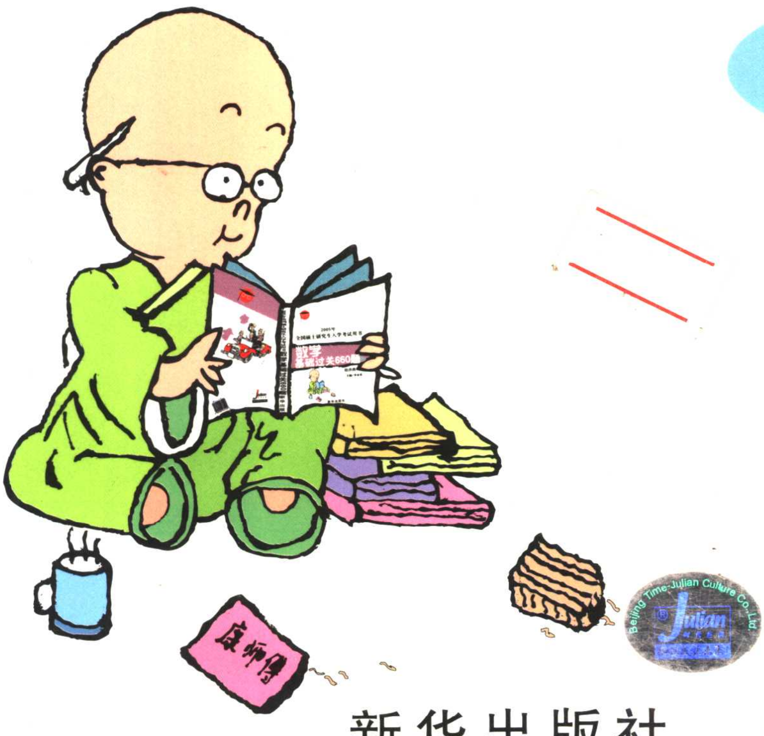
金榜考研成功
系列丛书

2005年全国
硕士研究生入学考试用书

数学
基础过关660题

经济类

主编/李永乐



新华出版社

2005年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题
(经济类)

主　编:李永乐

编　者:(按姓氏笔画)

清 华 大 学　刘庆华

清 华 大 学　李永乐

北京交通大学　赵达夫

东北财经大学　龚兆仁

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关660题(经济类)/李永乐主编. -北京:新华出版社,2004.2

(2005年全国硕士研究生入学考试用书)

ISBN 7-5011-6553-X

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第004604号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

2005年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题(经济类)

主编:李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路8号 邮编:100043)

新华出版社网址:http://www.xinhuapub.com

中国新闻书店:(010)63072012

新华书店总经销

北京机工印刷厂印刷

787毫米×1092毫米 16K 21.25印张 518千字

2004年2月第1版 2004年2月第1次印刷

ISBN 7-5011-6553-X/G·2384 定价:30.00元

若有印装质量问题,请与印刷厂联系(010)82570299

第二版前言

本书自去年7月出版以来，已加印三次，此次再版最大的变化是改变 为理工与经济各一册（均各为660题），这样题目更丰富，更贴近考试大纲对基础知识、概念、方法的要求，提高了考生对题目的有效利用率。除了补充、更换、编写了一些新题之外，有的题还增加了新的解法，对于同学不太好理解，或不大注意的地方，在评注中增加了较多的题外话。

为了把每个知识块复习好，建议同学把填空题与选择题中对应的知识点结合在一起复习。希望本书的修订再版，能对同学们的复习备考有更大帮助。

编　者

2004年2月

前　言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四 4 个卷种，内容包括高等数学（微积分）、线性代数、概率论与数理统计。题型为填空题与选择题。注意，2004 年卷子结构改变为：8 个选择题，6 个填空题，9 个解答题，其中选择、填空共 56 分，解答 94 分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”，在强调选拔、强调能力考查的时候，并不意味着要削弱对基础知识和基本理论的要求，“考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一”。近几年来，相当一部分考生在答题中的一些失误，恰恰是对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法的理解与掌握上存在某些偏差欠缺，甚至有所偏废所致。如果基本的数学方法没掌握，定理公式不熟悉，势必在知识点的衔接与转换上会有各种障碍，那么思维水平和创造意识亦将受到影响。

不论是数学基本理论的建立，还是数学运算或逻辑推理的进行，无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习，应当从不同的角度，不同的侧面进行思考，准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别，否则解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就会有种种谬误。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三拉四，总犯“低级”错误。

是否具有较为扎实的基础知识和基本理论，是培养、提高分析问题与解决问题能力的基础，我们正是在认真研究历年试题的基础上，对考试的重点、难点加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的习题整合成书。期望能帮助同学搞清概念、搞清原理、搞清方法，只有基础过关在考试中才能取得好成绩。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从 2003 年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了 50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更加突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 7 月

目　录

第一部分　填空题

§　高等数学(微积分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 1\\ 3+x & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^3 & x\leqslant 1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$

则　$\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]=$ ________.

【答案】 不存在.

【分析】 $f[g(x)]=\begin{cases}-g(x) & g(x)\leqslant 1\\ 3+g(x) & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}-x^3 & x\leqslant 1\\ 3+(2x-1) & x>1\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^+}[3+(2x-1)]=4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]\neq \lim_{x\to 1^-} f[g(x)]$$

因此　$\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$不存在.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\pi\sqrt{n^2+1}=$ ________.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【分析】
$$\lim_{n\to\infty} n\tan\pi\sqrt{n^2+1}=\lim_{n\to\infty} n\tan\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\tan\pi\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{\pi}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$ ________，

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$ ________.

【答案】 3，1

【分析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\frac{2+1}{1}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\frac{-2+1}{-1}=1$$

【评注】 求本题极限时,要注意 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-(x^2-4x)\ln(1+\dfrac{2}{x})\right]=$ ______.

【答案】 10

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-(x^2-4x)\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]+4\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right]\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{2}{t}-\dfrac{\ln(1+2t)}{t^2}\right]$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2t-\ln(1+2t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2-\frac{2}{1+2t}}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2t}{t} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}4x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}4x\cdot\frac{2}{x} = 8$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-(x^2-4x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = 10$

5. 设 $a>0,b>0,c>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{2}{x}} =$ ________.

【答案】 $(abc)^{\frac{2}{3}}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}$$
$$= \frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3} = \frac{\ln abc}{3}$$

因此
$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln abc} = (abc)^{\frac{2}{3}}$$

【评注】 也可以利用等价代换定理及极限的四则运算计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x}$：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln c}{x}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\ln abc.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________

【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left[1+\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2^{x^2}+3^{x^2}-2^x-3^x}{2^x+3^x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x+3^x}\left(\dfrac{2^{x^2}-1}{x}+\dfrac{3^{x^2}-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2\ln 2}{x}+\dfrac{x^2\ln 3}{x}-\dfrac{x\ln 2}{x}-\dfrac{x\ln 3}{x}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}\ln 6$

所以,原式 $=e^{-\frac{1}{2}\ln 6}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【评注】 所要计算的极限属"1^∞"型时,也可将极限改写为如下形式计算起来较为简单.
$\lim u^v=e^{\lim(u-1)\cdot v}$

7. 设 $a>0, a\neq 1$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$,则 $p=$ ________.

【答案】 2

【分析】 $a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}=a^{\frac{1}{x}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)$ 当 $x\to+\infty$ $a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\sim\dfrac{\ln a}{x(x+1)}$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim\limits_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x}}\dfrac{\ln a}{x(x+1)}$

$=\ln a\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{x(x+1)}$

$=\ln a$ (当 $p=2$ 时)

【评注】 容易看出:当 $p<2$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=0$,当 $p>2$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=+\infty$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^x-1}{x\ln x} & x>1\\ 0 & x=1,\\ \dfrac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x} & x<1\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=$ ________.

【答案】 1

【分析】 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin(1-x)}{1-x}+\lim_{x\to1^-}\frac{\cos(1-x)-1}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{1-x}+\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2}{1-x}=1$$

因此，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

【评注】 (1) 因 $t\to0$ 时，$e^t-1\sim t$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 所以 $x\to1$ 时，$e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$，$\cos(1-x)-1\sim\frac{1}{2}(1-x)^2$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义及函数在 x_0 点处的值没有关系．在本题中 $f(1)=0$，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

9. 设当 $x\to0$ 时，$\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\quad(a<0)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$ ________.

【答案】 3.

【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+x^3-a}{x^k(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{k-3}(\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a})}\xlongequal{k=3}\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=$ ________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

上式最后一步利用 $x\to 0$ 时 $e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$.

【评注】 在计算极限时,正确利用等价无穷小的代换定理能简化计算.

常遇到的等价无穷小有:

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0)$, $\ln(1+x)\sim x$.

11. 设$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【答案】 e^2

【分析】 把$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 改写为指数形式:$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}=e^3$

由此得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3 \tag{1}$$

当 $x\to 0$ 时,分母为无穷小,所以分子也为无穷小,因此,当 $x\to 0$ 时

$\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)\sim x+\dfrac{f(x)}{x}$,所以(1)可写为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3$.

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

【答案】 3

【分析】 因 $3^n<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}$

所以 $3 < (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$

当 $n\to\infty$ 时，$3^{\frac{1}{n}}\to 1$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

【评注】 本题是利用夹逼定理求极限，解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列，这要求我们熟练掌握一些常用的数列的极限.

13. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=$ ______.

【答案】 0

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(0))+f(0)]=f(0)$

由函数在一点连续的定义得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=\left|\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(-x))\right|$

$=|f(0)-f(0)|=0$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，且 $f(1)=1$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=$ ______.

【答案】 ln3

【分析】 先求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

由函数的连续性得 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x^{\frac{1}{x}})=f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=\ln 3$

15. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及类型是______.

【答案】 $x=\pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【分析】 分别就 $|x|=1$，$|x|<1$，$|x|>1$ 时求极限

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，得出 $f(x)$ 的分段表达式：

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$$

在 $|x|=1$ 处,由 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1\neq\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1$

得 $\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)$ 不存在.

所以,$x=\pm1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

16. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$,$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$,补充定义 $f(1)=$ ________,可使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

【答案】 $\dfrac{1}{\pi}$

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 内连续,因此,只须使 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 即可.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\\&\xlongequal{令1-x=t}\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t\sin\pi t}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi^2t^2}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi-\pi\cos\pi t}{2\pi^2t}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0}\frac{\pi^2\sin\pi t}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

所以,补充定义 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$,可使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

17. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2} & x<0\end{cases}$$

则 $a=$ ________,$b=$ ________ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】 $\dfrac{1}{3}$,$-\dfrac{5}{3}$

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须使 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

而 $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$

$$= 0+\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x}+b = 2+b$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^-}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x+\sin x}{x} = 2\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{3x^2} = 2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

所以,应有 $2+b=\frac{1}{3}$ 及 $a=\frac{1}{3}$,因此,当 $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{5}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

18. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,$f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,并满足 $f(2x)=f(x)$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 上,$f(x)=$ ________.

【答案】 1

【分析】 只需证明 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)\equiv f(0)$. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$ $x\neq0$,由 $f(2x)=f(x)$ 可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{2^n}x\right)$$

在上式中,令 $n\to+\infty$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}x\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}x\right)=f(0)$,因此有 $f(x)=f(0)=1$.

【评注】 注意极限过程,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)$.

19. 设 p 是自然数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right]=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{p}$

【分析】 令 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}$,则 $f'(1)=\frac{1}{p}$

由导数的定义 $f'(1)=\lim\limits_{\triangle x\to0}\frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to0}\frac{(1+\triangle x)^{\frac{1}{p}}-1}{\triangle x}=\frac{1}{p}$

取 $\triangle x=\frac{1}{n}$,$f'(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right]=\frac{1}{p}$.

20. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 α 的取值范围是 __________.

【答案】 $\alpha>2$

【分析】 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x}$

$$x=0\text{时},f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}\xlongequal{\alpha>1}0$$

所以，$\alpha>1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

要使 $f'(x)$，在 $x=0$ 处连续，须使

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，即

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x}\right]=0$，此时应有 $\alpha>2$.

21. 若 $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $g'(0)=g(0)=0$，则 $f'(0)=$ __________.

【答案】 0

【分析】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-g(0)]\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

在上式中，因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$，又 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量，无穷小量与有界量的乘积为无穷小量，因此，答案为零.

【评注】 求分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求，或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数：(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续；(2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心领域内可导，(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

但就本题而言，就不能用上述定理，因题设中没有“$g'(x)$ 在 $x=0$ 的某空心领域内存在”的条件.

22. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-e & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________

【答案】 $\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

【分析】 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\left[e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e\right]'$$
$$=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'$$
$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{(x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \qquad (1)$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} \qquad (2)$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$
$$=-\frac{e}{2}$$

【评注】 (1)求幂指函数 $[u(x)]^{v(x)}$ 的导数,可化为对 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 求导,或用对数求导法.

(2)解本题时,(1)式到(2)的过程必不可少,即先用求极限的乘法运算法则,再对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$ 利用罗比塔法则,若直接对(1)式利用罗比塔法则,又遇到求幂指函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的导数,计算会越来越复杂.

23. 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,又 $F(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}F'(0)$