高等学校教学用书

模糊数学及其应用

（第2版）

李安贵 张志宏
孟　艳 顾　春 编著

冶金工业出版社

高等学校教学用书

模糊数学及其应用

（第2版）

李安贵 张志宏
孟 艳 顾 春 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2005

内容提要

本书系统地讲述了模糊数学的基础内容和应用方法，共分13章。前6章着重介绍模糊数学的基本概念和理论；后7章主要介绍模糊数学的一些应用方法．每章后面都配有习题，书后附有答案．本书适宜作为大专院校工科、财经类和管理类高年级大学生及硕士研究生的教科书，也适合科技工作者自学和参考．

图书在版编目（CIP）数据

模糊数学及其应用/李安贵等编著．—2版．—北京：冶金工业出版社，2005.8

ISBN 7-5024-3818-1

Ⅰ．模…　Ⅱ．李…　Ⅲ．模糊数学　Ⅳ．0159

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第093999号

出版人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）

责任编辑　王秋芬　美术编辑　李　心

责任校对　王贺兰　李文彦　责任印制　牛晓波

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

1994年6月第1版，2005年8月第2版，2005年8月第3次印刷

850mm×1168mm　1/32；12.625印张；340千字；391页；2801-5800册

22.00元

冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893

冶金书店　地址：北京东四西大街46号(100711)　电话：(010)65289081

（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

第2版前言

本书是在第1版的基础上，根据多年的教学实践，并按照目前的教学要求，进行全面修订而成的. 在修订过程中，保留了原教材的系统、风格和特点，同时也注意吸收当前同类教材的一些优点及本学科的前沿成果，使新版成为既适合时代的要求又继承传统优点的教材.

新版教材主要做了以下工作:

(1) 调整了第1、3、8、11章的内容，使内容衔接更加自然，结构更加合理;

(2) 第2、5、6、9章增加了部分内容，使内容更加丰富;

(3) 重写了第12章模糊控制，增编了第13章模糊概率;

(4) 所涉及到的一些经典教学的内容，作为附录放在书后，以便读者查阅.

张志宏修订了第5章、第8章和第9章; 孟艳修订了第7章，重写了第12章; 顾春编写了第13章; 李安贵完成其余章节的修订工作，并统一成稿.

硕士研究生柳美、张彬、王福山也参加了本书的修订工作.

本书的编写得到北京科技大学研究生院、教务处、教材科和数力系的热情支持和帮助，谨此致谢!

新版中存在的问题，欢迎读者批评指正.

编　者

2005年7月

第1版前言

模糊数学是近30年来发展起来的一门新兴学科，它以其崭新的理论和独特的方法，冲破了精确数学的局限性，巧妙地处理了客观世界中存在着的模糊性现象，在自然科学和社会科学的许多领域取得了令人瞩目的成果，显示出强大的生命力和渗透力.

本书是编者在多年教学实践和科学研究的基础上，参考了国内外多种模糊数学的著作和有关文献写成的，在编写时注意了下列方面：

（一）系统地介绍模糊数学的基本内容和应用方法，力求做到理论紧密联系实际，使读者通过对本书的学习，能够打下较为牢固的模糊数学基础，学会应用模糊数学的理论和方法分析和解决实际问题．书中不涉及抽象难懂的纯理论内容，只要具备高等数学和工程数学的一般基础，就能读懂全书.

（二）叙述循序渐进，深入浅出，理论推导力求严谨，方法的说明尽可能详尽，便于读者自学.

（三）除基本概念、基本理论和基本方法的介绍以外，还适当配有习题，书后附有答案，以便读者检查学习效果.

全书共分十二章，前六章着重介绍模糊数学的基本概念和基础理论，后六章着重介绍模糊数学的应用方法.

段凤英编写第一章第一节和第十一章，并写了绪论；张志宏编写第九章，并为各章配备了习题，给出了答案；其余章节由李安贵编写并统一成稿.

北京师范大学罗承忠教授和北京科技大学刘钦圣教授曾审阅本书初稿，并提出许多宝贵意见，在此谨向他们表示衷

心感谢.

根据我们的实践，40 学时可讲授除第四、五、十、十二章以外的内容，70 学时可讲完全部内容，教师在讲授时可根据学时和专业培养要求灵活掌握.

本书可作为大专院校工科、财经和管理类高年级大学生及研究生的教科书，也适合于广大科技工作者自学和参考.

由于我们水平有限，书中难免出现疏漏或错误之处，恳请读者批评指正.

作者谨识

1993 年 4 月于北京

符 号 表

U, V, X	论域
$\triangleq$	右边定义左边
$\underset{\sim}{A}^c$	$\underset{\sim}{A}$ 的余集
$\vee$	取大，或
$\wedge$	取小，且
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$	模糊集
$\underset{\sim}{A}(u), \underset{\sim}{B}(u)$	$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ 的隶属函数
$\mathscr{F}(U)$	U 的模糊幂集
$\wedge^*$、$\vee^*$	模糊算子
$\hat{+}$、$\underset{\cdot}{\wedge}$	概率算子
$\oplus$、$\ominus$	有界算子
$\overset{+}{\varepsilon}$、$\dot{\varepsilon}$	Einstein 算子
$\overset{+}{r}$、$\dot{r}$	Hamacher 算子
$\underset{v}{\curlywedge}$、$\underset{v}{\curlyvee}$	Yager 算子
$\perp_p$、$\top_p$	Schweizer-Sklard 算子
A_λ	$\underset{\sim}{A}$ 的 λ-截集
$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$	$\underset{\sim}{A}$ 的 λ-强截集
Ker $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的核
Supp $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的支撑集
hgt $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的高
dph $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的深度
$\vert\underset{\sim}{A}\vert$	$\underset{\sim}{A}$ 的基数
$\Vert\underset{\sim}{A}\Vert$	$\underset{\sim}{A}$ 的相对基数
$E(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的均值
$D(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的方差
$d(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的模糊度
$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的内积
$\underset{\sim}{A} \circledcirc \underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的外积

$\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{S}$	模糊关系
$r(R)$	R 的自反闭包
$s(R)$	R 的对称闭包
$t(R)$	R 的传递闭包
$\mathscr{M}_{m\times n}$	$m\times n$ 模糊矩
$\hat{X}$	关系方程的最大解
$\check{X}$	关系方程的极小解
$\mathscr{T}$	钻井有效探测
$\underset{\sim}{R}_U$	$\underset{\sim}{R}$ 在 U 中的投影
$\underset{\sim}{R}\vert_u$	$\underset{\sim}{R}$ 在 u 处的截影
$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$	模糊映射
$\underset{\sim}{T}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$	模糊变换
$\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{J}$	二元模糊运算
$\underset{\sim}{4}$	模糊正整数 4
$t(\alpha,\sigma)$	三角模糊数
x^*	模糊最优解
$\underset{\sim}{\leqslant}$	近似小于等于
$\hat{=}_0$	非常非常小的数
$P(\underset{\sim}{A})$	模糊集的普通概率
$\underset{\sim}{P}(A)$	普通集的模糊概率
$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{A})$	模糊集的模糊概率
$\underset{\sim}{F}(x)$	模糊概率随机变量的分布函数
$\underset{\sim}{E}(\xi)$	模糊概率随机变量的数学期望
$\underset{\sim}{D}(\xi)$	模糊概率随机变量的方差

目　录

引　言

当我们初次接触到“模糊数学”这一名词时，可能会感到新奇，甚至迷惑不解．数学，从来都是与精确联系在一起的，怎么会有“模糊”的数学呢？模糊数学是一门什么样的学科，它的研究对象是什么，研究问题和解决问题的方法又是什么呢？

“模糊”一词来自英文 Fuzzy，意思是“模糊的”、“（形状或轮廓）不清楚”等等．模糊数学是运用数学方法研究和处理带有模糊性现象的一门新兴学科，它的创始人是美国加利福尼亚大学著名的控制论专家扎德（L. A. Zadeh）教授．

什么是模糊性现象呢？所谓的模糊性，是指事物的亦此亦彼性，反映在概念形成过程中外延的不分明性．比如“健康”，我们很难将一群人硬性地划分成“健康人”与“不健康人”两部分，这就是模糊性现象．模糊性现象的本质在人们头脑中的反映，就形成了模糊性概念．在日常生活和工作中，存在着大量的模糊性现象，我们经常运用模糊性概念来处理这类问题．比如，学生要找一位老师，知道这个老师是个高个子，戴宽边眼镜，南方口音．这里的“高个子”、“戴宽边眼镜”、“南方口音”，都是模糊性概念．因为身高多少厘米算得上“高个子”？眼镜框多少毫米宽称为“宽边”？怎样的发音吐字可谓“南方口音”？这些很难用数学语言表述．但是，如果对这个单位的老师比较熟悉，就可以凭借这些模糊信息，通过对以往大脑中储存的各种信息比较、判断、推理，确定要找的那位老师．在这里，大脑实际上进行了模糊判断和推理．

人脑不仅有模糊判断的功能，而且还有模糊控制的能力．比如我们要把放在桌子上的一个鸡蛋拿起来，究竟用多大的力就能拿起来又不会把它捏碎呢？我们不需要对力进行精确的计算，只

需通过视觉、触觉等感觉，经过几次信息反馈和力的调整，就能顺利完成. 诸如此类的例子不胜枚举. 这表明大脑既像一台数字计算机，又像一台模拟计算机；既能处理各种精确的信息，也能处理各种模糊信息. 而在处理模糊信息方面，人脑往往有独到之处，常常是计算机无法比拟的.

在日常生活中，我们还大量使用模糊性语言. 在谈论天气时，常讲“晴朗”、“闷热”、“风力不大”等；描述一个人时，常说“长得漂亮”、“待人和蔼”；评价某人的工作时，往往用“治学严谨”、“工作认真”等语. 正如难以准确表述一个人的五官形状和相对位置、肤色、身材、气质等怎样搭配才可称得上“漂亮”一样，很多问题是很难给出确切的、统一的标准的，然而我们却能够理解其中含义. 这说明我们已经习惯使用模糊性语言描述事物、表达个人情感，用模糊的方法认知事物，从而得出清晰、明确的结论.

概括地说，模糊数学就是把客观世界中的模糊性现象作为研究对象，从中找出数量规律，然后用精确的数学方法来处理的一门新的数学分支. 它为我们研究那些复杂的、难以用精确数学描述的问题，提供了一种简捷而有效的方法。

至此，我们已经了解到，在客观世界中，人们所遇到的事物从量上划分可分为两大类，即确定性的量和不确定性的量；不确定性的量又可分为随机性和模糊性两种. 我们研究这些量所采用的方法是不同的，对于确定性的量，我们运用经典数学；对于随机性的不确定的量，运用概率论；而对模糊性的不确定的量，则运用模糊数学. 这后一种量，正是本书介绍的内容.

第 1 章　模糊集合的基本概念

模糊数学是研究模糊现象的数学，而模糊集合是模糊数学的理论基础. 本章介绍模糊集合的一些基本概念，包括模糊集合的定义、运算、性质以及它与普通集合的联系.

1.1　模糊集合及其表示方法

1.1.1　模糊集的概念

众所周知，每一个概念都有一定的内涵和外延，它们是描述概念的两个方面. 所谓外延，是指概念反映的那一类对象，而内涵是指概念反映的客观对象的本质. 比如“矿石”这一概念，其内涵就是凡矿石所共有而非矿石便不具有的特性，而外延就是世界上的矿石. 用集合的观点来看，一个概念的内涵就是集合的定义，外延则是组成该集合的所有元素. 这表明集合可以描述概念. 例如，集合 {1，2，3，…} 描述了“自然数”这一概念；{氦，氖，氩，氪，氙，氡} 描述了“惰性气体”这一概念. 然而，如果我们对周围的一切细加考察的话，就不难发现，普通集还不能描述所有的概念. 像“天气好”、“个子高”、“美丽”这样一类经常遇到的模糊概念，就无法用普通集合来表达. 因为普通集合描述的概念有这样的特点：一对象要么符合该概念，要么不符合该概念，二者必居且仅居其一，没有模棱两可的情况. 而对于模糊概念来说，一对象是否符合它，不能简单地用“是”或“否”来回答，因为对象既不完全符合，也不完全不符合，而是在某种程度上符合该概念. 在这里，符合与不符合没有一个明确的分界线，不具非此即彼性，所以无法用普通集合来描述. 正像我们在绪论中指出的那样，模糊现象大量存在于客观世界

中，是无法回避的．因此，将普通集合加以推广，使之能够表达模糊概念，以解决具有模糊性现象的实际问题，就是十分必要的了．

那么该如何对普通集合进行推广呢？

在普通集合中，我们曾介绍如何用特征函数 $A(u)$ 来表示集合 A. $A(u)=1$ 表明元素 u 属于集合 A，而 $A(u)=0$ 则表明元素 u 不属于集合 A，在这里，特征函数值只取 0 和 1 两个值就已足够．换言之，普通集合 A 可用由它到集合 $\{0, 1\}$ 上的映射 $A(u)$ 来描述．由此可得到启示：如果我们不再用它二值逻辑的规定，把特征函数值的范围从集合 $\{0, 1\}$ 扩充到在区间 $[0, 1]$ 上连续取值，那么一对象符合某概念的程度，就可以用区间 $[0, 1]$ 内的数来表示了，对象所对应的数值愈靠近 1，表示该对象符合概念的程度愈大，反之愈小．这样一来，普通集 A 就相应地扩充为一个带有不分明边界的模糊集了，从而模糊概念也就可用这样的模糊集来表达了．

基于上述想法，下面给出模糊集的定义．

定义 1-1 设在论域 U 上给定了映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1] \quad u \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

则称 μ 确定了 U 上的一个模糊子集，记为 $\underset{\sim}{A}$（在 A 下加"~"以区别于普通集 A）．μ 称为模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，记 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 以强调是 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 在 $u \in U$ 点处的值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 u 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，它表示 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度或"资格"．为方便起见，通常将模糊子集简称为模糊集，且把 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 与 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 均简记为 $\underset{\sim}{A}(u)$.

在一般性的讨论中，我们常将模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的图形，画成图 1-1 的曲线形状．

模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所描述，即只要给定隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$，那么模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 也就完全确定了，不同的隶属函数确定

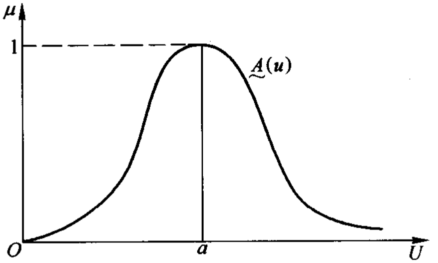

图 1-1　隶属函数曲线

着不同的模糊集. 同一个论域 U 上可以有多个模糊集.

对 $\forall u \in U$ 及 U 上的模糊集，一般不能说 u 是否隶属于 $\underset{\sim}{A}$，只能说 u 在多大程度上隶属于 $\underset{\sim}{A}$，这正是模糊集与普通集的本质区别.

特别地，当 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的值只取 $[0,1]$ 的两个端点（即 0，1 两个值）时，隶属函数便退化为特征函数，模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 就退化为一个普通集了. 这表明普通子集是模糊子集的特殊形态. 此外，若 $\forall u \in U$, $\underset{\sim}{A}(u)=0$,则 $\underset{\sim}{A}$ 称为空集 $\varnothing$;若 $\forall u \in U$, $\underset{\sim}{A}(u)=1$，则 $\underset{\sim}{A}$ 称为全集 U.

例 1-1　如图 1-2，设 $U=\{a、b、c、d、e\}$,令 $a \mapsto 1, b \mapsto 0.9$, $c \mapsto 0.4, d \mapsto 0.2, e \mapsto 0$，这是 U 到 $[0,1]$ 的一个映射，记为

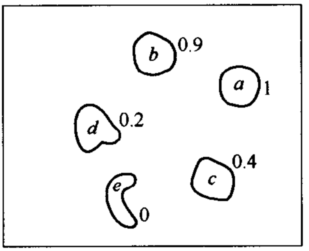

图 1-2　U 上的“圆块块”模糊集

$\underset{\sim}{A}(u)$,问 $\underset{\sim}{A}(u)$ 是否确定一模糊集.

解 根据定义 1-1，$\underset{\sim}{A}(u)$ 确定 U 上的一个模糊集 $\underset{\sim}{A}$，它是"圆块块"这一模糊概念在 U 上的表现.

例 1-2 讨论实数集 X 上的映射

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+100/(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$$

所确定的模糊集 $\underset{\sim}{A}$.

解 (1) 当 $x\leqslant 1$ 时，$\underset{\sim}{A}(x)=0$，表明不大于 1 的数与 $\underset{\sim}{A}$ 无隶属关系，也即与 $\underset{\sim}{A}$ 有隶属关系的数都是大于 1 的数；

(2) 当 $x=11$ 时，$\underset{\sim}{A}(11)=0.5$，即 $x=11$ 隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 0.5；

(3) 当 $x=101$ 时，$\underset{\sim}{A}(101)=0.99$，即 $x=101$ 以程度 0.99 隶属于 $\underset{\sim}{A}$.

很明显，x 比 1 大得越多，隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度就越大，当 $x\gg 1$ 时，$\underset{\sim}{A}(x)$ 就充分接近于 1，这表明模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 描述的是"所有比 1 大得多的实数"这一模糊概念.

$\underset{\sim}{A}(x)$ 的图像如图 1-3 所示.

例 1-3 以年龄作论域，取 $U=[0,200]$，于是年老 $\underset{\sim}{O}$ 与

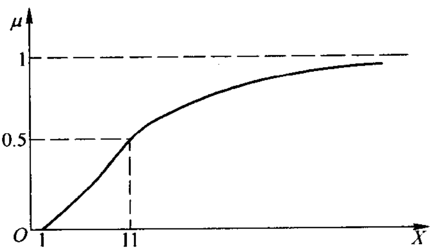

图 1-3 "比 1 大得多的实数"的隶属曲线