{4}$. 所以点 M 的坐标为 $(-\frac{5}{4},\frac{3}{4})$.

说明 此法计算量大,运算麻烦,作题时不宜采用.

思路2 作点 A 关于直线 l 的对称点 A',由平面几何知识可知,$|A'B|$ 就是所求的最小值,$A'B$ 与 l 的交点就是 M.



解法2 设点 A' 的坐标为 (a,b). 由轴对称的性质可知,AA' 的中点在直线 l 上,且 $AA'\perp l$. 所以

$$\begin{cases}\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{-1+a}{2}+2\\ \dfrac{b}{a+1}\cdot 1=-1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$$

所以点 A' 的坐标是$(-2,1)$，所以

$$|A'B|=\sqrt{(1+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$$

故 S 的最小值为$\sqrt{10}$.

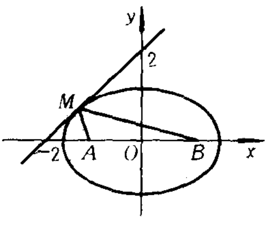
由两点式可得直线 $A'B$ 的方程为 $x+3y-1=0$.

联立 $A'B$ 与直线 l 的方程解得点 M 的坐标为$(-5/4,3/4)$.

说明 一般地，点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $ax+by+c=0$ 的对称点是

$$A'(x_0-\frac{2a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},y_0-\frac{2b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2})$$

思路 3 视点 M 为以 A、B 为焦点的动椭圆上的点. 当椭圆与直线 l 相切时，切点即为 M，椭圆长轴的长即所求的最小值.



解法 3 设以 A、B 为焦点的椭圆的长半轴为 a.

则其方程为 $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$

把 $y=x+2$ 代入椭圆方程，并整理得

$$(2a^2-1)x^2+4a^2x+a^2(5-a^2)=0$$

作为 x 的一元二次方程，其判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=4[4a^4-(2a^2-1)\cdot a^2(5-a^2)]\\&=4a^2(a^2-1)(2a^2-5)\end{aligned}$$

令 $\Delta=0$ 得 $a^2=5/2$，即 $a=\sqrt{10}/2$.

故所求的最小距离 $S=2a=\sqrt{10}$. 这时

$$x=\frac{2a^2}{1-2a^2}=\frac{5}{1-5}=-\frac{5}{4}$$

$$y=x+2=-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}$$

所以点 M 的坐标为$(-5/4,3/4)$.

思路4 点 M 到 A、B 距离之和可以看成两复数的模之和，利用不等式 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$ 中等号成立的条件即可求出 $|z_1|+|z_2|$ 的最小值.

解法4 设 M 的坐标为(x,y)，则

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\&=\sqrt{(x+1)^2+(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x+2)^2}\\&=\sqrt{2}\left[\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}\right]\\&=\sqrt{2}\left[\left|\frac{1}{2}+(x+\frac{3}{2})i\right|+\left|\frac{3}{2}-(x+\frac{1}{2})i\right|\right]\\&\geqslant\sqrt{2}\left|\frac{1}{2}+(x+\frac{3}{2})i+\frac{3}{2}-(x+\frac{1}{2})i\right|\\&=\sqrt{2}\,|2+i|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}\end{aligned}$$

其中“$\geqslant$”取用“$=$”号的条件是

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{x+\frac{3}{2}}{-(x+\frac{1}{2})}$$

解得 $x=-5/4$.

故点 M 到点 A、B 距离之和的最小值为$\sqrt{10}$，点 M 的坐标是$(-5/4,3/4)$.

说明 利用不等式 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$ 求形如

$$f(x)=\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x+c)^2+d^2}$$

函数的最小值，必须适当地选择复数 z_1、z_2，使得：

(1)z_1+z_2 与 x 无关；

(2) $z_1 = \lambda z_2$（λ 为正常数）.

把 $f(x)$ 表示为复数的模的和，共有 16 种表示法，其中只有四种能同时满足上述两个条件.

思路 5 设 A、O、B 是平面内的三点，则 $OA + OB \geqslant AB$，当且仅当 A、O、B 共线，且 O 在 A、B 之间时等号成立. 用代数语言叙述，就是：

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是任意两点，则

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

当且仅当 $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} < 0$ 时等号成立.

解法 5 设点 M 的坐标为 $(x, x+2)$，则

$$S = \sqrt{(x+1)^2 + (x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (x+2)^2}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}\right]$$

$$\geqslant \sqrt{2}\sqrt{\left[\left(x + \frac{3}{2}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1+4} = \sqrt{10}$$

所以 S 的最小值为 $\sqrt{10}$. 这时

$$\frac{x + \frac{3}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

解得 $x = -5/4$. 所以点 M 的坐标为 $(-5/4, 3/4)$.

说明 利用不等式

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

求形如

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+c)^2 + d^2}$$

函数的最小值.必须适当地选择(x_1, y_1),(x_2, y_2),使得

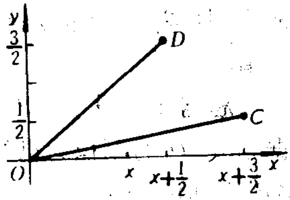
(1)$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 与 x 无关;

(2)$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} < 0$.

思路 6　设点 M 的坐标为$(x, x+2)$,则

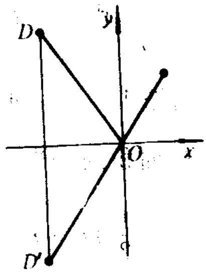
$$S = \sqrt{(x+1)^2 + (x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (x+2)^2}$$
$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2}\right]$$

令 C 的坐标为$(x+\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,$D$ 的坐标为$(x+\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.只须适当地选取 x 的值,使 $|OC| + |OD|$ 最小.



解法 6　作 D 点关于 x 轴的对称点 D'.当 D'、O、C 共线时,$|OC| + |OD'| = |OC| + |OD|$ 最小.

这时　$k_{OC} = k_{OD'}$,点 D' 的坐标为$(x+\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.所以



$$\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}$$

解得 $x = -\frac{5}{4}$.

所以点 C,D' 的坐标分别为$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$、$(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$,所以

$$|CD'| = \sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})^2 + (\frac{1}{2}+\frac{3}{2})^2} = \sqrt{5}$$

所以 $S=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$. 从而点 M 的坐标为 $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$.

说明 一般地,函数

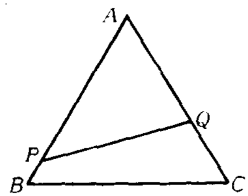
$$f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$$

$$(ac>0,bd<0)$$

当且仅当:$x=\dfrac{ad+bc}{b+d}$ 时,$f(x)$ 取最小值

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

1.3 等边三角形 ABC 的边长为 2,P、Q 分别是 AB、AC 上的点,且线段 PQ 把 $\triangle ABC$ 的面积二等分,求 PQ 的最大值与最小值.



思路 1 设 $\angle APQ=\theta$,$PQ=y$,根据 $\triangle APQ$ 的面积为已知的条件可得 θ、y、AP 之间的一个关系式. 再根据正弦定理也可得出这三个量之间的一个关系式. 从这两个关系式中消去 AP,即得 y 与 θ 的关系式.

解法 1 设 $\angle APQ=\theta$,$PQ=y$. 因为 $\triangle APQ$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半. 所以 $S_{\triangle PAQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故

$$\frac{1}{2}AP\cdot y\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow AP=\frac{\sqrt{3}}{y\sin\theta} \qquad ①$$

另一方面,在 $\triangle APQ$ 中,由正弦定理得

$$\frac{AP}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{y}{\sin 60^\circ}$$

$$\Longrightarrow AP=\frac{2y}{\sqrt{3}}\sin(120^\circ-\theta) \qquad ②$$

由 ①、② 得

$$\frac{\sqrt{3}}{y\sin\theta}=\frac{2y}{\sqrt{3}}\sin(120^\circ-\theta)$$

$$\Longrightarrow y^2=\frac{3}{2\sin\theta\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{6}{2\cos(2\theta-120^\circ)+1}$$

因为 $30^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$，所以 $-60^\circ\leqslant 2\theta-120^\circ\leqslant 60^\circ$. 所以当 $2\theta-120^\circ=0$，即 $\theta=60^\circ$ 时，$\cos(2\theta-120^\circ)$ 达到最大值 1，y^2 达到最小，这时 $y^2=\frac{6}{2+1}=2$，即 PQ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

当 $2\theta-120^\circ=-60^\circ$ 或 $2\theta-120^\circ=60^\circ$，即 $\theta=30^\circ$ 或 $\theta=90^\circ$ 时，$\cos(2\theta-120^\circ)$ 取最小值 $1/2$，y^2 达到最大，这时 $y^2=\frac{6}{1+1}=3$. 即 PQ 的最大值为 $\sqrt{3}$. 这时 PQ 为 AC 或 AB 边上的高.

思路 2 设 $AP=x$，$PQ=y$，因为 PQ 把 $\triangle ABC$ 的面积二等分，故可用 x 的关系式表示 AQ，再由余弦定理即可用 x 的关系式表示 y.

解法 2 设 $AP=x$，$PQ=y$. 因为 $\triangle APQ$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半，所以

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot AQ\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longleftrightarrow AQ=\frac{2}{x}$$

在 $\triangle APQ$ 中，由余弦定理得

$$\begin{aligned}y^2&=AP^2+AQ^2-2\cdot AP\cdot AQ\cdot\cos 60^\circ\\&=x^2+\frac{4}{x^2}-2=(x-\frac{2}{x})^2+2\end{aligned}$$

不妨设 $AP\geqslant AQ$，则 $1\leqslant x\leqslant 2$.

当 $x=\frac{2}{x}$ 即 $x=\sqrt{2}$ 时，y^2 的最小值为 2.

即 PQ 的最小值为 $\sqrt{2}$，这时，$PQ\parallel BC$，$\triangle APQ$ 为等边三角形.

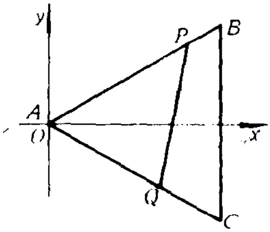
若 $\sqrt{2}<x\leqslant 2$，因为 $x-\frac{2}{x}$ 是增函数，且为正值，所以当

$x=2$时，y^2的最大值为3，即PQ的最大值为$\sqrt{3}$，这时，P点与B点重合，PQ为边AC上的高.

若$1\leqslant x<\sqrt{2}$，因为$x-\frac{2}{x}$是增函数，且为负值，所以当$x=1$时，y^2的最大值为3，即PQ的最大值为$\sqrt{3}$，这时Q点与C点重合，PQ为边AB上的高.

综上得：当$AP=\sqrt{2}$时，PQ的最小值为$\sqrt{2}$. 当$AP=1$或$AP=2$时，PQ的最大值为$\sqrt{3}$.

思路3 建立直角坐标系，用变量表示P、Q两点的坐标，然后用两点间的距离公式列出$|PQ|$与有关变量之间的关系式.



解法3 建立如图所示的直角坐标系，则AB、AC所在的直线方程分别为：

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

设P、Q的坐标分别为$(x_1,\frac{\sqrt{3}}{3}x_1)$，$(x_2,-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2)$，$|PQ|=y$. 由两点间的距离公式得

$$y^2=(x_1-x_2)^2+\frac{1}{3}(x_1+x_2)^2=\frac{4}{3}(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$\because |AP|=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1$，$|AQ|=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_2$，且$\triangle APQ$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}x_2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad x_1x_2=\frac{3}{2}$$