科学版

大学工科数学学习指导系列

线性代数与空间解析几何

学习指导

吴勃英　张春蕊
陈延梅　蒋卫华　编
邓廷权　　　审

- 精心辅导课程学习
- 训练数学思想与技能
- 展示数学方法与技巧

科学出版社
www.sciencep.com

大学工科数学学习指导系列

线性代数与空间解析几何学习指导

吴勃英　张春蕊　陈延梅　蒋卫华　编
邓廷权　审

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容包括一元多项式、行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组及其在几何上的应用、线性变换、特征值、特征向量及相似矩阵、Jordan 标准形，二次型与二次曲面共 9 章. 每章在列出学习要点并进行简单说明的基础上给出典型题型分析与解题方法，最后给出习题及其答案或提示供学生自测使用.

本书可供大学工科学生与《线性代数与解析几何》(游宏、吴勃英、董增福，科学出版社，2001)一书配合使用，也可供学习该门课程的学生单独参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何学习指导/吴勃英等编. —北京：科学出版社，2004

大学工科数学学习指导系列

ISBN 7-03-011458-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-解题②空间几何：解析几何-高等学校-解题　Ⅳ. ①O151.2-44②O182.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033224 号

责任编辑：林　鹏　段博原/责任校对：钟　洋

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004 年 4 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2004 年 4 月第一次印刷　印张：15 1/4

印数：1—5 000　字数：294 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

目　　录

第一章　一元多项式

一、内容要点

1. 数环与数域

数环	令 R 为一非空数集，若 R 对加、减、乘三种运算封闭，即对 R 中任意两个数 a,b，其和、差、积($a+b,a-b,ab$)都在 R 中，则称 R 为一个数环
数域	令 F 是至少含一个不为 0 的数的数集，若 F 对四则运算封闭，则称 F 为一个数域

命题：任何数域都包含有理数域.

2. 一元多项式的运算

(1) 一元多项式的概念与定义

设 F 为数域，x 为一符号(未定元)，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

被称为 F 上的一个一元多项式，其中 n 为非负整数，$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n \in F$.

数域 F 上的一元多项式的集合通常用 $F[x]$ 表示，且 $F \subset F[x]$.

设 $f(x),g(x) \in F[x]$，如果它们同次项的系数都相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$.

(2) 运算的基本定义及性质

现设

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i \qquad (\text{假定 } n \geqslant m)$$

$f(x)$与 $g(x)$的和	记 $h(x)=f(x)+g(x)$， $h(x)=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ $(b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0)$
$f(x)$与 $g(x)$的积	记 $h(x)=f(x)g(x)$， $h(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1})x^{n+m-1}+\cdots+(a_0b_i$ $+a_1b_{i-1}+\cdots+a_ib_0)x^i+\cdots+a_0b_0$

由以上定义可知：对任意多项式 $f(x)$ 有

$$0+f(x)=f(x),1\cdot f(x)=f(x),0\cdot f(x)=0,f(x)+[-f(x)]=0$$

此外，多项式的加法、乘法满足下面的运算律：

加法交换律	$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$
加法结合律	$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$
乘法交换律	$f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$
乘法结合律	$[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)]$
乘法对加法的分配律	$f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x)$

从而我们知 $F[x]$ 对加、减、乘三种运算封闭，这很像数环，因此我们把 $F[x]$ 称为一元多项式环.

(3) 带余除法

设 $f(x),g(x)\in F[x]$.

$g(x)\mid f(x)$	$\exists$ 多项式 $q(x)\in F[x],f(x)=g(x)q(x)$
$g(x)\nmid f(x)$	否则

关于整除有如下性质：

①	若 $g(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，则 $h(x)\mid f(x)$
②	若 $g(x)\mid f(x),f(x)\mid g(x)$，那么 $f(x)=Cg(x)$，其中 C 为 F 中一非零常数
③	若 $h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，那么 $h(x)\mid f(x)\pm g(x)$
④	每一多项式可整除零多项式，也可被任一零多项式整除

一般情况下，我们有：

设 $f(x),g(x)\in F[x]$，且 $g(x)\neq 0$，那么存在 F 上的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

其中或者 $r(x)=0$，或者 $\deg r(x)<\deg g(x)$. 满足以上条件的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 只有惟一的一对，其分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式与余式. 我们在下面通过证明 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的存在性给出带余除法的基本过程.

假定 $\deg f(x)\geqslant\deg g(x)$，把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 按 x 的降幂写出

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

其中,$a_n\neq0,b_m\neq0$,且 $n\geqslant m$.

令

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

$f_1(x)$有以下性质:或者 $f_1(x)=0$,或者 $\deg f_1(x)<\deg f(x)$.

如果 $f_1(x)=0$ 或者 $\deg f_1(x)<\deg g(x)$,问题得证.此时 $r(x)=f_1(x)$,$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$.否则我们用同样的方法可得 F 上的一多项式

$$f_2(x)=f_1(x)-\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)$$

这里 a_{n_1} 是 $f_1(x)$的首项系数.$f_2(x)$有以下性质:或者为 0 或者 $\deg f_2(x)<\deg f_1(x)$,这样做下去,由于 $f_1(x),f_2(x)$的次数是递降的,最后一定可得到多项式

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)-\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}g(x)$$

而 $f_k(x)=0$ 或者 $\deg f_k(x)<\deg g(x)$.

归纳上述过程,我们可得

$$f(x)=g(x)\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\cdots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right)+f_k(x)$$

这样

$$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\cdots+\frac{a_{n_{k-1}-m}}{b_m}x^{n_{k-1}-m},r(x)=f_k(x)$$

满足 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,得证.

我们有:$g(x)\mid f(x)$当且仅当 $g(x)$除 $f(x)$的余式 $r(x)=0$.

3. 最大公因式

(1) 定义

设 $d(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一公因式,若 $d(x)$能被 $f(x)$与 $g(x)$的每一个公因式整除,则称 $d(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

(2) 存在性

若对 $f(x)$与 $g(x)$有等式 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,则 $f(x)$与 $g(x)$和 $g(x)$与 $r(x)$有相同的公因式.

对于 $F[x]$ 中的两个多项式 $f(x),g(x)$，则最大公因式 $(f(x),g(x))$ 存在，且存在 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得

$$(f(x),g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

下面我们通过证明上面的结论给出辗转相除法.

若 $f(x)$，$g(x)$ 有一个为零，比方说 $g(x)=0$，那么 $f(x)$ 就是一个最大公因式，若其首项系数 $C\neq 0$，那么

$$(f(x),0) = C^{-1}\cdot f(x) + 1\cdot 0$$

下面不妨设 $g(x)\neq 0$，按带余除法有 $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$. 若 $r_1(x)\neq 0$，又有 $g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$；若 $r_2(x)\neq 0$，再用 $r_2(x)$ 去除 $r_1(x)$，得商式 $q_3(x)$，余式 $r_3(x)$. 如此辗转相除下去，显然所得余式的次数不断降低，即

$$\deg g(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \cdots$$

因此在有限次之后，必有余式为 0，于是我们有一串等式：

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{i-2}(x) = r_{i-1}(x)q_i(x) + r_i(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + 0$$

$r_k(x)$ 与 0 的最大公因式为 $r_k(x)$. 根据以上说明，$r_k(x)$ 也就是 $r_k(x)$ 与 $r_{k-1}(x)$ 的一个最大公因式；同样的理由，逐步推上去，$r_k(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，由以上等式的倒数第二个，我们有 $r_k(x)=r_{k-2}(x)-r_{k-1}(x)q_k(x)$，然后用上面的等式逐个地消去 $r_{k-1}(x),\cdots,r_1(x)$，再并项就得到

$$r_k(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

若 $r_k(x)$ 首项系数 $C\neq 0$，则 $C^{-1}r_k(x)=(f(x),g(x))=f(x)[C^{-1}u(x)]+g(x)[C^{-1}v(x)]$.

(3) 几个重要结论

互素：设 $f(x),g(x)\in F[x]$，如果 $(f(x),g(x))=1$，则称二者互素.

设 $f(x),g(x)\in F[x]$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

若 $f(x)\mid[g(x)h(x)]$，且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$.

若 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

4. 一元多项式的因式分解

(1) 定义

数域 F 上多项式 $f(x)$($\deg f(x)\geqslant 1$)如果不能表示为 $F[x]$ 中两个次数均小于 $\deg f(x)$ 的多项式的积，则称 $f(x)$ 为 $F[x]$ 中不可约多项式. 否则称 $f(x)$ 为 $F[x]$ 中可约多项式.

注意：一次多项式总是不可约的.

(2) 不可约多项式若干性质

①	令 $f(x),p(x)\in F[x]$ 且 $p(x)$ 不可约，则或者 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $(p(x),f(x))=1$
②	设 $p(x)$ 为不可约多项式，且 $p(x)\mid[f(x)g(x)]$，则或者 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$
③	设 $p(x)$ 为不可约多项式，且 $p(x)\mid[f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)]$，则 $p(x)$ 必整除某一 $f_i(x)$

(3) 几个重要结论

数域 F 上任一次数$\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以惟一地分解成 F 上不可约多项式的乘积. 所谓惟一性是指，如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有 $s=t$，且适当排列因式次序后，有

$$p_i(x)=C_iq_i(x),\quad i=1,2,\cdots,s$$

其中 $C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 F 中不为 0 的数，$p_i(x),q_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,s)$ 是 F 上的不可约多项式.

标准分解式：在多项式 $f(x)$ 的因式分解中，将每一个不可约因式的首项系数提出来，使它们成为首项系数为 1 的多项式，再把分解式中相同的不可约多项式合并到一起，这时有 $f(x)=a_0p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_t^{n_t}(x)$，其中 a_0 为 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x),\cdots,p_t(x)$ 为互不相同的不可约多项式，$n_1,\cdots,n_t$ 为正整数，则上面分解式称为标准分解式.

设 $f(x),g(x)\in F[x]$，且

$$f(x)=ap_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_t^{m_t}(x)q_1^{m_{t+1}}(x)\cdots q_l^{m_{t+l}}(x)$$

$$g(x)=bp_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_t^{n_t}(x)h_1^{n_{t+1}}(x)\cdots h_k^{n_{t+k}}(x)$$

分别为 $f(x)$, $g(x)$的标准分解式,则

$$(f(x),g(x))=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$$

其中 $r_i=\min\{m_i,n_i\},i=1,2,\cdots,t;q_j(x)$不同于任何 $h_i(x)$.

5. 重因式

(1) 定义

若 $p^k(x)\mid f(x)$,而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则不可约多项式 $p(x)$称为多项式 $f(x)$的k 重因式.

设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\in F[x]$, 称多项式 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$ 为 $f(x)$ 的导数,记作 $f'(x)$.

(2) 多项式导数性质

①	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
②	$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
③	$(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$
④	$f'(x)=0$ 当且仅当 $f(x)=C\in F$
⑤	$\deg f(x)\geqslant 1$ 时,$\deg f'(x)=\deg f(x)-1$

(3) 几个结论

设不可约多项式 $p(x)$为 $f(x)$的一个 $k(k\geqslant1)$重因式,则 $p(x)$为 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.

不可约多项 $p(x)$为 $f(x)$的重因式,当且仅当 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

多项式 $f(x)$无重因式,当且仅当$(f(x),f'(x))=1$.

6. 多项式的根

当 $x=a$ 时,$f(a)=0$,称 a 为$f(x)$的零点,也就是说 a 是多项式方程$f(x)=0$ 的根或解.

若 $x-a$ 为$f(x)$的 $k(\geqslant0)$重因式,则称 a 为$f(x)$的 k 重根. $k=0$,a 不是根;$k=1$,a 称为单根;$k>1$,a 称为重根.

$F[x]$中 $n(\geqslant 0)$次多项式 $f(x)$在 F 中至多有 n 个根,其中 k 重根算 k 个根.

任何次数大于零的复系数多项式在复数域中必有根.

次数不小于 1 的复系数多项式 $f(x)$在复数域上有惟一标准分解式

$$f(x) = C(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\cdots(x - a_s)^{k_s}$$

其中 $\sum_{i=1}^{s} k_i = \deg f(x) \geqslant 1$, C 为 $f(x)$ 的首项系数.

韦达公式:对多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n > 0$, $a_n \neq 0$. 其在复数域中有 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则根与系数之间关系为

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

…………

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

如果多项式 $f(x)$, $g(x)$的次数都不超过 n,而它们对 $n+1$ 个不同的数 C_1, C_2, $\cdots$, C_{n+1} 有相同的值,即 $f(C_i) = g(C_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$,那么 $f(x) = g(x)$.

任一次数大于 0 的实系数多项式 $f(x)$在实数域上有惟一标准分解式

$$f(x) = C(x - a_1)^{t_1}\cdots(x - a_s)^{t_s}(x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1}\cdots(x^2 + p_r x + q_r)^{k_r}$$

其中 $a_1, \cdots, a_s$; $p_1, \cdots, p_r$; $q_1, \cdots, q_r$ 全为实数, C 为 $f(x)$的首项系数,且 $x^2 + p_i x + q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$在实数域上不可约.

二、题型分析与解题方法

1. 数环与数域

例 1 $R = \{a + b\sqrt{2} \mid \forall a, b \in \mathbf{Z}\}$是数域还是数环?

解 由验证可知 R 对加、减、乘三种运算封闭,但对除法不封闭.因此 R 是数环而非数域.

2. 带余除法

例 2　设 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6, g(x)=x^2-3x+1$，求以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式与余式.

分析　本题是带余除法的应用实例.

解　以如下算式进行运算：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad 2x^2+3x+11 \\
\cline{2-2}
x^2-3x+1 & 2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 \\
 & \underline{2x^4-6x^3+2x^2\quad\quad\quad\quad} \\
 & \quad\quad\quad 3x^3+2x^2-5x+6 \\
 & \quad\quad\quad \underline{3x^3-9x^2+3x\quad\quad} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad 11x^2-8x+6 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad \underline{11x^2-33x+11} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 25x-5
\end{array}
$$

所以商式 $q(x)=2x^2+3x+11$，余式 $r(x)=25x-5$.

3. 最大公因式

例 3　$x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2}, x^2-2$ 都是 x^4-4 与 x^4-4x^2+4 的公因式，但 x^2-2 是它们的最大公因式.

例 4(辗转相除法的应用)　求 $(f(x),g(x))$ 及 $u(x),v(x)$ 使得

$$(f(x),g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

其中 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6, g(x)=x^2+x-2$.

解　辗转相除，有

$-\frac{1}{4}x$	x^2+x-2 x^2+x	x^3+2x^2-5x-6 x^3+x^2-2x	$x+1$
	-2	x^2-3x-6 x^2+x-2	
		$-4x-4$ $-4x-4$	$2x+2$
		0	

这里 $r_1(x)=-4x-4, r_2(x)=-2, r_3(x)=0$,故$(f(x),g(x))=1$.且由$f(x)=g(x)(x+1)+(-4x-4), g(x)=(-4x-4)\left(-\frac{1}{4}x\right)+(-2)$,得

$$1=-\frac{1}{2}(-2)=-\frac{1}{2}\left[g(x)-r_1(x)\left(-\frac{1}{4}x\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{g(x)-\left[f(x)-g(x)(x+1)\frac{-x}{4}\right]\right\}$$

$$=-\frac{x}{8}f(x)+\left(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)g(x)$$

所以 $u(x)=-\frac{x}{8}, v(x)=\frac{1}{8}(x^2+x-4)$.

例 5 若$(f(x),g(x))=1$,则$(f(x),g(x)f(x)+g(x))=1$.

证 因$(f(x),g(x))=1$,存在 $u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

所以有

$$f(x)u(x)+g(x)u(x)-g(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

$$(f(x)+g(x))u(x)+g(x)(v(x)-u(x))=1 \qquad (※)$$

即$(f(x)+g(x),g(x))=1$,同理$(f(x)+g(x),f(x))=1$,即有 $u_1(x),v_1(x)\in F[x]$,使得

$$(f(x)+g(x))u_1(x)+f(x)v_1(x)=1$$

将上式两边乘以 $g(x)$,并将

$$g(x)=f(x)g(x)v_1(x)+(f(x)+g(x))g(x)u_1(x)$$

代入(※)式,合并同类项后可得

$$(f(x)+g(x))u_2(x)+f(x)g(x)v_2(x)=1$$

因此

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$$

4. 一元多项式的因式分解

例 6 分解多项式 x^4-4.

分析 多项式分解在不同域中有不同的结果.

解 将 x^4-4 看做 $\mathbf{Q}[x]$($\mathbf{Q}$ 表示有理数域)中元素,

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$$

但将 $x^4 - 4$ 看做 $\mathbf{R}[x]$ 中的元素($\mathbf{R}$ 表示实数域),还可继续分解

$$x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$$

且在 $\mathbf{R}[x]$ 中已不能再分;但作为 $\mathbf{C}[x]$($\mathbf{C}$ 表示复数域)中元素又可进一步分解

$$x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}\mathrm{i})(x + \sqrt{2}\mathrm{i})$$

5. 重因式

例 7 判断 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 有无重因式,如果有,试求出其重数.

解 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$,用辗转相除法求得

$$(f(x), f'(x)) = x - 1$$

因此 $f(x)$ 仅有一重因式 $x - 1$,其重数为 2.

例 8 试判断 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 有无重因式.

解 $$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

所以 $f(x) = f'(x) + \frac{x^n}{n!}$,而 $(f(x), f'(x)) = (f'(x), \frac{x^n}{n!}) = 1$,所以 $f(x)$ 无重因式.

6. 多项式的根

例 9 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n \in F$,且 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$. 令

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i), F_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j)$$

则 $F[x]$ 中多项式 $L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{F'(a_i)} F_i(x)$ 满足 $L(a_i) = b_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

这个多项式 $L(x)$ 称为 Lagrange 插值公式.

证 由于 $i \neq j$ 时 $F_j(a_i) = 0$,又易得到 $F'(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)$,故 $F'(a_i) = F_i(a_i)$,则 $L(a_i) = \frac{b_i}{F'(a_i)} F_i(a_i) = b_i$.

三、习题

1. (1)举出对加、减法都不封闭,但对乘法封闭的数集的例子.

(2)举出对加、减法封闭,但对乘法不封闭的数集的例子.

2. 令 F_1,F_2 是任二数域,证明 $F_1\cap F_2=\{x\mid x\in F_i,i=1,2\}$也是数域.

3. 下面例子中,哪些数集为数环?哪些为数域?

(1)$F_1(x)=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$;

(2)$F_2(x)=\{a+b\sqrt{-5}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$;

(3)$F_3(x)=\left\{\frac{a}{b}\mid(a,b)=1,a\text{ 为偶数},b\text{ 为奇数}\right\}$;

(4)$F_4(x)=\{a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}\mid a,b,c\in\mathbf{Q}\}$.

4. 求 $g(x)$除 $f(x)$所得的商式及余式.

(1) $f(x)=2x^3+x+1,g(x)=3x^2+x-4$;

(2)$f(x)=3x^4+x^3+2x^2-1,g(x)=x^2+3x+2$.

5. m,p,q 适合什么条件时有:

(1)$x^2+mx-1\mid x^2+px+q$;

(2)$x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$.

6. 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$都是数域 F 上的多项式,其中 $f_1(x)\neq0$ 且 $f_1(x)f_2(x)$能被 $g_1(x)g_2(x)$整除,而 $g_1(x)$能被 $f_1(x)$整除,证明 $f_2(x)$能被 $g_2(x)$整除.

7. 求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式$(f(x),g(x))$,并求 $u(x),v(x)$使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$.

(1) $f(x)=x^4-4x^2+1,g(x)=x^3-3x^2+1$;

(2) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,g(x)=x^2-x-1$.

8. 证明:如果 $f(x),g(x)$不全为 0,且 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$,那么$(u(x),v(x))=1$.

9. 设 $d(x)$是首项系数为 1 的多项式,且 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$,问 $d(x)$是否一定为 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,为什么?

10. 设 $p(x)$是 F 上次数$\geqslant1$ 的多项式,证明:如果对于 F 上的任意多项式 $f(x),g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$可推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$,那么 $p(x)$是F 上的不可约多项式.

11. 将 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 在复数域上分解为不可约多项式之积.

12. 证明:次数大于 0 的首项系数为 1 的多项式 $f(x)$为一不可约多项式的方幂的充要条件是:对任意多项式 $g(x)$,必有$(f(x),g(x))=1$,或者对于某一正整

数 m，$f(x)\mid g^m(x)$.

13. 判断下列多项式有无重因式：

(1) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$； (2) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-3$.

14. 求 t 值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

15. 若 $(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$，求 A,B.

16. 设 $\deg f(x)>0$，试证 $f'(x)\mid f(x)$ 当且仅当 $f(x)=a(x-b)^n$，$a,b\in F$.

17. 证明：如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么 $(x-1)\mid f_1(x)$，$(x-1)\mid f_2(x)$.

18. 在复数域内解方程组

$$\begin{cases}x^3+2x^2+2x+1=0\\x^4+x^3+2x^2+1=0\end{cases}$$

19. 试就以下给出的根做出次数尽可能低的实系数多项式：

(1)二重根 1，单根 2 及 $1+\mathrm{i}$；

(2)二重根 $2-\mathrm{i}$，单根 $1-\mathrm{i}$.

20. 证明：奇次实系数多项式至少有一个实根.

四、习题答案或提示

1. (1)非零整数集；(2)0 与纯虚数组成的数集.

2. 根据 F_1,F_2 都是数域的性质，证明 $F_1\cap F_2$ 中元素对四则运算都封闭.

3. (1)、(2)、(3)、(4)是数环，(1)、(3)是数域.

4. (1)商式 $=\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$，余式 $=\frac{35}{9}x+\frac{1}{9}$；

(2)商式 $=3x^2-8x+20$，余式 $=-44x-41$.

5. (1) $p=m,q=-1$；

(2) $p-1+m^2=q$ 或 $m=0,p-1=q$.

6. $\exists h(x),k(x)\in F$，$f_1(x)f_2(x)=h(x)g_1(x)g_2(x)$，且 $g_1(x)=k(x)f_1(x)$ 所以 $f_1(x)f_2(x)=h(x)k(x)f_1(x)g_2(x)$.

又因为 $f_1(x)\neq0$，所以 $f_2(x)=h(x)k(x)g_2(x)$，所以 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

7. (1)最大公因式为 1，$u(x)=\frac{85}{37}x+\frac{822}{185}$，$v(x)=-\frac{85}{37}x^2-\frac{2097}{185}x-\frac{2466}{185}$；

(2)最大公因式为 1，$u(x)=\frac{1}{31}(x+5)$，$v(x)=\frac{1}{31}(-x^3-5x^2+5x+26)$.

8. 设 $(f(x),g(x))=d(x)$，则 $f(x)=h_1(x)d(x)$，$g(x)=h_2(x)d(x)$ 所